This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

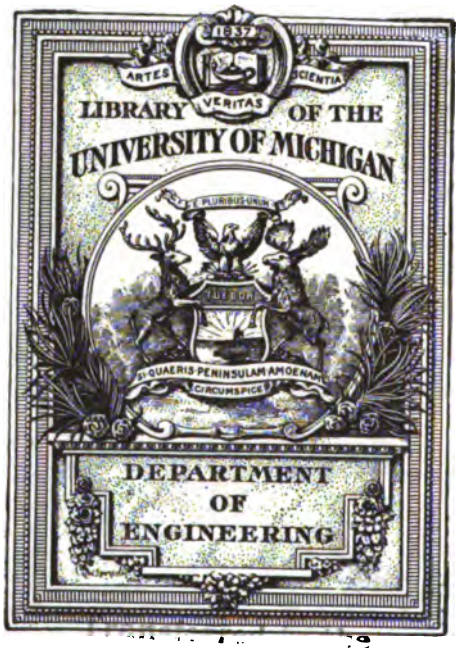
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 428150



GENERAL LIBRARY.

GENERAL

TS
220
.C97

DIE

GRAPHISCHE STATIK.

Die Verlagshandlung behält sich für dieses Werk das Recht der Uebersetzung vor.

DIE

GRAPHISCHE STATIK

VON

C. CULMANN,
PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

ZWEITE NEU BEARBEITETE AUFLAGE.

ERSTER BAND.

Mit 210 in den Text gedruckten Holzschnitten und 17 Tafeln.

ZÜRICH
VERLAG VON MEYER & ZELLER
(A. Reimmann).
1875.

Vorrede.

Elf Jahre sind es, seitdem die erste Hälfte der ersten Ausgabe dieser graphischen Statik erschienen ist; werfen wir einen Blick auf die Fortschritte, welche diese Wissenschaft seitdem gemacht hat.

Unstreitig fand sie in Italien den günstigsten Boden. Dort hat sie *Cremona* am Mailänder Polytechnikum eingeführt, und zwar in einer hohen Auffassung; er betrachtete sie nicht blos als praktisches Hülfsmittel um in gewissen Fällen einige Rechnungen zu ersparen, sondern als den Abschluss der geometrisch statischen Bildung junger Ingenieure. Er hat sich nicht aufgelehnt gegen die Vorkenntnisse, die sie zum Studium voraussetzen muss, sondern hat selbst Geometrie der Lage vorgetragen um seine Schüler vorzubereiten, und darauf die graphische Statik folgen lassen zu können. Später, vor seiner Uebersiedelung nach Rom, wurde derjenige Theil, der speciell die Anwendung auf Bauconstructionen betrifft, Herrn *Sayno* übertragen. Und weiter schliessen sich an diese an *Favaro* in Padua und andere. In Italien erscheint die graphische Statik am würdigsten und besten vertreten.

Einen viel weniger hohen Standpunkt nimmt sie in Süddeutschland ein. Es geschah zwar ziemlich viel vom rein praktischen Standpunkt aus; mit Begierde hat man sich auf die einzelnen Constructionen geworfen, welche mit Linien leichter als mit Zahlen einzelne Bauaufgaben lösen, allein gegen das Wesen derselben: die Körper, an welchen Kräfte im Gleichgewicht sind, und die Liniengebilde, welche die Richtungen und Grössen dieser Kräfte darstellen, als geometrische zusammengehörige Gebilde aufzufassen und auf diese die Geometrie der Lage anzuwenden, in der ja die Beziehungen so verwandter Gebilde auf das vollkommenste ausgearbeitet, fix und fertig vorliegen, gegen diese Auffassung hat man sich durchaus ablehnend verhalten. Der eine findet „die interessanten und für die Praxis brauchbaren Resultate, welche die Statik enthält, würden bereits allgemein Eingang gefunden haben, wenn nicht der gelehrte Apparat der neueren Geometrie viele Ingenieure vom Studium dieses Gegenstandes abgeschreckt hätte". Der geehrte Herr Professor will es elementarer machen, bringt es aber ohne d und $\int$ auch nicht fertig; und doch erfordert die Kenntniss der d und $\int$ einen reifern Geist als wie die Elemente der Geometrie der Lage. Der andere hat die Geometrie der Lage nicht zu vermeiden gesucht, freut sich aber doch darüber, sie entbehrlich gefunden zu haben.

In zahlreichen grösseren und kleineren Abhandlungen wird jetzt die Statik ihres Geistes entkleidet, und so verdaulicher gemacht für junge Techniker, die ungenügend vorbereitet für das Studium der Ingenieurwissenschaften, Dank der Studienfreiheit, die jetzt Mode ist, frisch in den obersten Curs eintreten; und mit ungeheurem Selbstbewusstsein, das die Herrn Professoren noch begünstigen welche möglichst populär vortragen wollen, hoffen: sie werden sich schon durcharbeiten. Wären solche Werke für Baugewerkschulen, und derartige Institute zweiten Ranges geschrieben worden, so könnte man sich

ja nur freuen über die Verbreitung, welche die graphische Statik gewinnt, allein an polytechnischen Schulen sollte man denn doch höhere Ziele verfolgen. Hier sollte es nicht genügen den Techniker, der später selbständig Projecte ausarbeiten soll, der die Tragweite aller Regeln und Formeln die er anwendet kennen, und seine Projecte räumlich durchschauen soll, mit graphischen Constructionsrecepten gefüttert zu haben, sondern der Zweck sollte sein, vor allem denkende Menschen zu bilden, welche auszuführende Projecte räumlich mathematisch überblicken. Dies kann nur auf Grundlage einer guten mathematischen Vorbildung geschehen, und für Ingenieure sind namentlich die geometrischen Disciplinen besonders wichtig, weil sie mehr als alle andern das räumliche Anschauungsvermögen ausbilden. Wohl ist es Sitte, ausgezeichnete Mathematiker und Geometer an die polytechnischen Schulen zu berufen, allein können diese sich da wohl fühlen, wenn die Herrn Professoren der praktischen Fächer nie die mathematische Bildung ihrer Zuhörer in Anspruch nehmen, und so jenen zu verstehen geben, sie haben die Schüler ungenügend vorbereitet. Kann unbenützte Vorbereitung nachhaltig nützen, d. h. bilden? Wenn nun so gewisse mathematische Richtungen in Deutschland vernachlässigt werden, so ist das kein Grund, dahin Gehöriges nicht zu verwenden, sondern es ist im Gegentheil Pflicht, durch die Anwendung darauf hinzuweisen, dass hier Fehlendes nachzuholen sei.

Das gleiche Ablehnen höherer Ausbildung zeigte sich in den vierziger Jahren, wo Mechaniker glaubten der ungenügenden analytischen Bildung mit Lehrbüchern ohne Differential- und Integralrechnung nachhelfen zu müssen. Keine Werke sind im Verhältniss zu ihrem gediegenen Inhalt so schnell vom Schauplatz verschwunden, als wie die *Kaisers* und *Weisbachs*, denn jeder, der sich gründlich in Mechanik unterrichten will: muss dennoch Mathematik studiren, und wenn er das gethan hat, so befriedigen ihn jene Werke nicht mehr. Hoffen wir, es werde

sich auch die Geometrie der Lage in den Schulen einbürgern, und diese trotz der widerstrebenden allzu praktischen Herrn Professoren schliesslich die höhere Stufe erklimmen.

Bei der Gründung der polytechnischen Schule in Paris und den dazu gehörigen Fachschulen wurde zum erstenmal als Ziel und Zweck ausgesprochen, dem Techniker eine höhere mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung zu geben; diese Schule hat Grosses geleistet. Erst viel später, als die dort erzielten Fortschritte in der Anwendung der Mathematik und Naturwissenschaften auf die Technik, alles was sonst geleistet werden konnte, überragte, gründete man das Carlsruher Polytechnikum mit getrennten Fachschulen, worauf nach und nach erst die übrigen Schulen folgten.

An der auf die Pariser polytechnische Schule als Fachschule folgenden Artillerie- und Genieschule in Metz, hat *Poncelet* zuerst die graphischen Methoden mehr als sonst üblich zur Anwendung gebracht. Die Constructionen *Poncelets* waren jedoch immer nur Uebersetzungen vorher entwickelter analytischer Ausdrücke. Er hat zuerst zur Ermittlung von Schwerpunkten das Seilpolygon, dieses fundamentale Hülfsmittel der graphischen Statik, angewendet, und zwar noch an der Artillerieschule in Metz, also vor 1837, in welchem Jahre er bereits schon in Paris wirkte.

Seitdem haben die graphischen Constructionen in Frankreich sich nicht weiter entwickelt, bis in der neuesten Zeit „La Statique Graphique par *M. Levy*, Paris Gauthier Villars 1874“ erschienen ist. In diesem Buche ist die für constante Belastung sehr zweckmässige Methode *Cremona's* weiter ausgeführt, die ungünstigsten Belastungsarten der Constructionen sind aber nirgends ermittelt und berücksichtigt, und sehr bald wird zur Analysis übergegangen. Nur nebenbei wollen wir noch bemerken, dass das von uns in (Nr. 114 S. 467) wieder beschriebene Momentenplanimeter von Herrn Prof. *Amsler* schon vor dem Jahre 1856

ersonnen, und im I. Band der Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856 veröffentlicht worden ist, während es Herr *Levy* 1874 als nagelneue Erfindung einem Herrn *M. Dupré* zuschreibt. In den französischen Schulen wird die graphische Statik noch nirgends gelehrt, die schwerfälligen conseils d'études lassen in Frankreich nur langsam Neues aufkommen.

In Preussen wurde zupächst der Name „graphische Statik" in „Graphostatik" umgeändert, im Uebrigen aber sehr wenig geleistet. Es fehlte bis jetzt den Technikern dort an der nothwendigen mathematischen, namentlich geometrischen Bildung. An der Bauacademie in Berlin ist noch nicht einmal die Bauschule von der Ingenieurschule getrennt; zwar fühlt man das Bedürfniss der Trennung, und in der Ministerialverfügung vom 31. Mai 1873 werden die Baumeistercandidaten angeregt: „in dem ihnen zusagenden Berufe vorzugsweise etwas Tüchtiges zu leisten, statt ihre Kenntnisse nach allen Richtungen hin gleichmässig zu verflachen", und es wird ihnen gestattet den Wunsch auszusprechen, dass die zu ertheilenden Aufgaben vorzugsweise einem der beiden Baugebiete entnommen werden. Die hier erst sehr spät sich zeigende Erkenntniss hat aber durchaus noch keinen Einfluss auf die pädagogische Einrichtung der Bauacademie ausüben können. Unmöglich ist es, dieselben Schüler gleichzeitig zu Künstlern und zu Mathematikern auszubilden, die eine oder die andere Disciplin muss vorherrschen; an der Bauacademie werden Künstler erzogen. Berlin besitzt zur Zeit wohl die erste mathematische Facultät der Welt, allein leider sitzt sie abseits an der Universität, und bildet für die Realgymnasien, die technische Anstalten sind, Oberlehrer, die von der Technik nichts verstehen. Und schliesslich versteht der Techniker zu wenig Mathematik, wird zu wenig geistig von ihr durchdrungen, weil er mit Denjenigen nicht in Berührung kommen kann, die nach den höchsten Zie-

len streben. Nie hätte ein *Cremona* in Berlin entstehen können, der hoch oben auf der mathematischen Stufenleiter stehend, auf dem praktischen Gebiete auch etwas leistet; nie wird ein an einer Universität gebildeter Mathematiker einen Kräfteplan zeichnen; ist doch principiell das Graphische von der Universität ausgeschlossen, widerstrebte es nicht *Staudt*, Figuren zu seiner Geometrie beizugeben. Unumgänglich nothwendig ist es daher diejenigen Lehrer, welche Techniker bilden sollen, an technischen Anstalten zu erziehen, und diese Anstalten müssen desshalb, wenn die technischen Studien gedeihen sollen, mit den besten und tüchtigsten Lehrkräften in mathematisch naturwissenschaftlicher Richtung, die das Land überhaupt bieten kann, ausgestattet werden.

Ein Theil der bis jetzt aufgezählten Uebelstände wird wohl durch das neu zu gründende Polytechnikum beseitigt werden, wird es aber stark genug angelegt werden, um die Bildung der Lehrer an sich zu ziehen und bei Besetzung der Lehrstühle erfolgreich mit der Universität zu concurriren?

Cremona ist höchst freundlich und italienisch höflich, indem er den Engländer *Maxwell* als den geistigen Urheber seiner reciproken Figuren nennt. Die Reciprocität *Maxwells* ist nichts weniger als wie allgemein, sie bestimmt nicht zu jeder geraden Linie in der Ebene eine reciproke gerade Linie in der Ebene; der Verfasser selbst giebt es zu für die Fig. 7 Seite 259, Philosophical Magazine and Journal of Science Vol. XXVII 1864. Auch die Figuren 3 S. 254 sind es nicht, allein nur aus Versehen des Autors, sie werden es, wenn man in III, die Linie c durch den Schnittpunkt $o\,s\,r$, und a durch $k\,s\,n$ zieht. Allgemein können nur mit Hülfe des Nullsystems reciproke Figuren zu solchen aus geraden Linien zusammengesetzten Figuren gezeichnet werden, welche als ebene Begrenzungsflächen eines Körpers betrachtet werden dürfen. Und diese Einführung des Nullsystems ist das Werk *Cremona's* nicht *Max-*

wells, ebenso rühren alle Anwendungen von *Cremona* her, der es wohl am besten wissen wird, welches Stück verdienstvoller Arbeit zwischen jenem Aufsatz *Maxwells* und seinen reciproken Figuren steckt. Weiter als wie irgend wo anders klafft noch die Kluft zwischen dem englischen Gelehrten und Praktiker.

Weiteres über die Entwickelung der graphischen Statik und namentlich über deren Literatur findet sich in der Broschüre: „Ueber die graphische Statik zur Orientirung von Dr. *J. Weyrauch*, Teubner 1874". Dem Verfasser bin ich ganz besonders verpflichtet für die wohlwollende Beurtheilung der ersten Ausgabe meiner Statik.

Wir hatten erwartet, dass nach dem ersten Erscheinen unserer Statik die Analytiker sich daran machen würden, sie in derselben Weise zu behandeln, als wie *Salmon* und *Fiedler* z. B. die Geometrie behandeln. Da nun aber nichts Derartiges erschienen ist, so haben wir es versucht, in der vorliegenden zweiten Auflage den geometrisch graphischen Lösungen ganz kurz die analytischen beizufügen. Die neueren analytischen Methoden haben den grossen Vorzug der Unmittelbarkeit, und hiermit auch den der Uebereinstimmung mit den geometrischen. In den meisten Fällen waren wir im Stande, die Formeln aus den vorausgegangenen geometrischen Ableitungen herauszulesen, und haben dadurch den Vortheil erreicht, Gesetzen Ausdruck zu geben, die in vielen Fällen nicht unmittelbar aus den geometrischen Constructionen hervorgehen, und in jedem doppelt behandelten Fall, die freie Wahl zwischen dem graphischen Construiren und zwischen dem Rechnen gesichert zu haben; in der Praxis führt bald das eine bald das andere rascher zum Ziel. Da jedoch diese analytischen Methoden noch etwas mehr Vorkenntnisse als wie die geometrisch graphischen erfordern, Vorkenntnisse, die man nicht von jedem Schüler, wenigstens nicht hier in Zürich erwarten darf, so haben wir das, was zum

Verständniss des folgenden nicht unumgänglich nothwendig ist, durch kleineren Druck ausgezeichnet. Analytische Ableitungen, für die uns kein geometrischer Beweis bekannt war, und die dennoch durchstudirt werden müssen, wurden in der Grösse des gewöhnlichen Textes gedruckt.

Durch diese doppelte Behandlungsweise, ferner durch mehrere beigefügte oder erweiterte Kapitel wurde der Stoff so vermehrt, dass er in einem Bande nicht mehr untergebracht werden konnte. Der vorliegende erste Band enthält den theoretischen Theil, das graphische Rechnen und die eigentliche graphische Statik, während der zweite Band die Anwendungen enthalten soll. In der ersten Auflage bildete dieser Theil des Werkes nur die beiden ersten Abschnitte über das graphische Rechnen und die graphische Statik, welche im Jahre 1864 erschienen sind.

Dem graphischen Rechnen wurde das Kapitel über den Rechenschieber beigefügt. Es bestehen zwar viele Abhandlungen über den Rechenschieber, allein in den meisten derselben wird die Addition der Logarithmen nicht als ein Aneinanderreihen von Linien aufgefasst, sondern es werden Regeln über unabhängig einander gegenüberstehende Zahlen gegeben, wodurch die Zahl der Regeln ungemein vergrössert wird. Auch wird dieses äusserst nützliche Instrumentchen bei dem Construiren viel zu wenig benutzt, und ich glaubte zur Verbreitung desselben etwas beitragen zu können, indem ich seine Theorie in das graphische Rechnen aufnahm, wohin sie übrigens auch eigentlich hingehört.

Der graphischen Statik habe ich Einiges über das Parallelogramm der Kräfte vorausgeschickt. Wohl ist mir bekannt, dass das eigentlich nicht nothwendig gewesen wäre und ich diesen Satz als selbstverständlich hätte voraussetzen dürfen. Da aber gerade darin, dass das Verhältniss zweier in gegebenen festen Richtungen wirkenden Kräfte und die Richtungen ihrer Mittel-

kräfte projectivische Gebilde sind, der innere Grund dafür liegt, dass die Statik eine geometrische Wissenschaft ist, so glaubte ich, diese Projectivität direct aufstellen zu müssen, um auf ihr weiter zu bauen.

Der Vollständigkeit wegen wurde die Zusammensetzung der Kräfte im Raume, obgleich man dieselbe in der Praxis gewöhnlich zu umgehen sucht, weiter ausgeführt und die Sätze von *Möbius* freilich in etwas veränderter Form aufgenommen. Nachdem wir direct die wichtigsten Sätze des Nullsystems entwickelt und die Zusammensetzung der Kräfte im Raume auf dieses zurückgeführt hatten, benutzten wir *Staudt*, der es vom rein geometrischen Standpunkte aus jedenfalls am ausführlichsten und vollständigsten behandelt hat, um die sich ergebenden Constructionen auszuführen. An dieses Nullsystem reihen sich dann in ganz naturgemässer Weise die schon in unserer ersten Auflage enthaltene projectivische Verwandtschaft zwischen dem Kräfte- und Seilpolygon und dann die reciproken Kräftepläne *Cremona's* an.

Bedeutend, zu einem Abschnitt erweitert, wurden die Momente paralleler Kräfte, die Lehre vom statischen und vom Trägheitsmoment. Das ist das eigentliche Gebiet der graphischen Statik, das sie vollständig beherrscht. Alles was auf Aufgaben zweiten Grades zurückgeführt werden kann, lässt sich auf graphischem Wege leichter als auf analytischem lösen, und namentlich die Momente zweiten Grades lassen sich bei einigermaassen complicirten Verhältnissen rechnerisch gar nicht mehr bewältigen. Gerade um zu zeigen, wie weit man auf analytischem Wege gelangen kann, wurden die Momente einiger, in einfacher Weise begrenzter Körper berechnet. Allein wie complicirt sind nicht schon die Ausdrücke für die Momente eines Tetraeders oder gar eines schief abgeschnittenen Kegels!

Der letzte Abschnitt enthält die Elemente der Elasticitätstheorie. Vielleicht wird man nicht ohne einiges Interesse die

Anwendungen der Trägheitsmomente auf diese Theorie lesen. Durch die Einführung der Elasticitätsellipse eines Bogens oder eines beliebig zu biegenden elastischen Stabes wurde es möglich, die Ortsänderungen des Endpunktes in directen Zusammenhang mit den Kräften zu bringen, welche diese Ortsänderungen verursachen, und auf diese Weise Gesetzmässigkeit in die Bestimmung der an elastischen Bogen wirkenden Widerlagerreactionen zu bringen.

Hiermit schliesst der erste Band, von dem wir glauben annehmen zu dürfen, dass er auch dem Nicht-Ingenieur, dem Lehrer, dem Maschinenbauer und Architekten dienlich sein werde. Der zweite Band wird speciell die Anwendungen auf die Bauaufgaben des Ingenieurs enthalten, nämlich wie in der ersten Ausgabe: die Abschnitte über den Balken, das Fachwerk, den continuirlichen Balken, den Bogen und die Stützmauern.

Wie in der ersten Auflage, setzen wir auch jetzt die Kenntniss der Geometrie der Lage voraus und empfehlen zum Studium derselben vor allen andern Werken *Staudt's* Geometrie der Lage. Wer jedoch diese zu abstract gehalten findet, wird sie viel leichter in den „Vorträgen über Geometrie der Lage von Dr. Th. Reye“ studiren. Sie haben vor *Staudt* den grossen Vorzug, dass die Vorträge mit Figuren erläutert sind, während man bei *Staudt* diese erst selbst erfinden muss. Dagegen geht *Staudt* tiefer ein; z. B. das für die Zusammensetzung der Kräfte so nothwendige Nullsystem findet sich vollständiger behandelt in *Staudt* als wie in *Reye*.

An den hiesigen polytechnischen Schulen sind die nothwendigen Vorkenntnisse zum Verständniss des geometrischen Theiles bei den Schülern vorhanden, seit Prof. *Fiedler* dieselben vorbereitet. Dagegen sind sie in der analytischen Geometrie noch nicht weit genug, um das mit klein gedruckter Schrift im vorliegenden Werke verstehen zu können.

Die hierzu nothwendigen Vorkenntnisse können durch das Studium der Werke *Salmon's*, übersetzt von *Fiedler*, erlangt werden.

Bei der Ableitung analytischer Formeln fühlten wir das Bedürfniss, die räumlichen Stufen, die in der Geometrie so wichtig sind, auch in den Formeln zu markiren, und glaubten, dies am zweckmässigsten durch die Wahl der Schriftgattung zu thun. Wir bezeichneten also überall Körper mit einem grossen gothischen Buchstaben, drei Dimensionen darstellend; die zwei Dimensionen darstellende Fläche mit einem grossen lateinischen und die Linie mit einem kleinen lateinischen Buchstaben. Dem kleinen griechischen Buchstaben bleibt die Dimension 0 oder die Zahl vorbehalten, durch welche Verhältnisse verschiedenster Art ausgedrückt werden.

Die Kraft geht in der graphischen Statik in der Regel aus einer Flächenverwandlung hervor, wird daher der Fläche coordinirt und wie auch sonst allgemein üblich durch einen grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Hieraus ergiebt sich dann ganz von selbst, dass einerseits das Moment als Product einer Kraft mit einer Linie mit einem grossen gothischen Buchstaben bezeichnet werden müsse, anderseits aber die auf eine Linie vertheilte Belastung oder Kraft pro Längeneinheit, die der Multiplication durch eine Linie bedarf, um Kraft zu werden, mit einem kleinen lateinischen, und die Kraft (Last) pro Flächeneinheit mit einem kleinen griechischen Buchstaben zu bezeichnen sei.

Indem wir uns ferner noch bestrebten, das Aehnliche mit denselben Buchstaben zu bezeichnen, ergab sich die folgende, so ziemlich eingehaltene dualistische Bezeichnungsweise:

$\mathfrak{I}$ Inhalt von Körpern.	$\mathfrak{I}$ Trägheitsmomente.
	$\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}$ Momente im Allgemeinen.
	$\mathfrak{P}$ Moment, das von einer ∞ fernen verticalen Kraft herrührt,

demnach um eine horizontale Axe dreht.

$\mathfrak{D}\,\mathfrak{T}$ Momente um nicht horizontale Axen.

F Querschnittsflächen.

$A\ B$ Auflagerdrücke.

P verticale Kraft.

Q Spannung in einem Streckbaum.

R Pressung „ „ „

S Kraft in Streben und Diagonalbändern.

T Kraft in Bogen und Ketten.

$a\ b\ c\ l\ m\ x\ y\ z$ Basen, Längen, Coordinaten.

p verticale Belastung pro Längeneinheit.

$d\ r\ s\ q$ Durch- und Halbmesser, Fachlängen, Hebelsarme.

f verwandelte Flächen $= \frac{F}{b}$.

$h\ i\ k$ Höhen, Axenentfernungen.

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \pi$ bekannte,

ε Elasticitätscoefficient.

$\varphi\ \psi$ unbekannte Winkel und Verhältnisse.

η Momentenverhältnisse.

τ Tangenten.

ϑ Torsionscoefficient.

ϱ Coefficient der absoluten oder rückwirkenden Festigkeit.

σ Coefficient der scheerenden Festigkeit.

ϖ verticale Belastung pro Flächeneinheit.

Das Einhalten eines solchen bestimmten Systems der Bezeichnung ist deshalb so nützlich, weil ein Blick dann genügt, um die Bedeutung eines Ausdrucks zu erfassen und um die Homogenität desselben zu constatiren. So z. B. die der Körpergleichung:

$$\Im = h\,F = a\,b\,h = h\,r^2\,\pi$$

und der Momentengleichung:

$$\mathfrak{P} = l\,P + {}^1/_2\,p\,l^2 = l\,P + {}^1/_2\,\varpi\,b\,l^2.$$

Heterogene Gleichungen aber giebt es keine in der graphischen Statik, denn man kann keinen Körper einer Linie und kein Moment einem Hebelsarm gleichsetzen, und wenn man dennoch solchen Gleichungen begegnet, so rührt es daher, dass man gewisse Grössen gleich 1 gesetzt hat und es nicht für nothwendig erachtete, diese Einheiten evident zu erhalten.

Doch ist es schwer, ein solches Princip, dessen Nutzen sich im Verlauf der Arbeit aufdrängte, consequent durchzuführen, indem mehr Stufen als wie Schriftgattungen vorhanden sind: so haben wir z. B. für die Trägheitsmomente von Körpern mit 4 Dimensionen keine Schriftgattungen mehr. Auch sollten die *Plücker*'schen Coordinaten als reciproke Längen durch eine Schriftgattung ausgedrückt werden, die unter der griechischen stände. Endlich haben wir es nicht gewagt, die Gleichung der geraden Linie z. B. also zu schreiben:

$$a\,x + b\,y + C = 0,$$

indem die Determinanten, welche mit solchen Coefficienten zu bilden sind, durch zweierlei Schriften an Uebersichtlichkeit verlieren würden.

Schliesslich fühle ich mich noch gedrungen, allen Denjenigen meinen Dank auszusprechen, welche so freundlich waren, an der Ausführung meiner graphischen Statik mitzuwirken, vor Allen dem Verleger, der keine Kosten scheute, um sie schön auszustatten; dann meinen ehemaligen Schülern, denen ich 13 der 17 Tafeln, welche das Werk begleiten, verdanke und deren Namen ich bei der Erläuterung der Tafeln diesen beifügen werde.

Ebenso muss ich auch hier noch der Lithographen Wurster und Randegger erwähnen; die Tafeln wurden schön ausgeführt, und wenn sie nun dennoch keine mathematische Genauigkeit

bieten, so kann man dessen die lithographische Anstalt nicht zeihen. Wir haben uns selbst davon überzeugt, dass es unmöglich ist, von der Zeichnung vollkommen genau auf den Stein zu übertragen und dann auch jede Veränderung der Papierdimensionen zu verhüten. Man betrachte sie daher als Vorlagen, die zeigen sollen, wie etwa in doppeltem Maassstabe construirt werden kann.

Den zweiten Band hoffe ich im Laufe der zwei nächsten Jahre vollenden zu können.

Hottingen bei Zürich, April 1875.

Culmann.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Das graphische Rechnen.

Erstes Kapitel.

Die Operationen mit Linien.

Nr.		Seite
1.	Addition und Subtraction	3
2.	Multiplication und Division von Linien mit Verhältnissen	7
3.	Potenziren	15
4.	Summations- oder Seilpolygone	21
5.	Wurzelausziehen	29

Zweites Kapitel.

Logarithmen und Rechenschieber.

6.	Addition und Subtraction von Zahlen durch Verschieben von Maassstäben	37
7.	Die gewöhnlichen Rechenschieber	40
8.	Ueber den Gebrauch der gewöhnlichen Rechenschieber	48
9.	Verbesserte Rechenschieber	58
10.	Trigonometrische Rechenschieber	60
11.	Rechenschieber für specielle Zwecke	67
12.	Ein englischer Rechenschieber	73
13.	Ueber graphische Darstellungen im Allgemeinen	76
14.	Verwandlung der Gleichungen, die krumme Parallelschnitte geben, in solche mit geraden	82

Drittes Kapitel.

Verwandlung der Flächen.

15.	Verwandlung des Dreiecks	85
16.	Verwandlung des Vierecks	87

Nr. Seite
17. Verwandlung mehr als vierseitiger Polygone 89
18. Parabeltafel für Auf- und Abtragsprofile 91
19. Construction und Benutzung der Parabeltafel 95
20. Die Formeln für Auf- und Abtragsprofile und ihre Darstellung durch gerade Linien 100
21. Verwandlung von Kreisflächen 103
22. Verwandlung eines Gewölbbogens 106
23. Verwandlung von Flächen, die von beliebigen krummen Linien begrenzt sind 108
24. Bestimmung des Inhalts einer von beliebigen Curven begrenzten Fläche durch Addition der Ordinaten 111
25. Maximalflächen bei gegebenem Umfang 114
26. Die Theorie des Planimeters 120
27. Flächenmessung mittelst des Planimeters 127

Viertes Kapitel.

Verwandlung der Körper.

28. Darstellung der Cubikinhalte durch Linien 130
29. Inhalt regelmässiger Auf- und Abtragskörper 131
30. Bestimmung des Inhaltes unregelmässiger Erdkörper nach Guldin's Regel 137
31. Bestimmung des Cubikinhaltes aus Horizontalcurven 139
32. Bestimmung des Cubikinhaltes aus cotirten Plänen 141
33. Das Massennivellement 142
34. Die graphische Massenberechnung 150
35. Zusammenhang der Linien mit Flächen, Körpern, Momenten 152

Zweiter Abschnitt.

Die Zusammensetzung der Kräfte.

Erstes Kapitel.

Zusammensetzung der Kräfte, die auf einen Punkt wirken oder in einer Ebene liegen.

36. Kräfte im Allgemeinen 155
37. Das Parallelogramm der Kräfte 157
38. Zusammensetzung von Kräften, die auf einen Punkt wirken 160
39. Analytische Zusammensetzung der Kräfte im Strahlenbündel 164
40. Gleichgewicht von 4 Kräften im Strahlenbündel 167
41. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in der Ebene 168
42. Seilpolygon oder Drucklinie und Kräftepolygon 169
43. Analytische Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene 170
44. Die Mittelkraft mehrerer aufeinander folgender Kräfte 172
45. Aenderung der Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte . . . 174

Nr. Seite
46. Aenderung einer Kraft im Seilpolygon 175
47. Analytische Zusammensetzung von Kräften im Raume, die durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen 177

Zweites Kapitel.

Das Moment der Kräfte und unendlich ferne Kräfte in der Ebene.

48. Moment von Kräften in der Ebene 181
49. Graphische Bestimmung der Momente 183
50. Unendlich ferne und kleine Kräfte 187
51. Das Maass unendlich kleiner und ferner Kräfte 188
52. Zusammensetzung der unendlich fernen und kleinen Kräfte in der Ebene 190
53. Das Gleichgewicht von Kräften in der Ebene 192
54. Zusammensetzung der Kräfte mit Hülfe der unendlich fernen Kräfte . 194
55. Die Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte 198
56. Die Zerlegung einer Kraft in drei Seitenkräfte 201

Drittes Kapitel.

Die Kräfte im Raum.

57. Allgemeine Zusammensetzung der Kräfte im Raum 210
58. Der Mittelpunkt paralleler Kräfte 211
59. Das Moment paralleler Kräfte bezüglich einer Ebene 214
60. Die Zusammensetzung der durch einen Punkt gehenden und in einer Ebene liegenden Seitenkräfte eines räumlichen Systems . . . 215
61. Die projectivischen Eigenschaften eines Kräftesystems 219
62. Zusammenhang des Kräftesystems mit dem Nullsystem und den Curven dritter Ordnung 227
63. Construction der Ordnungscurve eines Kräftesystems 230
64. Analytische Zusammensetzung der Kräfte im Raum 233
65. Das Nullsystem und conjugirte Linien 237
66. Die Ordnungscurven des Kräftesystems 242
67. Das Kräftepaar 247
68. Zusammensetzung der Kräfte im Raum mit Hülfe der unendlich fernen Ebene 253
69. Die Centralaxe eines Kräftesystems 258
70. Analytische Beziehungen zwischen der unendlich fernen und der endlichen Kraft eines Paares 261
71. Graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum 266
72. Die Zerlegung der Kräfte und das Kräftetetraeder 275
73. Analytische Zerlegung der Kräfte 277

Viertes Kapitel.

Die projectivische Verwandtschaft zwischen dem Kräfte- und dem Seilpolygon.

74. Collineäre und reciproke Beziehungen 280
75. Das Kräfte- und Seilpolygon in Verbindung mit Curven 2. Ordnung . . 287

Nr. Seite
76. Der Mittelpunkt der Curve als Pol der Polygone 292
77. Die Formeln für reciproke Curven zweiter Ordnung 294
78. Ein unendlich ferner Punkt als Pol des einen Polygons 300
79. Der unendlich ferne Punkt einer Parabel als Pol des einen Polygons . 305
80. Der Krümmungshalbmesser der Seilpolygone paralleler Kräfte . . . 309
81. Allgemeine reciproke Beziehungen zwischen dem Seil- und dem Kräftepolygon 313
82. Fachwerke mit constanter, sonst aber beliebiger Belastung 317

Dritter Abschnitt.

Momente paralleler Kräfte.

Erstes Kapitel.

Parallele Kräfte.

83. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte 325
84. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte in der Ebene 327
85. Momente paralleler Kräfte in der Ebene 331
86. Aenderung der Summe und des Momentes (P und $\mathfrak{P}$) der ausserhalb eines festen Querschnittes auf einen Balken wirkenden parallelen Kräfte durch weitere dazu kommende Kräfte 338
87. Analytische Zusammensetzung paralleler Kräfte 342
88. Mitteldruck der Räder eines Locomotivenzuges 346
89. Moment eines Locomotivenzuges in Bezug auf den Querschnitt eines belasteten Balkens 348
90. Ungünstigste Stellung eines Locomotivenzuges auf Balken verschiedener Spannweite 351
91. Analytische Berechnung der Momente paralleler Kräfte 355
92. Vereinigung des Eigengewichtes und der zufälligen Belastungen eines Balkens 363

Zweites Kapitel.

Der Schwerpunkt.

93. Vom Schwerpunkt im Allgemeinen 369
94. Der Schwerpunkt von Linien 372
a) Der Schwerpunkt der geraden Linie 372
b) Der Schwerpunkt einer gebrochenen Linie 372
c) Der Schwerpunkt eines Kreisbogens 373
d) Der Schwerpunkt beliebiger krummen Linien 374
95. Der Schwerpunkt geradlinig begrenzter Figuren 374
a) Der Schwerpunkt eines Dreiecks 374
b) Der Schwerpunkt des Parallelogramms 375
c) Der Schwerpunkt des Paralleltrapezes 376

Nr. Seite

d) Der Schwerpunkt eines unregelmässigen Vierecks 378
e) Der Schwerpunkt mehr als vierseitiger Polygone 379
96. Der Schwerpunkt krummlinig begrenzter Figuren 381
a) Der Schwerpunkt eines Kreissectors 381
b) Der Schwerpunkt eines Kreissegments 381
c) Die Schwerpunkte der Parabelsegmente 382
d) Der Schwerpunkt des Parabeltrapezes 383
e) Der Schwerpunkt unregelmässiger Figuren 385
97. Der Schwerpunkt von Körpern 388
a) Der Schwerpunkt der Polyeder 388
b) Der Schwerpunkt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas 391
c) Der Schwerpunkt unregelmässig begrenzter Körper 392

Drittes Kapitel.

Das Trägheitsmoment.

98. Höhere Momente im Allgemeinen 392
99. Aenderung der Trägheitsmomente in Folge paralleler Verschiebung der Coordinatenebenen 396
100. Die Trägheitsellipse 399
101. Die Centralellipse 403
102. Das Trägheits- und das Centralellipsoid 408
103. System von parallelen Kräften, deren Intensität der Entfernung ihres Angriffspunktes von einer Ebene proportional ist 413
104. Der Kern eines Körpers 415
105. System paralleler an einem ebenen Querschnitt wirkender Kräfte, deren Intensität ihrer Entfernung von einer neutralen Axe proportional ist. Der Kern des Querschnitts 417
106. Die Formeln des Trägheitsellipsoids 420
107. Die Formeln der Trägheitsellipse 427

Viertes Kapitel.

Construction der Centralellipse und des Kerns von ebenen Figuren.

108. Construction der Centralellipse und des Centralellipsoids im Allgemeinen 429
109. Trägheitsmomente von Linien 431
a) Das Trägheitsmoment einer geraden Linie 431
b) Die Trägheitsmomente des Umfangs eines Dreiecks 432
110. Centralellipse und Kern ebener, geradlinigt begrenzter Figuren . . . 438
a) Die Centralellipse und der Kern eines Parallelogramms 438
b) „ „ „ „ „ „ Dreiecks 440
c) „ „ „ „ „ „ Paralleltrapezes 442
d) Berechnung der Polygonmomente 444
111. Centralellipse und Kern parabolischer und elliptischer Figuren . . . 446
a) Centralellipse und Kern eines Parabelsegments 446
b) „ „ „ „ Parabeldreiecks 448

Nr.		Seite
	c) Centralellipse und Kern eines Parabeltrapezes	450
	d) Trägheitsmomente von Ellipsen und Hyperbeln begrenzter Flächen	453
112.	Trägheitsmomente zweier Flächen	459
113.	Das Trägheitsmoment ringförmiger Figuren	462
114.	Das Momentenplanimeter	467
115.	Centralellipse und Kern eines Schienenprofils	475
116.	Centralellipse und Kern eines Winkeleisens	479
117.	Verschiedene Profile mit ihren Centralellipsen und ihren Kernen	482

Fünftes Kapitel.

Trägheitsmomente, Centralellipsoide und Kerne einiger Körper.

118.	Centralellipsoid und Kern eines Prismas und eines Cylinders	488
119.	Die Trägheitsmomente eines Tetraeders	489
120.	Die Momente eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas	495
121.	Die Momente von Pyramiden und Kegeln	497
122.	Die Momente schief abgeschnittener Pyramiden und Kegel	501
	a) Momente der schief abgeschnittenen dreiseitigen Pyramiden	503
	b) Momente schief abgeschnittener Kegel zweiter Ordnung	505
123.	Die Momente einiger Ellipsoide	506

Vierter Abschnitt.

Elemente der Elasticitätstheorie.

Erstes Kapitel.

Kräfte, welche Linien und Flächen proportional sind.

124.	Kräfte, welche Linien proportional sind	513
125.	Grösse und Richtung der in verschiedenen Schnitten wirkenden Kräfte	516
126.	Die Involution der conjugirten Kräfte- und Schnittrichtungen	520
127.	Allgemeine Construction der in jedem Schnitt wirkenden Kraft	524
128.	Formeln für die in Schnitten wirkenden Kräfte	532
129.	Kräfte, welche Flächen proportional sind	535
130.	Construction des Ellipsoids Flächen proportionaler Kräfte	543
131.	Bestimmungsweisen des Systems der Schnitte und Kräfte; Zug- und Druckcurven in Körpern	555
132.	Formeln für die Flächen proportionalen Kräfte	558

Zweites Kapitel.

Die elastische Linie.

133.	Die elastische Linie im Allgemeinen	562
134.	Die Formänderungen welche die, Balkenelemente pressenden und scheerenden Kräfte, hervorbringen	564

Nr. Seite
135. Die Formänderungen, welche die an Balkenschnitten wirkenden Momente hervorbringen 569
136. Summation der von Momenten herrührenden Formänderungen . . . 571

Drittes Kapitel.

Der elastische Bogen.

137. Die Widerlagerreactionen von Bogen 576
138. Kräfteplan eines elastischen Bogens 578
139. Schnittlinie und Umhüllungscurve der Kräfte 588
140. Bogen mit Widerlagerreactionen durch feste Punkte 591
141. Drucklinie eines elastischen Bogens 593

Viertes Kapitel.

Die elastische Parabel bei constantem $\mathfrak{E} = \varepsilon \mathfrak{J} \frac{dx}{ds}$.

142. Allgemeine Formeln für die elastische Parabel bei constantem $\mathfrak{E}$ . . 598
143. Mit ΔP belasteter Parabelbogen bei festem Auflager 602
144. Mit p gleichförmig belasteter Parabelbogen bei festem Auflager . . 607
145. Graphisches Auftragen berechneter Kräfte 618
146. Mit ΔP belasteter Parabelbogen mit Reactionen durch feste Punkte . 622
147. Mit p gleichförmig belasteter Parabelbogen bei Reactionen durch feste Punkte 624

Fünftes Kapitel.

Der gerade elastische Balken.

148. Der gerade elastische Balken im Allgemeinen 627
149. Der an einem Ende eingemauerte Balken 629
150. Auf zwei Stützen frei aufliegender und überhängender Balken . . . 631
151. An einem Ende eingemauerter, am andern frei aufliegender und überhängender Balken 633
152. An beiden Enden eingemauerter Balken 635

Erklärung der Tafeln.

Im Text ist die Nummer der Figur einer Tafel als Index den **Taf.**-Nummern beigefügt, zum Unterschied von den im Text enthaltenen **Fig.**-Nummern.

In den folgenden Erklärungen sind alle in den Tafeln enthaltenen Worte durch grössere Schrift ausgezeichnet.

Taf. 1.

Potenziren und Wurzelausziehen.

Figur		Nr.	Seite
1	Brigg'sche Logarithmen. Logarithmische Spirale, deren Radienvectoren in den Entfernungen 1, 10, 100 geschnitten werden und die daher den Dekadischen (Brigg'schen) Logarithmen entspricht	5	29
2	Logarithmische Selbstevolute	5	34
	Anwendungen Seite 18 und	5	35

Taf. 2.

Rechenquadrate.

(Tetmayer.)

1	Multiplicationstafel und Divisionstafel mit der Diagonalen zur Berechnung der Quadrate, einer Parallelen zu ihr durch π zur Berechnung von $n\pi$ und $n^2\pi$	13	78
	Dann einer aufsteigenden Linie mit dem Tangentenverhältniss 2, zur Berechnung der Quadrate und Cubus; und einer Parallelen zu ihr durch $\frac{4}{3}\pi$ zur Berechnung des Kugeleninhalts $\frac{4}{3}r^3\pi$	13	80
	Logarithmische Maassstäbe für Sin. und Cos, Tang. und Cotg., und für verschiedene Coefficienten	13	80
2	Tafel der Producte a^2b und $a\sqrt{b}$ mit schiefen Linien des Tangentenverhältnisses $-\frac{1}{2}$	13	80

Figur		Nr.	Seite
3	Flächentafel für Auf- und Abträge nach Lalanne's Methode. Die Gleichung: $F = \frac{1}{2} h^2 \cdot \frac{1}{\alpha - \varepsilon}$ ist durch einen Büschel gerader Linien dargestellt . .	20	101

Taf. 3.

Summationspolygone und Verwandlung der Flächen.

1	Summationspolygone	4	21
	Analogie mit dem Seilpolygon	85	331
2 3 4 5	Verwandlung von Bahnprofilen.		
2 3	Einfache Flächenverwandlung von Auf- und Abtragsprofilen .	17	90
4	Construction von Flächentafeln	18	94
5	Anwendungen der Flächentafel	19	98
6 7	Verwandlung von Gewölbebogen	22	106

Taf. 4.

Parabeltafel.

(Bessard.)

	Zur Bestimmung des Inhaltes von Bahnprofilen beliebiger Gelände- und Böschungsneigungen	19	95

Taf. 5.

Inhalt von Bahnkörpern und Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene.

(Bessard.)

1	Ein Abtragskörper	29	131
2 3	Ein Wegübergang, Ermittelung seiner Erdmassen als Beispiel für Guldins Regel	30	138
4 5 6 7	Kräfte- und Seilpolygon.		
4	Seil- und		
5	Kräftepolygon im Allgemeinen	42	169
	Unendlich ferne Kräfte	52	190
	Ihre Zusammensetzung	52	191
6 7	Kräfte- und Seilpolygon mit einer veränderten Kraft . . .	46	175

Taf. 6.

Massen- und Transportprofile.

1	Längenprofile mit den Transportsectionen	33	145
	und der graphischen Massenberechnung	34	151
2	Das Massennivellement	33	143

Figur		Nr.	Seite
3	Situationsplan einer Füllgrube mit eingezeichneten Entfernungen	33	146
4	Verwandlung der Querprofile	34	151

Taf. 7.

Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

	Reductionen der Momentenflächen	49	186
	Zusammensetzung der Kräfte mittelst ihrer Projectionen .	71	268
	Bestimmung der Centralaxe. Conjugirte Punkte, Ebenen, Linien	71	273

Taf. 8.

Projectivische Verwandtschaft des Seil- und des Kräftepolygons.

(Roner.)

	Allgemeine Beziehungen	74	281
	Das Kräfte- und das Seilpolygon in Verbindung mit Curven zweiter Ordnung	75	287
1 2	Hyperbel als Kräfte, Hyperbel als Seilpolygon	„	289
1 4	„ „ „ Parabel „ „	„	290
1 3	„ „ „ Ellipse „ „	„	291
5 3	Ellipse „ „ Ellipse „ „	„	291
6 4	Parabel „ „ Parabel „ „	„	291

Taf. 9.

Drucklinien und Belastungscurven.

(Seestern Pauli.)

1	Belastungscurven eines elliptischen Gewölbes, Construction von Belastungshöhen, welche eine elliptische Drucklinie erzeugen	78	304
2	Evolute der Drucklinie eines Gewölbes, das oben von einer Horizontalen, unten von einem Halbkreis begrenzt ist	80	311

Taf. 10.

Reciproke Kräftepläne nach Cremona.

(Tetmayer.)

	Anwendung auf verschiedene Fachwerke bei fest belasteten Knotenpunkten.		
1 2	Fachwerk im Allgemeinen	82	318
3 4	Paulische Träger	„	321

Figur		Nr.	Seite
5 6	Hängwerk	82	321
7 8	Versteifte Kette	82	322
9 10	Kranoid	„	„

Taf. 11.

Belastung durch einen Zug von Locomotiven.

(Tetmayer.)

1 2	Durch Engerth'sche Locomotiven	89	348
3	Durch eine Personenzug-Locomotive . . . . . Seil- und Kräftepolygon.	„	„
4	Zusammenstellung von berechneten Curven der Maximalmomente	91	356

Taf. 12.

Kräfte im Innern einer belasteten Schiene.

(Tetmayer.)

1	Bestimmung ihres Schwerpunktes	96	386
	Centralellipse und Kern eines Schienenprofils . . . . . Construction der in der Schiene wirkenden scheerenden Kräfte. Zusammensetzung aller Kräfte, welche in ihrem Innern wirken.	115	475
2	Construction der Trägheitsellipse Taf. 13 mittelst zweier Paare paralleler Tangenten und dem Centrifugalmoment, in Bezug auf die parallelen Durchmesser	116	481

Taf. 13.

Trägheitsmoment und Centralkern eines Winkeleisens.

(Valat.)

	Construction der Centralellipse und des Kerns eines Winkeleisens	116	479
	Zahlenwerthe der Momente von Taf. 12 und 13	117	485

Taf. 14.

Centralellipsen und Kerne einiger Eisenprofile.

(Roner.)

1	Doppel *T* Schiene	117	482
2	*Z* Eisen	„	„
3	*T* Eisen mit verstärktem Kopf	„	„
4	*T* Eisen	„	„
5	*U* Eisen	„	„
6	Zorès Eisen	„	483

Figur		Nr.	Seite
7	Americanische Flachschiene	117	485
8	Kreuz Eisen	„	485
	Zahlenwerthe der Inhalte und Momente nebst Vergleichung derselben	„	485

Taf. 15.

Das Ellipsoid Flächen proportionaler Kräfte.

	Construction der auf die Bildebene wirkenden Kraft . . .	130	543
	„ des Ordnungskegels	„	545
	„ der Axen des Systems	„	546
	„ verschiedener Ellipsen des Ellipsoids der Kräfte	„	547
	„ des Schnittes der Bildebene mit dem Ellipsoid .	„	552
	„ des Schnittes des Ordnungskegels mit dem Ellipsoid	„	„

Taf. 16.

Der elastische Bogen mit veränderlichem Querschnitt.

(Valat.)

1	Der Bogen, mit der	138	579
	Elasticitätsellipse und dem Fundamentaldreieck	„	581
	Bestimmung der A und ΔA aus den u', u'' und ΔP . . .	„	584
	Ausführung der Constructionen auf dem halben Blatt . . .	„	587
	Die Schnitt- und Umhüllungslinie der Kräfte	139	589
	Die ungünstigsten Belastungsarten	„	„
	Das Seilpolygon der Widerlagerreactionen	„	590
	Die Ausdehnung durch die Wärme	„	591
2	Summationspolygon der $\Delta x : z''' \sigma$	138	579
3 4 5 6 7	„ „ verschiedenen Momente derselben .	„	581
	Bestimmung des Fundamentaldreiecks	„	582

Taf. 17.

Die elastische Linie gerader Balken.

(Ritter.)

1	Der an einem Ende eingemauerte Balken	149	630
2	Auf zwei Stützen aufliegender und überhängender Balken .	150	632
3	An einem Ende eingemauerter, am andern frei aufliegender und überhängender Balken	151	634
4	An beiden Enden eingemauerter Balken	152	636

Berichtigungen.

Seite 18 Fig. 22 unten lies p_{i-4} statt p_{i-8}.

„ 19 Zeile 8 lies + 1 und — 1 statt — 1 und + 1.

„ 19 „ 12 lies $x < -1$ und $+1 < x$ statt $-1, x <$ und $1 < x$.

„ 26 „ 20 lies $y_0 + (x_n - x_0)\, r_{01}$ statt $y_0 + x_n\, r_{01}$.

„ 27 „ 10 lies Taf. 3_1 statt Taf. 2_1.

„ 28 „ 4 lies Taf. 3_1 statt Taf. 2_1.

„ 34 „ 12 lies SR statt SO.

„ 89 „ 10 lies Fig. 47 statt 48.

„ 104 Fig. 58 C fehlt rechts oben am Ende der Strecke 7.

„ 106 „ 59 T fehlt im Berührungspunkt der Tangente.

„ 108 „ 61 lies f statt h.

„ 122 „ 73 C fehlt am Ende der Linie PA.

„ 203 „ 112 S fehlt auf der Strebe.

„ 283 Zeile 5, 7, 14 lies O_s statt O_3.

„ 329 „ 13 lies 145 statt 144.

ERSTER ABSCHNITT.

DAS GRAPHISCHE RECHNEN.

Erstes Kapitel.

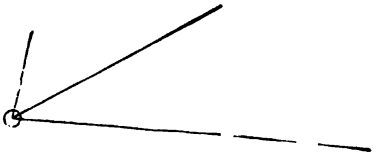
Die Operationen mit Linien.

1. Addition und Subtraction.

Bei dem Addiren und Subtrahiren haben wir es im graphischen Rechnen nur mit geraden Linien zu thun. Zu addirende oder zu subtrahirende Flächen, Körper, Gewichte, Kräfte u. s. w., müssen erst auf gerade Linien reducirt, d. h. durch solche dargestellt werden, bevor wir diese Operation mit ihnen vornehmen können. Auf die Art und Weise, wie diese Reductionen auszuführen sind, werden wir später zurückkommen, und setzen jetzt voraus, dass wir es nur mit den Resultaten dieser Reductionen, mit Linien, zu thun haben.

Die zusammenzusetzenden geraden Linien müssen durch ihre absolute Länge und durch ihre Richtung gegeben sein. Durch die Lage einer geraden Linie allein ist die Richtung derselben noch nicht vollkommen bestimmt, weil in jeder ihrer Lagen zwei um π von einander verschiedene Richtungen, die einander entgegengesetzte heissen, enthalten sind. Gehen mehrere Linien von einem und demselben Punkt (Fig. 1) als Ursprung aus, so genügt es zur genauen Bezeichnung der Richtung die Linien nur auf einer Seite des Ursprungs auszuziehen. Ueberhaupt wird in jeder begrenzten Linie durch Bezeichnung des einen Endes als Ursprung ○ auch die Richtung der Geraden

Fig. 1.



bezeichnet, so hätten z. B. die beiden gleich langen Linien (Fig. 2) entgegengesetzte Richtungen. Zur Bezeichnung der Richtung in einer unbegrenzten Linie oder mehrerer Linien, welche gleiche Lage haben, und überhaupt in allen Fällen, in denen die Bezeichnung des Ursprungs zur unzweideutigen Bezeichnung der Richtung nicht genügt, werden wir uns eines Pfeiles ← zur Feststellung derselben bedienen. In der Geraden A (Fig. 3) haben also die beiden

Fig. 2.

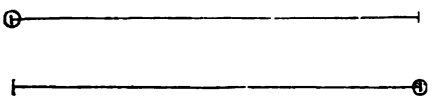
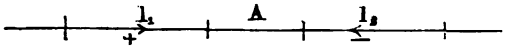


Fig. 3.



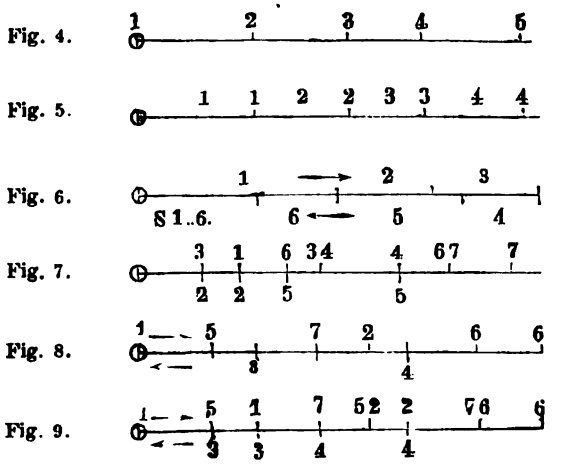
gleich langen Linien l_1 und l_2 entgegengesetzte, d. h. um π verschiedene Richtungen. Zur Unterscheidung der beiden in einer und derselben geraden Linie vorkommenden Richtungen gebraucht man häufig auch das Wort Sinn, und sagt z. B., die beiden Linien l_1 und l_2 in A haben entgegengesetzten Sinn, oder sind in entgegengesetztem Sinn aufzutragen. In einer und derselben geraden Linie entsprechen die beiden Sinne ganz dem Vorzeichen + und — in der Analysis, und auch wir werden uns manchmal dieser Vorzeichen zur Unterscheidung der beiden Sinne bedienen, ist also l_1 im Sinne + aufgetragen, so ist es l_2 im Sinne —.

Die graphische Addition besteht nun darin, dass man von einem Ursprung ausgehend die erste der zu addirenden Linien in Richtung und Grösse aufträgt, von dem Endpunkt derselben die zweite Linie und von dem Endpunkt dieser die dritte und so fort alle zu addirenden Linien an einander reiht. Als Resultat dieser Aneinanderreihung, Addition, muss in Richtung und Grösse die Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der letzten der zu addirenden Linien betrachtet werden.

Bei der Zusammensetzung der Kräfte werden wir sehen, dass diese Addition identisch ist mit der Addition der Linien, und wollen diese des Zusammenhanges wegen daher dort ausführlicher behandeln.

Hier wollen wir noch einige Worte über die Addition von Linien gleicher Richtung sagen. Es fällt dann der ganze Linien-

zug in eine gerade Linie, weil alle Richtungen einen ∞ fernen Punkt gemein haben, in diesem Falle wird, wenn Linien von verschiedenem Sinne vorhanden sind, mitunter die Bezeichnung derselben etwas schwierig. Es ist dies zwar nur eine Nebensache, immerhin aber namentlich für Anfänger wichtig genug, um einige Augenblicke dabei zu verweilen. Eine gerade Linie kann als Punktreihe und als Trägerin von Strecken erscheinen. Im ersten Fall bietet die Bezeichnung gar keine Schwierigkeiten dar; sie ist unzweideutig, wenn zu jedem Punkt ein Zeichen gesetzt wird (Fig. 4). Ist aber die gerade Linie, wie es hier bei der Addition der Linien der Fall ist, die Trägerin von an einander gereihten Strecken, dann ist es nicht zweckmässig, den Trennungspunkten



der Strecken Zeichen zu geben und so eine und dieselbe Linie durch zwei nicht mit ihr im Zusammenhang stehende und nicht an sie erinnernde Zeichen zu bezeichnen. Im Interesse der Klarheit und des leichteren Ueberblicks soll jede Strecke ihr Zeichen tragen, die Linie l_i, die Kraft P_i, das Zeichen i.

Haben alle Strecken gleichen Sinn, so kann man einfach das Zeichen auf die Strecke setzen (Fig. 5). Dasselbe ist auch noch möglich, wenn zwar Linien beider Sinne vorkommen, alle Linien gleichen Sinnes jedoch auf einander folgen, so dass nur ein Wendepunkt vorkommt (Fig. 6), der Wendepunkt liegt zwischen 3 und 4, und die Summe der 6 Linien ist durch $s_{1\ldots6}$ bezeichnet. Man

hat dann nur dem einen Sinn die eine Seite und dem andern Sinn die andere Seite der geraden Linien zuzuweisen.

Liegen die Strecken beider Sinne durch einander, so ist es am zweckmässigsten, den Grenzen jeder Strecke zwei gleiche Zeichen zu geben und alle Zeichen gleichen Sinnes auf dieselbe Seite der geraden Linie zu setzen (s. Fig. 7), wie es durch die Pfeile (Fig. 6) angedeutet ist.

Gar häufig kommt man in Versuchung, in jedem der Fälle 5 und 6 die Punkte zu bezeichnen, dies genügt jedoch nur dann, wenn erstens die Reihenfolge der Strecken und zweitens die Grenze bekannt ist, an der das Zeichen steht. Letzteres könnte wohl dadurch ein für allemal bestimmt werden, dass man das Zeichen an das eine Ende der Strecke setzt, die Ordnung aber geht nicht aus der Figur hervor und muss besonders bemerkt werden.

In Fig. 8 z. B., wo das Zeichen an den Anfang seiner Strecke gesetzt wurde, deutet nichts die Reihenfolge 1 3 5 2 4 7 6 an, und die Länge keiner Strecke ist bestimmt, während aus Fig. 9 ganz unzweideutig hervorgeht, dass auf 1, 3 und auf 3, 5 folgt u. s. w.

Da nun Anfänger in ihren Constructionen gar häufig dadurch fehlen, dass sie immer nur Punkte bezeichnen wollen, und dann die zu beiden Seiten des Zeichens liegenden Strecken mit einander verwechseln, so können wir nicht genug empfehlen, die Strecken eines geraden Gebildes nöthigenfalls mit zwei Zeichen zu bezeichnen, wenn das Gebilde durch seine Strecken, die Punkte aber zu bezeichnen, wenn es durch seine einzelnen Punkte gegeben ist.

Mitunter kommt es vor, dass eine und dieselbe gerade Linie die Trägerin mehrerer Gebilde ist, siehe z. B. die später folgenden Tafeln des continuirlichen Balkens, wo nicht allein die an den Balken wirkenden Lasten auf einer Linie aufgetragen wurden, sondern wo man die scherenden Kräfte schliesslich auf derselben geraden Linie erhalten hat. In solchen Fällen ist es am klarsten, so wie es dort geschehen ist, die verschiedenen Gebilde dadurch auszuzeichnen, dass man deren Zeichen auf verschiedene Parallellinien zum gemeinschaftlichen Träger setzt und die entsprechenden Theilstriche bis zu diesen Parallelen verlängert. Es geschieht dasselbe, wenn bei Maassstäben die mehr oder weniger bedeutenden Theilpunkte durch längere oder kürzere Striche ausgezeichnet werden. Subtraction

ist Addition in entgegengesetztem Sinne. Um also eine oder mehrere Linien von einer anderen Linie oder von der Summe mehrerer anderer Linien abzuziehen, hat man nur den Pfeil dieser Linien umzusetzen und dann zu addiren.

Alles, was wir hier von der Addition und Subtraction von Linien in gleicher Richtung und Lage gesagt haben, gilt auch von der Addition und Subtraction von Kreisbogenstücken gleichen Radius auf denselben Bogen, also von Winkeln in der Ebene. Dagegen ist das weiter oben von der Addition im Raum oder in der Ebene Gesagte nicht mehr anwendbar auf die Addition von grössten Kreisen auf der Kugel, also auf Drehungen im Raum; weil zwei grösste Kreise, welche gleichen Winkel mit einem dritten bilden, nicht mehr parallel laufen, und weil es überhaupt gar keine parallele grössten Kreise auf der Kugel giebt, und weil daher parallel mit sich selbst ausgeführte Zugverschiebungen auf der Kugel gar nicht mehr möglich sind.

Die Addition und Subtraction von Strecken (mögen sie Linien oder Kräfte bezeichnen) finden ihren analytischen Ausdruck einfach in der Summenformel:

$$s_{1\ldots n} = l_1 + l_2 + \ldots l_i + \ldots l_n = \sum_1^n l_i \ ,$$

oder auch:

$$P_{1\ldots n} = P_1 + P_2 + \ldots P_i + \ldots P_n = \sum_1^n P_i.$$

Auch hier wird die Subtraction durch Zeichenwechsel ausgedrückt:

$$\begin{aligned} d &= l_1 + l_2 + l_3 + \ldots - (l_i - l_{i+1}), \\ &= l_1 + l_2 + l_3 + \ldots - l_i + l_{i+1}. \end{aligned}$$

2. Multiplication und Division von Linien mit Verhältnissen.

Man unterscheidet zweierlei Multiplicationen und Divisionen, erstens die von Linien mit Verhältnissen, bei denen das Resultat immer wieder eine Linie ist und bei der daher keine Aenderung der räumlichen Dimensionenzahl, der Stufe stattfindet; und zweitens die Multiplication von Linien mit Linien zu Flächen, von Flächen mit Linien zu Körpern etc. und umgekehrt die Division von Körpern durch Linien zu Flächen u. s. w., bei denen eine Aenderung in der räumlichen Dimensionenzahl stattfindet. Diese letzteren, d. h. die Verwandlung und das Messen von Flächen und

Körpern werden in den folgenden Kapiteln behandelt werden, während wir uns hier vorerst nur mit der ersteren, also mit der Multiplication und Division von Linien mit Verhältnissen beschäftigen.

In manchen Werken wird der Fall behandelt, in welchem dieses Verhältniss durch Zahlen gegeben ist, und es heisst da, um eine Linie mit 12...n zu multipliciren, trage man sie 12...n Mal hinter einander auf einer Geraden auf. So einfach dieses Verfahren ist, so entspricht es doch nicht ganz dem Geiste des graphischen Rechnens. Durch Construiren können wir nur zu Linien, nie zu Zahlen gelangen, und die Construction beginnt erst da, wo Linien, nicht Zahlen gegeben sind. Dieses $n$malige Auftragen einer Linie gehört daher noch zur Uebersetzung des Gegebenen in eine Linie, ebenso wie das Abgreifen und Messen der letzten Linie zur Uebersetzung der Schlusslinie in das Resultat gehört. Wir werden daher immer annehmen: das als Factor zu betrachtende Verhältniss sei durch zwei Linien m und n gegeben.

Das einfachste Mittel zur Multiplication einer Linie l mit einem Verhältniss $\frac{m}{n}$ also zur Bestimmung von $x = l\frac{m}{n}$ bieten ähnliche Dreiecke. Sie können beliebige Lage und eine beliebige dritte Seite haben. Die drei gegebenen Linien l, m und n sind dann so zu gruppiren, dass die zu multiplicirenden beiden Linien l und m weder demselben Dreieck angehören, noch homologe Seiten der beiden verschiedenen Dreiecke seien. Findet sich in der Constructionsfigur gerade keine andere passende Lage der beiden Dreiecke, so wird es immer am einfachsten sein, die beiden Dreiecke durch Ziehen zweier Parallelen in einem und demselben Winkel zu bilden, wo dann die beiden in Fig. 10 und Fig. 11 dargestellten Anordnungen möglich sind. Alle Linien sind von O aus aufgetragen, m darf also weder auf demselben Schenkel aufgetragen noch durch eine der Parallelen mit l verbunden werden; je nachdem man dann n auf demselben (Fig. 10) oder nicht auf demselben (Fig. 11) Schenkel aufträgt, erhält man x nicht auf demselben oder auf demselben Schenkel. In Fig. 10 werden ferner nicht nur die ganzen von O aus aufgetragenen, sondern alle zwischen Parallelen zu mn liegende Strecken, wie z. B. $l - n$ im Verhältniss von m zu n reducirt, und wir wollen dies durch die Worte ausdrücken, zwischen den beiden Schenkeln

projicire die Richtung mn das Verhältniss $\frac{m}{n}$. In Fig. 11 endlich bestimmen nicht nur alle Parallelen, welche durch die Endpunkte von m und n gehen, auf dem anderen Schenkel Längen, die sich wie m zu n verhalten, sondern die Parallelen selbst verhalten sich auch wie m zu n und man hat $x_1 = l_1 \frac{m}{n}$.

Fig. 10.

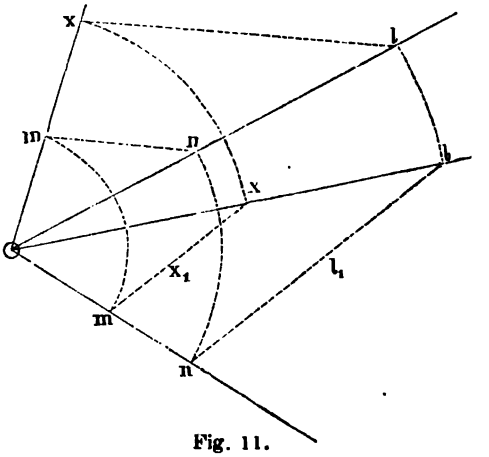


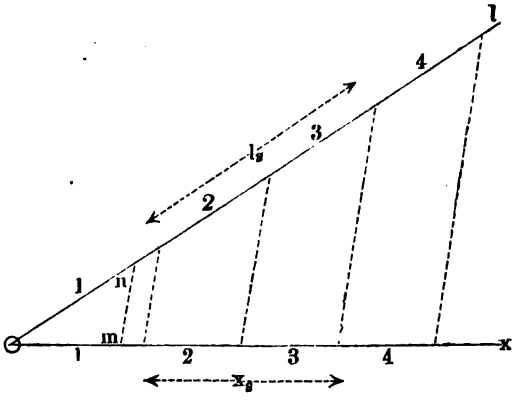
Fig. 11.

Beispiel: Welches ist die Höhe des Steinprismas, dessen Gewicht gerade so gross wäre, als das des Erdprismas von gleicher Grundfläche und der Höhe h. Die specifischen Gewichte von Erde und Stein verhalten sich wie die Linien $m : n$. Die Höhe des Steinprismas muss im Verhältniss des specifischen Gewichts von Erde zu Stein reducirt, d. h. mit diesem Verhältniss multiplicirt werden, es ist also $x = h \frac{m}{n}$.

Die obigen Figuren 10 und 11 enthalten die Lösung, wenn man in denselben statt l, h setzt.

Sind mehrere Strecken l_2 l_3 l_4 desselben geraden Gebildes mit demselben constanten Verhältniss zu multipliciren, so kann die Fig. 10 analoge Construction Fig. 12 oder die Fig. 11 analoge Fig. 13 (s. S. 10) gewählt werden.

Fig. 12.



Die Analogien liegen so nahe, dass wir uns nicht mit Nachweis derselben aufzuhalten brauchen.

Fig. 13.

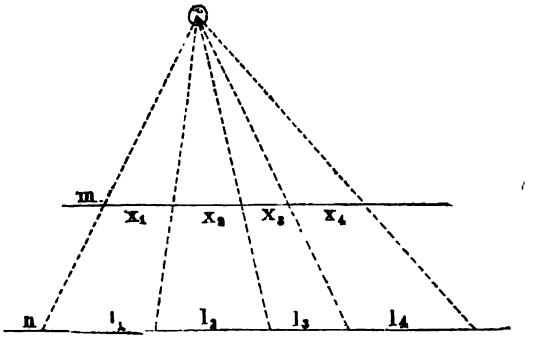
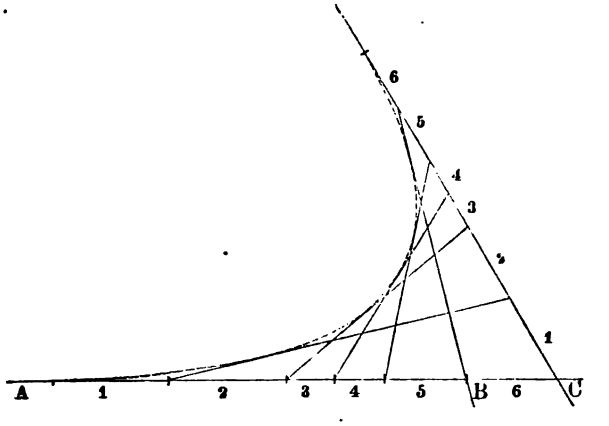


Fig. 14.

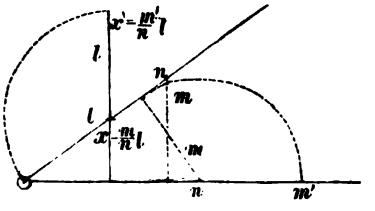


Alle obigen Constructionen erheischen das Ziehen von Parallelen. Indem man sich nun das Entbehren des Ziehens von Parallelen zur erschwerenden Bedingung gab, wurde vorgeschlagen, die Parabel als Mittel zur Multiplication mit constantem Verhältniss zu benutzen. Die geraden Gebilde, welche durch die gegenseitigen Durchschnittspunkte der Tangenten einer Parabel entstehen, sind alle in der Art ähnlich, dass sich die durch dieselben Tangenten begrenzten Segmente entsprechen, wobei der Berührungspunkt einer Tangente als Schnitt mit ihr selbst zu

betrachten ist. So entsprechen sich (Fig. 14) die gleichbezifferten Segmente der drei geraden Gebilde *A B C*. Wäre nun eines derselben *B* (12 3 4 5) und die es berührende Parabel gegeben, und sollten die einzelnen Segmente desselben mit dem Verhältniss $1\,C : 1\,B$ multiplicirt werden, so könnte man durch alle seine Punkte Tangenten an die Parabel ziehen und dann die Gerade *C* so an der Parabel tangirend verschieben, dass die Endpunkte von $1\,C$ auf *A* und die Tangente 12 fallen, so wird *C* (1 2 3 4 5) dem Gebilde *B* (1 2 3 4 5) ähnlich sein. Statt der Parabel kann auch noch ein zweites ähnliches Gebilde *A* gegeben sein, weil dann alle Geraden, welche homologe Punkte verbinden, eine und dieselbe Parabel berühren. Die Lage von *C* muss dann natürlich auch immer so bestimmt werden, dass diese Linie durch homologe Punkte von *A* und *B* gehe. Also $6\,A$ und $6\,B$ müssen sich entsprechen. Diese allgemeine Construction vereinfacht sich etwas, wenn alle Segmente gleich gross sind, weil dann einfach die Abschnitte 6 auf *A* und B irgend einem anderen Segment dieser Linien gleich zu machen sind. Immerhin ist diese Multiplication viel umständlicher als die der Fig. 10 bis 13 und wir erwähnten derselben nur der Vollständigkeit wegen, ohne auf weitere Spielereien, die mit der Parabel ausgeführt werden können, einzugehen.

Vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet sind die bis jetzt angeführten Methoden alle gleich gut; für die Praxis aber ist ganz besonders die Anordnung Fig. 15 zu empfehlen, weil bei derselben die Linien n und x nicht gezogen zu werden brauchen, sondern ihre Länge direkt mit dem Zirkel abgegriffen werden kann; und die Operationen, welche mit den Zirkelspitzen allein ausgeführt werden können, sind bei weitem die genauesten. Um $x = l\,\frac{m}{n}$ zu construiren, beschreibe man vom Endpunkte von n aus mit dem Radius m einen Bogen, an den man von ○ aus eine Tangente zieht, wobei es, wie die Figur zeigt, ganz einerlei ist, von welchem der beiden Schenkel des Winkels man ausgeht. Die Entfernung des Endpunktes der Länge l von dieser Tangente ist dann das gesuchte x, und diese Entfernung

Fig. 15.



kann direct mittelst des Zirkels abgegriffen werden, ohne dass es nöthig ist, die Linie zu ziehen.

Diese Anordnung ist namentlich dann zu empfehlen, wenn viele l mit dem Verhältniss $\frac{m}{n}$ zu multipliciren sind, man nimmt l in Zirkel, trägt es von ○ aus auf und misst direct x ab.

Setzt man $n = 1$, so wird m gleich dem Sinus des Winkels bei ○. Es eignet sich also das Sinusverhältniss praktisch besser zu Reductionen, als wie das allgemein übliche Tangentenverhältniss.

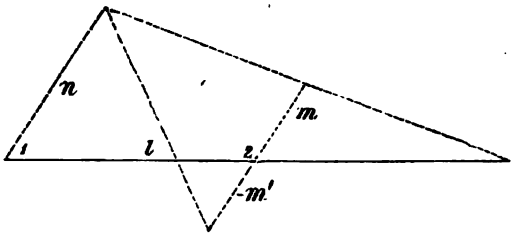
Bei obiger Construction wurde vorausgesetzt, es sei n grösser als m; ist aber das Umgekehrte der Fall, so kann man sich auf zweierlei Weise helfen. Ist es einerlei, wo und in welcher Lage man x erhalte, so vertausche man einfach m mit n, und x mit l; man sucht, wenn der Winkel ○ so construirt ist, dass sein sin $= \frac{n}{m}$ ist, mit der Zirkelöffnung l denjenigen Punkt des einen Schenkels, dessen senkrechte Entfernung vom anderen gleich dieser Länge ist; die Entfernung dieses Punktes von ○ ist dann die gesuchte Länge x. Soll aber das $x' = \frac{m'}{n} l$ in der gleichen Lage als wie in Fig. 15 erhalten werden, so construire man den Winkel ○ mit dem Sinusverhältniss $\frac{m}{n} = \frac{m' - kn}{n}$, wo k eine ganze Zahl ist, so beschaffen, dass $m < n$ wird, und die man einfach dadurch erhält, dass man n so oft, als es mit positivem Rest möglich ist, von m' abzieht. Dann hat man l, wegen $x' = \frac{m'}{n} l = \frac{m}{n} l + kl$, zur gefundenen Länge $\frac{m}{n} l$, k Mal zu addiren; was nach Fig. 15 auf der Ordinate selbst geschehen kann, wo die Operation für $k = 1$, also $\frac{m'}{n} = \frac{m+n}{n}$ durchgeführt ist.

Die Division ist identisch mit der Multiplication, wenn man Nenner und Zähler des Divisorverhältnisses mit einander vertauscht. Ausserdem gebraucht man noch häufig das Wort Division statt Multiplication, wenn in den Fig. 12, 13 und 14 nicht einzelne Segmente, sondern die ganze Länge der einen Linie gegeben ist, und es sich darum handelt, sie so einzutheilen, dass ihre einzelnen Segmente denen einer anderen gegebenen Linie ähnlich seien. Die Totallängen der beiden gegebenen Linien vertreten die Stelle von m und n. In Fig. 12 ist dann die äusserste

Parallele durch die Endpunkte der gegebenen Linien gegeben, und in Fig. 13 erhält man das Projektionscentrum O durch Verlängerung der beiden Linien, welche die Endpunkte der gegebenen und parallel gelegten Linien mit einander verbinden.

Wenn bei dieser Division die Länge l nur in zwei Theile zu theilen ist, die sich wie $\frac{-m}{+n}$ oder wie $\frac{m'}{n}$ verhalten sollen, so ist es am einfachsten, die Linien m m' und n, durch welche diese Verhältnisse gegeben sind, auf zwei Parallelen durch die Endpunkte von l aufzutragen, s. Fig. 16, dann schneidet die Verbindungslinie auf l den Theilpunkt aus, was keines weiteren Beweises mehr bedarf.

Fig. 16.



Soll die Construction genau sein, so darf die Verbindungslinie der auf den Parallelen liegenden Punkte die Linie l nicht unter einem zu spitzen Winkel schneiden. Dieser Winkel ist ein Maximum, wenn die Längen m und n senkreckt auf der Verbindungslinie stehen, d. h. wenn sie die mit den Radien m und n von den Endpunkten von l aus beschriebenen Kreise berührt. Ist der Winkel immer noch zu spitz, so trage man m und n mehrere Mal auf den Parallelen auf.

In Obigem ist die Construction der durch die Gleichungen $mx_1 - nx_2 = 0$ oder $mx_1 + nx_2 = 0$ gegebenen Punkte enthalten, und es könnten jetzt hier alle jene Constructionen angereiht werden, die nothwendig sind, um von den Methoden der analytischen Geometrie zu den constructiven Methoden überzugehen, die aber in den Lehrbüchern über analytische Geometrie wohl etwas ausführlicher behandelt sein sollten. Ferner gehören hierher die Constructionen, welche sich auf die harmonische und involutorische Lage von Punkten und Linien beziehen. Wir können auf diese ganz der Geometrie der Lage angehörenden Constructionen ebenfalls hier nicht näher eintreten, sondern nur nebenbei bemerken, dass, wenn man in Fig. 16 $m' = -m$ setzt, man eine der einfachsten Constructionen harmonisch gelegener Punkte und Strahlen erhält.

1. Beispiel: Es ist $F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}$ zu construiren. Bringt man diese Gleichung auf die Form $\frac{2}{F} = \frac{2}{F_1} + \frac{2}{F_2}$, so sieht man, dass, wenn von einem Punkt O aus $\frac{1}{2} F_1$ und $\frac{1}{2} F_2$ aufgetragen werden, F die Entfernung desjenigen Punktes sei, welcher mit O jene zwei Entfernungen harmonisch theilt. Fig. 17 giebt die Lösung. Mit schwächeren Linien ist noch die Lösung mittelst eines Kreisbogens angedeutet. Fig. 18 giebt aber eine noch einfachere Lösung.

Fig. 17.

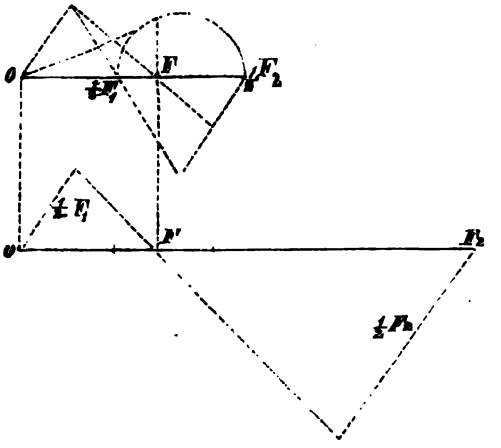


Fig. 18.

Dieses Beispiel findet Anwendung bei der Bestimmung des Trägheitsmoments zweier Flächen.

2. Beispiel: Es ist der Flächeninhalt F eines Dreiecks so durch eine Linie f auszudrücken, dass f multiplicirt mit einer für alle zu vergleichenden Flächen constante Basis b gleich F sei, mit anderen Worten, es ist die Fläche F auf die Basis b zu reduciren.

Ist a die Basis, h die Höhe des Dreiecks, so hat man zu bilden:

$$f = \frac{F}{b} = a \cdot \frac{h}{2b} = h \cdot \frac{a}{2b}.$$

Diese zwei Multiplicationen sind in Fig. 19 und 20 ausgeführt. Nachdem in Fig. 19 $OC = 2b$ aufgetragen und in Fig. 20 der Punkt D so bestimmt wurde, dass er um $2b$ über AO liegt, sind in beiden Figuren durch Ziehen der Parallelen AD und BC ähnliche Dreiecke ADO und CBO gebildet worden, von denen die Höhen homologe Längen sind. Man hat daher in beiden

$$\frac{f}{h} = \frac{a}{2b},$$

wo a und h weder demselben der ähnlichen Dreiecke angehören, noch homologe Seiten der beiden verschiedenen Dreiecke sein dürfen.

Fig. 19.

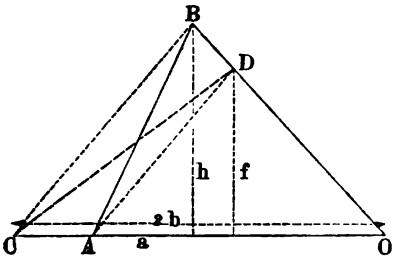
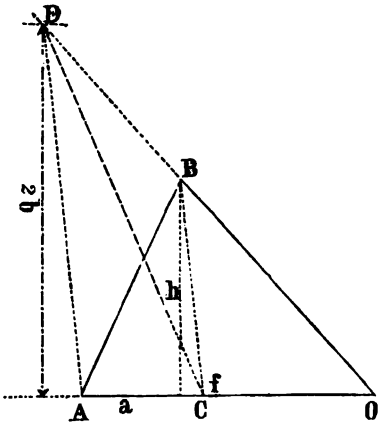


Fig. 20.



3. Potenziren.

Unter Potenziren versteht man das wiederholte Multipliciren einer Linie mit demselben Verhältniss, also die Bildung der Werthe

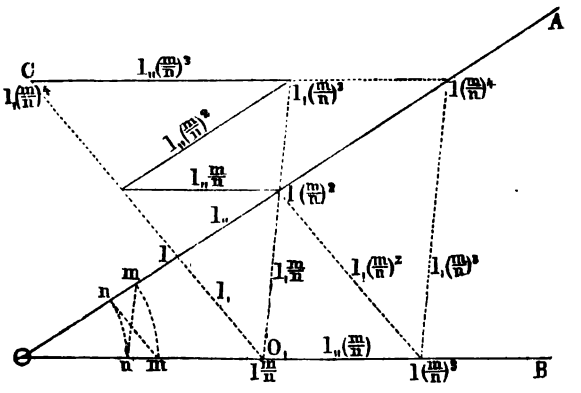
$$l\frac{m}{n} \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^3 \ldots . \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^n \ ,$$

wenn l und das Verhältniss $\frac{m}{n}$ gegeben sind. Setzt man hier $m = l$ und n gleich der Einheit, so erhält man wirkliche Potenzen von l. Allein es sind nur scheinbare Potenzen, weil sie alle durch die Einheit in derselben weniger ersten Potenz dividirt sind. Da man in Folge dessen verschiedene Längen erhält, wenn man dem Potenziren derselben Linie, einmal 1 Ctm., das andere Mal $^1/_2$ Zoll zu Grunde legt, d. h. n ändert, so wollen wir hier n immer evident erhalten und die wiederholten Multiplicationen, wie oben angeschrieben, ausführen.

Die Wiederholung der Multiplication von Fig. 10 (s. S. 9) giebt die Anordnung von Fig. 21 (s. S. 16). Nachdem man im Winkel ○ durch zwei Kreisbogen beide Richtungen, sowohl die, welche von A nach B, als auch die, welche von B nach A in dem Verhältniss $\frac{m}{n}$ projicirt und die wir antiparallel nennen, bestimmt und l auf A

aufgetragen hat, so erhält man durch eine Parallele $l\frac{m}{n}$ auf B durch Ziehen der Antiparallelen $l(\frac{m}{n})^2$ auf A u. s. w.

Fig. 21.



Es bilden dann die Totallängen von A und B geometrische Progressionen:

$$l \quad l(\tfrac{m}{n})^2 \quad l(\tfrac{m}{n})^4 \ldots \text{ und } l\tfrac{m}{n} \quad l(\tfrac{m}{n})^3 \ldots\ldots$$

mit dem Quotienten $(\frac{m}{n})^2$ und die Längen der aufeinander folgenden Transversalen die geometrische Progression:

$$l, \quad l,\tfrac{m}{n} \quad l,(\tfrac{m}{n})^2 \quad l,(\tfrac{m}{n})^3 \ldots.$$

des Quotienten $\frac{m}{n}$.

Setzt man zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Antiparallelen z. B. den ersten, welche den Winkel O, mit einander bilden, die Progression l, $l,\frac{m}{n}$ fort, so erhält man ein $A \bigcirc B$ gleichartiges Gebilde CO,D dessen Schenkel die Träger der Progressionen:

$$l, \quad l,(\tfrac{m}{n})^2 \quad l,(\tfrac{m}{n})^4 \ldots \text{ und } l,\tfrac{m}{n} \quad l,(\tfrac{m}{n})^3 \ldots$$

sind, und dessen Antiparallelen mit $\bigcirc A$ und $\bigcirc B$ parallel laufen, den einzelnen Segmenten dieser Gebilde gleich sind, und die geometrische Progression:

$$l_{,,} \quad l_{,,}\tfrac{m}{n} \quad l_{,,}(\tfrac{m}{n})^2 \quad l_{,,}(\tfrac{m}{n})^3,$$

bilden.

Hieraus geht also hervor, dass auch die einzelnen Segmente von $A\bigcirc$ und $B\bigcirc$ eine geometrische Progression bilden, was übrigens noch unmittelbar aus der Aehnlichkeit aller über diesen Segmenten stehenden Dreiecke, gebildet aus dem Segment und einem Paar Antiparallelen, folgt.

Die Multiplication mit Verhältnissen, die gebrochene Exponenten haben, werden wir in Nummer 5 beim Wurzelausziehen behandeln, vorher aber noch der Arbeiten dreier Herren erwähnen, welche versucht haben, nach obigen Regeln auf graphischem Wege rein analytische Ausdrücke zu construiren. Es sind das der Aufsatz: *Sul calcolo grafico dei polinomi intieri e razionali della forma* $x^m + a x^{m-1} + \ldots q x + l$, *nota dell' Ingegnere E. Stamm* (*Rendi conti del Reale Instituto Lombardo Milano* 1864).

Dann Dr. *H. Eggers* Grundzüge einer graphischen Arithmethik, Schaffhausen 1865.

Endlich: Das graphische Rechnen, Promotions-Dissertation von *Eug. Jäger*, Speyer 1867.

Die Constructionen des Polynoms weichen nicht wesentlich von einander ab, die *Stamm's* ist jedoch die erste, die Auffassung in *Eggers* Grundzügen aber bei weitem die allgemeinere, in *Jäger's* Rechnen endlich sind auch bekanntere Constructionen wieder mit aufgeführt.

Wir wollen hier nach *Eggers* das Polynom

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i\, p_i + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i-1} p_{i-1} + \ldots \alpha_1 \alpha_2 p_2 + \alpha_1 p_1 + p_0 = y$$

construiren, in welchen p Längen und α immer positive Verhältnisse bezeichnen, welche durch 2 Linien $\frac{m}{n}$ gegeben sein können. Unsere Construction weicht von der Dr. *Eggers* nur darin ab, dass wir dem Nr. 3 S. 11 Gesagten entsprechend mit dem Sinusverhältniss construiren, während Dr. *Eggers* das Tangentenverhältniss angewendet hat, um die zu construirenden Grössen mit den Ordinaten der Gleichung einer Linie $y = \alpha x + p$, von der er ausgeht, mehr in Einklang zu bringen.

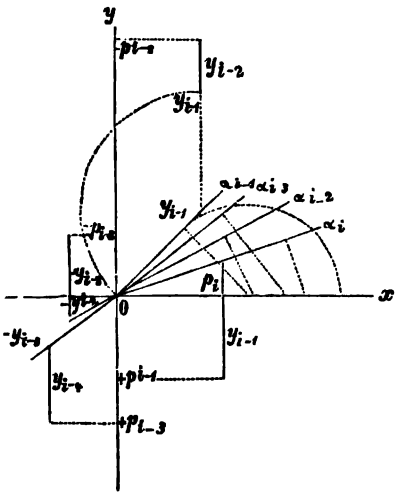
Wir bringen y in die Form:

$$y = ((((a_i\, p_i + p_{i-1})\, \alpha_{i-1} + p_{i-2})\, \alpha_{i-2} + \ldots p_2)\, \alpha_2 + p_1)\, \alpha_1 + p_0;$$

und setzen den Inhalt der aufeinander folgenden Klammern $= y_{i-1}, y_{i-2} \ldots$, so dass:

$y_{i-1} = \alpha_i p_i + p_{i-1}$; $y_{k-1} = \alpha_k y_k + p_{k-1}$; $y_0 = y$,
ist.

Fig. 22.



Von O (Fig. 22) ausgehend wurden Strahlen gezogen, die mit Ox Winkel bilden, deren Sinus gleich α_i, $\alpha_{i-1}-1$, α_{i-2}, α_{i-3} .... ist. Da $\alpha_{i-1} > 1$ war, so wurde statt α_{i-1} das Sinusverhältniss $\alpha_{i-1}-1$ aufgetragen; wäre es grösser als wie 2 gewesen, so hätte man $\alpha_{i-1} - 2$ aufgetragen, u. s. w. Dann wurden auf Oy ebenfalls von O ausgehend, die positiven p nach unten und die negativen p nach oben aufgetragen, und durch die Endpunkte Parallele gezogen. Nimmt man jetzt p_i in den Zirkel und trägt es auf α_i auf, so ist die Entfernung des Endpunktes von der Horizontalen p_{i-1} gleich y_{i-1}; denn die Strecke über Ox ist gleich $\alpha_i p_i$ und die Strecke unter derselben gleich p_{i-1}, mithin die ganze ausgezogene Strecke $= \alpha_i p_i + p_{i-1} = y_{i-1}$. Dieses y_{i-1} kann sofort, ohne dass es nöthig wäre, eine weitere Linie zu ziehen, abgegriffen, dann zuerst auf α_{i-1} und hierauf auf der Verticalen durch den Endpunkt einmal aufgetragen werden, weil α_{i-1} grösser als 1 ist. Die Entfernung des Endpunktes dieser Verticalen von der Horizontalen durch $-p_{i-2}$ ist gleich y_{i-2}. Da dieser Endpunkt unter der Horizontalen $-p_{i-2}$ liegt, so ist y_{i-2} negativ, und muss auf den Strahl α_{i-2} von O aus nach links aufgetragen werden.

Auch dieser Endpunkt liegt unter $-p_{i-3}$, demnach ist y_{i-3} auch negativ, und muss ebenfalls rückwärts von O auf α_{i-3} aufgetragen werden. Dieser letztere Endpunkt liegt über $+p_{i-4}$, also ist y_{i-4} positiv.

Auf diese Weise fortfahrend, lässt sich jedes Polynom von obiger Form graphisch construiren.

Sind alle α gleich gross, so wird das obige Polynom gleich:

$$y = p_i \alpha^i + p_{i-1} \alpha^{i-1} + \ldots \quad p_0.$$

In diesem Falle hat man nur ein einziges α zu construiren, im Uebrigen ist die Construction wie oben.

Ist α unbekannt $= x$ und soll $y = 0$ sein, so kann mittelst obiger Construction auf dem Wege des Probirens die Gleichung

$$0 = p_i x^i + p_{i-1} x^{i-1} + \ldots \quad p_0,$$

gelöst werden.

Direct können nun nach obiger Methode die Wurzeln bestimmt werden, welche grösser als $+1$ und kleiner als -1 sind: also die Wurzeln zwischen

$$+1 > x > -1.$$

Um dann die Wurzeln zwischen

$$-1, x < \quad \text{und} \quad 1 < x,$$

zu erhalten, setze man in obiger Gleichung $x = \frac{1}{x}$ und erhält dann eine Gleichung, die nach obiger Methode alle Wurzeln zwischen $-1 < x < +1$ giebt.

Es handle sich z. B. um die Gleichung:

$$x^3 - 6x^2 - x + 23 = y = 0.$$

Ein Blick zeigt, dass diese Gleichung für Werthe von x zwischen -1 und $+1$, y seinen Werth nicht ändert, wir setzen also $x = \frac{1}{x}$ und erhalten die neue Gleichung:

$$y = 23x^3 - x^2 - 6x + 1 = 0,$$

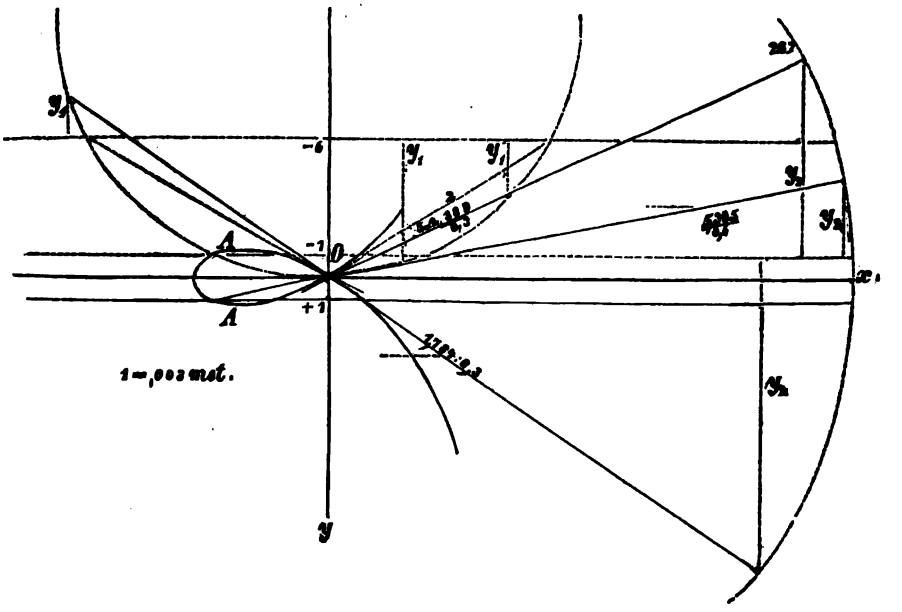
deren y_i für verschiedene x in Fig. 23 (s. S. 20) im Maassstab von $1 =$,003 met. $=$ 1 Linie schweizerisch construirt worden sind.

Trägt man auf jedem einem x entsprechenden Strahl 23 auf, so ist der Ort aller dieser Endpunkte der gestrichte Kreis, und das entsprechende $y_2 = 23x - 1$ gleich der Höhe dieser Endpunkte über der Horizontalen -1. Werden diese y_2 von O aus je auf dem entsprechenden Strahl aufgetragen, so erhält man den Ort aller y_1, die strichpunktirte Curve. Das entsprechende $y_1 = 23x^2 - x - 6$ ist gleich der Höhe der Punkte über der Horizontalen -6. Werden endlich diese y_1 ebenfalls auf den entsprechenden Strahlen aufgetragen, so erhält man den Ort aller y, die ausgezogene Curve. Die:

$$y = 23x^3 - x - 6 + 1,$$

sind gleich der Höhe der Punkte dieser Curve über der ausgezo-

Fig. 23.



genen Linie $+1$. Der Schnitt der letzten Curve mit dieser Linie bestimmt die den 3 Wurzeln entsprechenden Strahlen, die ausgezogen wurden. Da die Wurzeln gleich $\frac{1}{\sin. x}$ sind, so können sie direct als Länge zwischen O und der Horizontalen ± 1 abgegriffen werden. Da diese Entfernungen zu klein sind, so wurden sie auf der Horizontalen $\pm \frac{1}{0,3}$ gleich 0,01 ctm. abgegriffen und eingeschrieben.

Wird diese Zeichnung in einem etwas grösseren Maassstabe ausgeführt, so erhält man 3 Stellen sicher. Der grösste Vortheil dieses graphischen Verfahrens liegt in der Uebersichtlichkeit, die es von der Function y giebt. Man sieht, dass zwei Schnitte zusammenfallen würden, wenn das letzte (resp. erste) constante Glied von y statt $= +1$ den Ordinaten der Punkte A gleich wäre, und dann die Gleichung 2 gleiche Wurzeln hätte. Wäre jenes Glied noch grösser, so hätte sie imaginäre Wurzeln. Ferner geht noch aus der Natur der geometrischen Construction hervor, dass die Tangenten am Doppelpunkt O durch den Schnitt der Curve y_1 mit

der Horizontalen — 6 gehen, und dass $y\ y_1\ y_2$ leicht zu bestimmende Maxima haben.

Werden alle Curven für Strahlen, die mit x einen Winkel bilden, der kleiner ist als 180°, construirt, so werden dadurch alle Werthe für $\frac{1}{x}$ zwischen ± 1 erschöpft, macht man dann die Winkel grösser als 180°, so wiederholen sich noch einmal dieselben Constructionen. Kommen daher Wurzeln vor, die sowohl kleiner als auch grösser als 1 sind, so wird es sich gut machen, wenn man die eine Seite der y-Axe den kleineren und die andere den grösseren Wurzeln zuweist. Die gleichen Horizontallinien dienen beiden Constructionen, nur werden sie bei der der x in entgegengesetzter Ordnung als wie bei der der $\frac{1}{x}$ verwendet.

Es liegt nicht im Zweck dieses Werkes, die Theorie der Gleichungen graphisch weiter zu entwickeln, allein es würde das Verständniss derselben gewiss ungemein erleichtern, wenn man die abstracten Zahlenverhältnisse durch Zeichnungen darstellen und erläutern würde.

4. Summations- oder Seilpolygone.

Gar häufig hat man, namentlich in der Statik, nicht nur wie in der vorigen Nummer einzelne, sondern ganze Reihen von Linien mit verschiedenen, bisweilen erst zu bildenden Verhältnissen zu multipliciren, und die Verhältnisse sowohl als auch die Producte zu summiren; führt man nun die Summation dieser Producte in der Art aus, dass man die entstehenden Dreiecke fortlaufend aneinander reiht, so entstehen die Summationspolygone, oder wegen ihrer statischen Bedeutung auch Seilpolygone genannt, welche eins der wichtigsten Hülfsmittel der graphischen Statik bilden.

Es seien z. B. die Producte $x\frac{\Delta P}{H}$ zu summiren, also $\sum_1^n x_i \frac{\Delta P_i}{H_i}$ zu bilden, worin beispielsweise x_i von einem Punkte aus in gegebener Richtung gemessene Abscissen, ΔP_i verticalwirkende Einzellasten, H_i beliebige Reductionscoefficienten oder Horizontal-

schube bezeichnen mögen. Für jetzt müssen wir uns denken, es seien sowohl die ΔP als auch die H durch Linien gegeben.

Fig. 24.

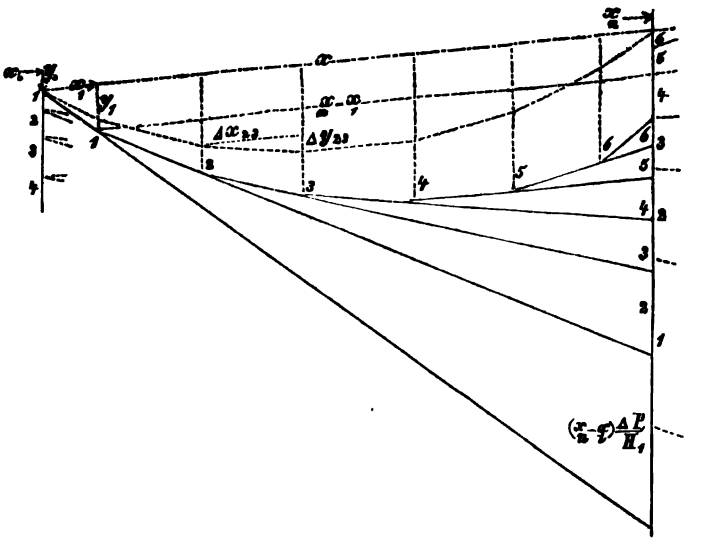


Fig. 25.

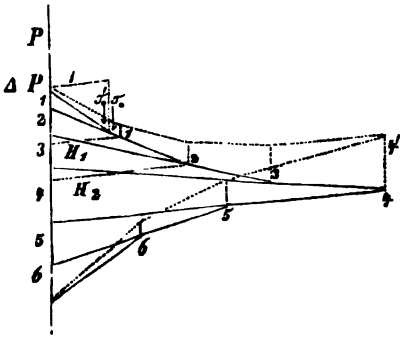
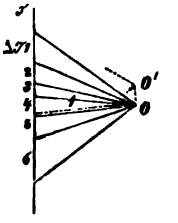


Fig. 26.



In Fig. 25 tragen wir auf der verticalen Richtungslinie der ΔP alle diese Kräfte mit Berücksichtigung ihres Zeichens und erhalten auf dieser Linie $P = \Sigma \Delta P$. Auf dieser Linie kann also die Summe einer beliebigen Zahl aufeinander folgender ΔP abgegriffen werden.

Durch den ersten Endpunkt von ΔP_1 führen wir eine Linie mit dem willkürlichen Ordinatenverhältniss τ_{01}; durch den Punkt 1 dieser Linie, dessen Entfernung in der Richtung der x gemessen gleich H_1 ist, und durch den zweiten Endpunkt von ΔP_1 führen wir eine Linie bis zum Punkt 2, dessen Entfernung von P in der Richtung der x gemessen $= H_2$ ist. Die Entfernung des Fusspunktes von H_1 vom oberen Endpunkte ΔP_1 ist gleich $H_1 \tau_{01}$, vom unteren demnach $H_1 \tau_{01} - \Delta P_1$; da diese aber auch gleich $H_1 \tau_{12}$ ist, so folgt, dass das Ordinatenverhältniss der 2. Strecke $\tau_{12} = \tau_{01} - \frac{\Delta P_1}{H_1}$ ist.

Durch den unteren Endpunkt von ΔP_2 und durch den Punkt 2 führen wir die dritte Linie bis zum Punkte 3, dessen Entfernung von der Linie der P gleich H_3 ist. Genau wie oben vorgehend erhält man das Ordinatenverhältniss für diese 3. Strecke gleich:

$$\tau_{23} = \tau_{12} - \frac{\Delta P_2}{H_2} = \tau_{01} - \frac{\Delta P_1}{H_1} - \frac{\Delta P_2}{H_2}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man das Polygon der τ, in welchem das Ordinatenverhältniss für irgend eine Strecke:

$$\tau_{i,i+1} = \tau_{01} - \sum_1^i \frac{\Delta P_i}{H_i}$$

ist. Man sieht hieraus, dass das willkürlich angenommene τ_{01} bezüglich $\sum_1^i \frac{\Delta P_i}{H_i}$ die Rolle einer Integrationsconstante spielt.

Führt man durch irgend einen Punkt O Fig. 26 Parallele zu den Polygonseiten 1 2 3 ... von Fig. 25, so schneiden diese auf der Verticallinie, deren Entfernung vom angenommenen Punkt $= 1$ ist, die Verhältnisse $\Delta \tau_i = \tau_{i,i+1} - \tau_{i-1,i} = \frac{\Delta P_i}{H_i}$ aus; und diese Verhältnisse erscheinen auf der Verticallinie, die wir jetzt die Linie der τ nennen können, in der Reihenfolge summirt, in welcher die ΔP aneinander gereiht wurden.

Wenn man das Ordinatenverhältniss der ersten Seite 0 1 ändert, z. B. gleich τ_{01}' statt τ_{01}, siehe den punktirten Linienzug Fig. 25, annimmt, so ändert sich die ganze Figur, allein von Constructionswegen bleibt das Punktgebilde P unverändert und alle ausserhalb P liegende Punkte bewegen sich auf verticalen Linien. Die beiden Figuren haben also die Gerade P und den Parallel-

strahlenbüschel der Verticallinien entsprechend gemein, d. h. sie sind affin. Aus der Geometrie der Lage, aber auch direct aus der Construction geht hervor, dass in solchen Systemen alle entsprechenden, in der gleichen Verticalen liegenden Punktreihen congruent sind: denn die in 4 z. B. sich schneidenden Strahlen schneiden auf allen Verticalen ebenso grosse Strecken aus, als wie die in 4' sich schneidenden, weil 4 und 4' von P gleich weit abstehen; da nun dies auch von je zwei anderen Strahlen gilt, so folgt die eben ausgesprochene Behauptung. Es muss übrigens auch so sein, denn diese Strecken lassen sich ausdrücken durch die Verhältnisse $\frac{P_i}{H_i}$ und durch die Lage der Verticallinien, welche beide unabhängig von τ_{01} sind.

Von Fig. 26 gilt alles, was soeben von Fig. 25 gesagt wurde, der Punkt O rückt nach O' hinauf.

Die mit dem jetzt construirten Verhältnisse $\Delta\tau_i = \frac{\Delta P_i}{H_i}$ zu multiplicirenden Abscissen tragen wir von einem Punkt x_n Fig. 24 mit Berücksichtigung des Zeichens so auf, dass sie als Abscissendifferenz $x_n - x_i$ erscheinen, führen durch alle x_i Verticallinien, und verbinden fortlaufend diese Verticallinien durch Parallele zu dem entsprechenden τ von Fig. 25 und 26; bei einem beliebigen Punkte beginnend, z. B. von 0 bis 1 eine Parallele zu τ_{01}, von 1 bis 2 eine Parallele zu τ_{12} und so fort. Dann schneiden diese verlängerten Polygonseiten auf der Verticalen x_n die verlangten Producte $(x_n - x_i)\frac{\Delta P_i}{H_i}$ aus. Denn für ΔP_1 und x_1 z. B. hat man wegen der Aehnlichkeit der Figuren $1, x_n - x_1, (x_n - x_1)\frac{\Delta P_1}{H_1}$ in Fig. 24 und $1, H_1, \Delta P_1$ in Fig. 25:

$$\frac{x_n - x_1}{H_1} = \frac{(x_n - x_1)\,\Delta P_1 : H_1}{\Delta P_1}.$$

Da dieses Verhältniss auch von allen anderen ΔP_i gilt, so erscheinen auf der Verticalen x_n die gesuchten Producte $(x_n - x_i)\frac{\Delta P_i}{H_i}$ mit Berücksichtigung des Zeichens in der Reihenfolge aneinander gereiht, in welcher in Fig. 25 die ΔP aneinander gereiht wurden. Auf der Linie x_n können wir also die Summe einer beliebigen Zahl aufeinander folgender Producte:

$$\sum_{k}^{i} (x_n - x_i) \frac{\Delta P_i}{H_i}$$

abgreifen.

Denken wir uns die x_i, also die relative Lage der ΔP, fest, dagegen die x_n veränderlich, so ändert sich durchaus nichts am Polygon selbst in Fig. 24, es erhält nur die Verticallinie x_n eine andere Lage. Schreiben wir, um diese Allgemeinheit auszudrücken, x statt x_n, so kann man sagen:

Zwei Strahlen des als Strahlenbüschel aufgefassten Summationspolygons, Fig. 24, schneiden auf allen Verticallinien x die Summen:

$$\Sigma (x - x_i) \frac{\Delta P_i}{H_i}$$

der zwischen diesen Strahlen eingeschalteten ΔP_i aus.

An diesem Resultat ändert sich nichts, wenn man die Polygonseiten von Fig. 24 mit den punktirten Seiten von Fig. 25 und 26 parallel zieht. Denn obige Partialsummen sind ja unabhängig vom Werth des zuerst angenommenen z_{01}. Ueberhaupt gilt von den zwei verschiedenen Polygonen der Fig. 24 alles, was weiter oben von den Polygonen der Fig. 25 und 26 gesagt worden ist. Sie sind affin und alle entsprechenden verticalen Punktgebilde sind congruent. Dieses Verhalten giebt uns ein Mittel an die Hand, zwei Polygonseiten durch bestimmte gegebene Punkte zu führen. Soll z. B. die erste Polygonseite 01 durch den Punkt $x_0 y_0$ und die letzte 67 durch den Punkt $x_n y_0$ gehen, so beginnt man sogleich damit, eine Parallele zu dem in Fig. 25 willkürlich angenommenen z_{01} zu ziehen, und vollendet das Polygon, wie es oben beschrieben wurde. Geht schliesslich die Seite 67, Fig. 24, nicht durch den bestimmten Punkt $x_n y_0$, so hat man nichts weiter zu thun, als das erhaltene Punktgebilde in der Verticalen x_n so zu verschieben, dass der Punkt nach 6 auf den gegebenen Punkt $x_n y_0$ falle. Dies ist auf der rechten Seite der Verticalen x_n geschehen, und jetzt geht die Polygonseite 01 durch den Punkt $x_0 y_0$ und den Punkt 01 in der Verticalen x_m; die Seite 12 durch den Schnitt von 01 mit x_1 und dem ebenso bezeichneten Punkt in x_n u. s. f.

Noch einfacher liesse sich die Construction mit Hülfe der ersten Verticalen x_0 ausführen; denn dieses Gebilde ändert ja

nicht einmal seine Lage, und alle Polygonseiten schneiden sich auf derselben; es ist also die letzte Polygonseite 67 gegeben durch den Punkt $x_n y_0$ und durch den Punkt 67 in x_0, nämlich den Schnitt des ersten Polygons mit x_0; die zweite durch den Schnitt dieser Seite mit dem Schnittpunkt der entsprechenden Seite des ersten u. s. f. Wegen Platzmangel konnte diese Construction nur von der Seite 34, an angedeutet werden.

Wir wollen jetzt auch Ausdrücke für die Ordinaten y_i suchen. Wir bezeichnen die Differenz zweier aufeinander folgender Coordinaten mit $\Delta x_{i,i+1}$ und $\Delta y_{i,i+1}$ und behaften sie mit zwei Zeichen, weil es nicht möglich ist, überall aufeinander folgende Coordinaten mit fortlaufenden Indexen zu bezeichnen. Dabei soll die Differenz positiv sein, wenn die Ordinate des 2. Index die grössere ist.

Man hat dann wegen $\Delta y_{i,i+1} = \tau_{i,i+1} \Delta x_{i,i+1}$:

$$y_n = y_0 + \sum_0^n \tau_{n,n+1} \Delta x_{n,n+1} = y_0 + \sum_0^n (\tau_{01} - \sum_0^i \frac{\Delta P_i}{H_i}) \Delta x_{i,i+1}$$

oder:

$$y_n = y_0 + (x_n - x_0) \tau_{01} - \sum_1^n \Delta x_{i,i+1} \sum_1^i \frac{\Delta P_i}{H_i}.$$

Noch einen zweiten Ausdruck kann man für y_n finden, wenn man bemerkt, dass der Schnitt der ersten willkürlich angenommenen Polygonseite mit der Ordinate x_n gleich $y_0 + x_n \tau_{01}$ ist, und dass dann das darüberstehende Segment bis zum Eckpunkt $x_n = \sum_1^n (x_n - x_i) \frac{\Delta P_i}{H_i}$ ist.

Man hat also auch:

$$y_n = y_0 + (x_n - x_0) \tau_{01} - \sum_1^n (x_n - x_i) \frac{\Delta P_i}{H_i}.$$

Es muss demnach $\sum_1^n \Delta x_{i,i+1} \sum_1^i \frac{\Delta P_i}{H_i} = \sum_1^n (x_n - x_i) \frac{\Delta P_i}{H_i}$ sein. Durch Anschreiben der zweiten Summen des ersten Ausdrucks überzeugt man sich leicht, dass der zweite Ausdruck nur eine Partialintegration des ersten ist; man hat nämlich, wenn man noch statt Δx die treffenden Differenzen setzt:

$$\Delta x_{12} \frac{\Delta P_1}{H_1} = (x_2 - x_1) \frac{\Delta P_1}{H_1},$$

$$\Delta x_{23} \sum_1^2 \frac{\Delta P_i}{H_i} = (x_3 - x_2) \left(\frac{\Delta P_1}{H_1} + \frac{\Delta P_2}{H_2} \right),$$

$$\Delta x_{34} \sum_1^3 \frac{\Delta P_i}{H_i} = (x_4 - x_3)\left(\frac{\Delta P_1}{H_1} + \frac{\Delta P_2}{H_2} + \frac{\Delta P_3}{H_3}\right),$$

$$\Delta x_{n-1,n} \sum_1^{n-1} \frac{\Delta P_i}{H_i} = (x_n - x_{n-1})\left(\frac{\Delta P_1}{H_1} + \frac{\Delta P_2}{H_2} + \cdots \frac{\Delta P_{n-1}}{H_{n-1}}\right).$$

Die Summation der Colonnen giebt sofort:

$$\sum_1^n \Delta x_{i,i+1} \sum_1^i \frac{\Delta P_i}{H_i} = (x_n - x_1)\frac{\Delta P_1}{H_1} + (x_n - x_2)\frac{\Delta P_2}{H_2} \cdots \frac{\Delta P_{n-1}}{H_{n-1}}$$

$$= \sum_1^n (x_n - x_i)\frac{\Delta P_i}{H_i}.$$

Oben haben wir es öfters ausgesprochen und auch besonders betont, dass die Producte mit Berücksichtigung ihres Zeichens aneinander gereiht werden. Es versteht sich das eigentlich von selbst, wie von jeder mechanisch durchgeführten Construction, nichts desto weniger glaubten wir es noch auf Taf. 2, nachweisen zu müssen. Es sind dort alle Zeichencombinationen der 3 Factoren $(x_n - x_i)$, ΔP_i, $\frac{1}{H_i}$ vorgeführt, und das Zeichen des Zuwachses der Productensumme entspricht den Producten der Zeichen der Factoren. Der positive Sinn wurde bei x rechts, bei ΔP unten und dann dasjenige H als positiv angenommen, von dessen Endpunkt aus ein Strahl ein positives ΔP, positiv rechts herum, wie die Zeiger einer Uhr, beschreibt. Ein positives $x_n - x_i$ liegt dann auf derselben Seite von x_n, auf welcher ein positives H_i bezüglich P liegt. Ist also $x_n - x_i$ positiv, so stimmt das Zeichen des Productes mit dem Drehungssinn eines Strahles aus dem Endpunkt von H überein; ist $x_n - x_i$ negativ, so hat auch das Product entgegengesetztes Zeichen als wie der Drehungssinn. Ein Blick auf das Summationspolygon der ΔP zeigt, dass dieser Drehungssinn mit dem Zeichen von $\frac{\Delta P}{H}$ übereinstimmt.

Eine weitere Folge dieses algebraischen Summirens ist die Gleichgültigkeit der Reihenfolge, in welcher die Producte summirt werden; dass die Streckensummen in den Verticallinien der ΔP und der Producte sich nicht ändern können, versteht sich von selbst, weil in beiden Linien gleich lange Strecken aneinander gereiht werden. Die Polygone selbst vor und nach den vertauschten ΔP und Producten bleiben unverändert, weil ja auch in der Verticallinie der τ, Fig. 26, S. 22, die Summe der $\Delta\tau$ dieselben

geblieben sind. Demnach laufen diese Polygonseiten mit demselben Strahl von O, Fig. 25, parallel, und gehen durch denselben Punkt der Verticallinie der $(x_n - x_i)\frac{\Delta P_i}{H_i}$, sie fallen mithin zusammen. Taf. 2/1 ist die Vertauschung der ΔP_1 und ΔP_2 ausgeführt. Dass hiebei die letzte Polygonseite 1′2 mit 2′3 zusammenfallen muss, geht geometrisch noch daraus hervor, dass wenn die Polygonseiten 1 2′, 2′ 1′ und 1 2 parallel gezogen werden den ebenso bezeichneten Seiten im Polygon der ΔP, dann 5 Seiten mit Einschluss der Verticallinien 1 1′ und 2 2′, der Vierecke 1 1′ 2 2′ und darunter je 2 Gegenseiten mit einander parallel laufen, und dass demnach auch die 6. Seiten 2 1′ parallel laufen, d. h. mit der Linie 2 3 des ersten ausgezogenen Polygons zusammenfallen müssen.

Zum Schluss machen wir noch darauf aufmerksam, dass die Fig. 24 und 25, S. 22, sehr complicirt und unübersichtlich werden, wenn man alle Polygonseiten nach beiden Seiten hin verlängert. Es genügt vollständig, die Seiten zwischen den betreffenden Verticallinien zu zeichnen und dann den Schnitt mit der Linie der ΔP oder der Producte aufzufangen. In diesem Punkt, und auch hinsichtlich der Bezeichnung, bitten wir namentlich Anfänger, Taf. 1/2 zum Muster nehmen zu wollen. Irgend eine Polygonseite, 3 4 z. B., geht durch den Punkt (3 4) der Verticallinie, und läuft mit der Seite 3 4 des anderen Polygons parallel.

Ebenso wie wir die Fig. 24 aus Fig. 25 entstehen liessen, könnten wir aus Fig. 24 ein weiteres Polygon construiren, welches uns Producte von der Form:

$$\Sigma \frac{z_n - z_i}{h_i} \cdot \frac{x_n - x_i}{H_i} \Delta P_i$$

geben würde, und aus diesen könnten wir ein weiteres von der Form:

$$\Sigma \frac{u_n - u_i}{h'_i} \cdot \frac{z_n - z_i}{h_i} \cdot \frac{x_n - x_i}{H_i} \Delta P_i$$

u. s. f. bilden. In diese Kategorie gehören die Trägheitsmomente und die höheren Momente im Allgemeinen, hier aber wollten wir nur darauf hindeuten, dass diese Summationspolygone die vorzüglichsten Integrationsinstrumente des graphischen Rechnens sind. Später werden wir noch auf rein statischem Wege zu denselben Gebilden, den Seilpolygonen gelangen.

5. Wurzelausziehen.

Unter Wurzelausziehen versteht man die Bestimmung des Verhältnisses $\frac{m}{n}$, wenn l und $l(\frac{m}{n})^k$ gegeben sind. Dieses Wurzelausziehen kann nicht direct, sondern nur mittelst Hülfscurven ausgeführt werden, von denen wir zwei auf Taf. 1 construirt haben.

Taf. 1 wurde auf den beiden Schenkeln OL und OM eine eben erläuterte Potenzirung mittelst des aus 10 Strecken bestehenden Parallelen- und Antiparallelenzuges $ABCD \ldots KLM$ ausgeführt. Anschliessend an das erste Dreieck AOB wurde dann das zweite $COB = C,OB$ und an dieses letztere das dritte $DOC = D,OC$, u. s. f. in der Art angelegt, dass die Parallelen und Antiparallelen einen fortlaufenden nicht gebrochenen Zug $ABC,D, \ldots K,LM$ bildeten, dessen letzte Seite LM wieder mit einer Strecke des Winkels LOM zusammenfällt, wenn dieser einen paaren hier den $^1/_{10}$ Theil des Kreisumfangs bildet. In dieser Figur sind dann nicht nur alle durch eine Strecke und den Mittelpunkt O gebildeten Dreiecke, sondern auch alle Zusammensetzungen von je zweien, dreien oder n derselben ähnlich, weil sie alle aus der gleichen Zahl ähnlicher, und ähnlich liegender Dreiecke bestehen. Es sind daher alle Winkel $LMO = K,LO = I,K,O = F,G,O$ etc. (es sind nicht alle Schenkel dieser Winkel ausgezogen). Ebenso die Winkel $K,MO = I,LO = H,KO = E,G,O$ etc. und die Winkel $I,MO = H,LO = GKO = D,G,O$ etc. etc. und überhaupt alle Dreiecke ähnlich, welche aus dem Mittelpunkt O und Sehnen gebildet sind, welche die gleiche Zahl Strecken des Zuges $ABC,D, \ldots K,LM$ unterspannen, und die daher auch von Constructionswegen gleiche Centriwinkel bei O haben.

Diese Eigenschaften sind ganz unabhängig vom ursprünglich angenommenen Centriwinkel LOM des ersten angenommenen Elementardreiecks. Sie bestehen also auch noch fort, wenn man diesen Winkel unendlich klein annimmt. Dann verwandelt sich der Streckenzug in eine Curve. Sehnen, welche die gleiche Zahl Elementarstrecken unterspannen, sind solche, die vom Centrum O aus unter gleichen Winkeln projicirt werden. Alle aus solchen Sehnen und dem Centrum gebildeten Dreiecke sind ähnlich und mehrere in gleichen Winkeln auf einander folgende Radienvectoren bilden eine geometrische Progression; die Längen ihrer

Schenkel haben das gleiche Verhältniss $\frac{m}{n}$. Um also in der oben gestellten Aufgabe das Verhältniss $\frac{m}{n}$ zu bestimmen, wenn l und $l(\frac{m}{n})^k$ gegeben sind, hat man nur die Radienvectoren zu bestimmen, deren Länge l und $l(\frac{m}{n})^k$ ist, den Winkel, den sie einschliessen, in k Theile zu theilen: dann stehen die diesen Winkel einschliessenden Seiten im Verhältniss $\frac{m}{n}$.

Aus der Aehnlichkeit aller Elementardreiecke folgt auch, dass deren 3te Seite mit den beiden übrigen Seiten gleiche Winkel bildet; bei unendlich kleinen Centriwinkeln wird aber die dritte Seite zur Tangente, demnach schneiden alle Tangenten die Radienvectoren ihrer Berührungspunkte unter gleichem Winkel. Die vorliegende Curve ist also eine logarithmische Spirale.

Diese logarithmische Spirale lässt sich gar leicht und genau mittelst ihrer Evolute und einzelnen Krümmungsbogen verzeichnen. Die Evolute $F_{,,} G_{,,} H_{,,}$ ist nämlich wiederum eine logarithmische Spirale derselben Progression. Denn da alle Theile der Curve $F,G,H,$ einander ähnlich sind, so sind es nothwendig auch die Dreiecke $F,OF_{,,}$, $G,OG_{,,}$, $H,OH_{,,}$, welche aus dem Mittelpunkt O, einem der drei Punkte $F,G,H,$ und den dazu gehörigen Osculationspunkten $F_{,,} G_{,,} H_{,,}$ gebildet werden. Die Radienvectoren O $(F_{,,} G_{,,} H_{,,})$ verhalten sich daher wie die Radienvectoren O $(F,G,H,)$ und bilden auch dieselben Winkel miteinander, $F_{,,} G_{,,} H_{,}$ ist daher dieselbe Spirale als wie $F,G,H,$ und erscheint nur etwas umgedreht.

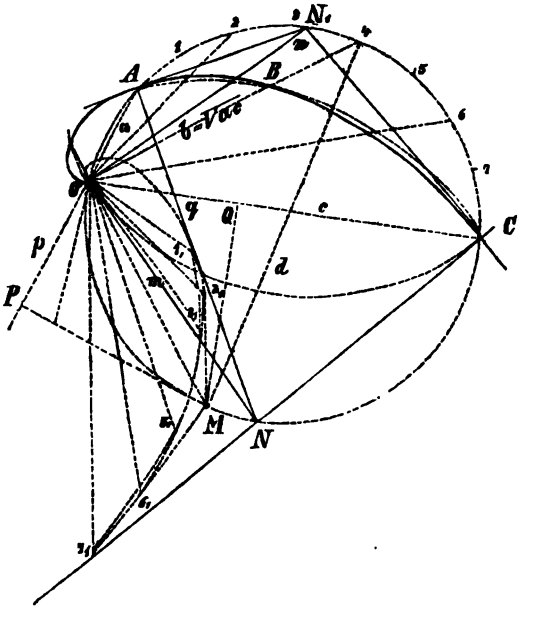
Zwei beliebige Punkte $F,G,$ der logarithmischen Spirale, das Centrum O und die beiden Schnitte N und $N,$ der entsprechenden Tangenten und Normalen liegen auf einem und demselben Kreis, denn die Winkel $NG,N,$ und $NF,N,$ ergänzen sich zu zwei rechten Winkeln, weil beide selbst rechte Winkel sind; ebenso die Winkel OG,N und OF,N weil die Tangenten F,N und $NG,$ die Radienvectoren $OG,$ und $OF,$ unter gleichen Winkeln scheiden: es sind daher die Vierecke $N,F,NG,$ und $OF,NG,$ solche, die einem Kreis einbeschrieben werden können; da aber durch $F,NG,$ nur ein einziger Kreis geführt werden kann, so geht derselbe sowohl durch O als auch durch $N,$. $NN,$ ist ein Durchmesser dieses Kreises, weil die Winkel bei $F,$ und $G,$ rechte sind, mithin ist der Winkel $NON,$ ebenfalls ein rechter. Dieses wird auch dann noch der Fall sein,

wenn die beiden Punkte $F, G,$ sich beständig nähern, und endlich zusammenfallen; dann fällt auch der Punkt N mit ihnen zusammen und $N,$ wird als Schnitt zweier unendlich nahen Normalen zum Krümmungsmittelpunkt. Es wird also bei der logarithmischen Spirale jeder Krümmungshalbmesser $F, F_{,,}$ und $G, G_{,,}$ vom Mittelpunkt O aus unter einem rechten Winkel projicirt.

Es ist nun die Evolute leicht zu construiren, wenn der Winkel gegeben ist, unter welchem die Radienvectoren von der Curve geschnitten werden. Der Winkel, den die Normalen $F, F_{,,}$ mit dem Radiusvector bilden, ist das Complement desselben und die Lage des Krümmungsmittelpunktes $F_{,,}$ wird dadurch vollends bestimmt, dass man bei O den rechten Winkel $F, OF_{,,}$ aufträgt.

Sind ausser dem Mittelpunkt O zwei weit auseinanderliegende Punkte A und $C,$ Fig. 27, welche durch eine Spirale verbunden werden sollen, gegeben, so beschreibe man um OAC einen Kreis, der nach Obigem die Schnittpunkte N und N_1 der Normalen und Tangenten in A und C enthält.

Fig. 27.



Von dem von A und C gleich weit abstehenden Punkte M seiner Peripherie als Mittelpunkt führe man einen zweiten (punktirten) Kreis durch A und $C.$ Dieser zweite Kreis schneidet dann die Spirale zwischen A und C noch einmal, und zwar in B auf dem Strahl $O4,$ welcher den Winkel AOC halbirt. Denn fällt man von M die Perpendikel MP und MQ auf OA und $OC,$ und bezeichnet man die Länge der Strahlen $O)$ $ABCMPQ$

mit $a\,b\,c\,m\,p\,q$, so ist $p = q$, weil OM den Nebenwinkel von AOB halbirt; da ferner $\measuredangle\, OAM = OCM$ und $AM = CM$ ist, so ist auch $\triangle\, AMP = CMQ$, also:

$$AP = CQ = a + p = c - q,$$

woraus $2p = 2q = c - a$ folgt.

Die Längen $AM = CM$ ergeben sich jetzt aus:

$$AM = \sqrt{a^2 + m^2 + 2ap} = \sqrt{m^2 + ac}.$$

Dieselbe Länge erhält man aber auch für $MB = \sqrt{m^2 + b^2}$, weil b als Halbirungsstrahl der Spirale gleich $\sqrt{ac}$ ist.

Demnach geht der Kreis, der durch A und C geht und M zum Mittelpunkt hat, auch durch B.

Von M aus erhält man leicht die Mittelpunkte 2_1 und 6_1 der Bogen AB und BC, welche die Spirale nochmals in der Mitte auf den Strahlen $O)\,2\,6$ schneiden. Sie liegen auf den Perpendikeln von M auf die Sehnen AB und BC, und auf den Strahlen $O)\,2_1$ und 6_1, welche ihrerseits auf den Halbirungsstrahlen $O)\,2$ und 6 senkrecht stehen. Ebenso erhält man auch von 2_1 und 6_1 aus die Mittelpunkte $1_1\ 3_1\ 5_1\ 7_1$ der weiteren Bogenunterabtheilungen. Je weiter man auf diese Weise fortfährt, die Winkel bei O zu halbiren und Kreise zu bestimmen, die durch 3 Punkte der Spirale zwischen den Schenkeln der Winkel gehen, desto mehr convergiren diese Kreise gegen die Osculationskreise.

Bereits die von 2_1 und 6_1 aus gezogenen Kreisbogen fallen mit der Spirale zusammen, die Punkte $1_1\ 3_1\ 5_1\ 7_1$ liegen daher schon ganz auf der Evolute. Die äussersten Strahlen $A1_1$ und $C7_1$ schneiden sich, wie es sein soll, in N auf dem Kreise OAC. Auf demselben Kreise auch schneiden sich diametral N gegenüber in N_1 die beiden Tangenten an A und C.

Verlängert man die Spirale gegen O zu, so schneidet sie noch ∞ mal den Kreis OAC in reellen Punkten, und zwar 2 mal auf jeder Umdrehung, wie es in Fig. 27 noch für $\frac{3}{2}$ Umdrehungen angedeutet ist. Alle Tangenten an diesen Schnittpunkten gehen durch N_1 und alle Normalen durch N, wie es ebenfalls die Figur zeigt. Verbindet man irgend 2 dieser Schnittpunkte durch einen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf dem Kreise OAC hat, so schneidet auch dieser die Spirale noch einmal zwischen jenen 2

Punkten, und zwar auf dem Strahle, der den Winkel der beiden Strahlen hälftet, welche jene Punkte von O aus projiciren. In die Fig. 27 sind 2 solcher Kreise eingezeichnet. Sie haben ausser den 3 aufgezählten Schnittpunkten keine weiteren reellen Punkte mehr mit der Spirale gemein. Durch das Zusammenfallen der 3 Punkte gehen sie in die Osculationskreise über.

Sind statt zwei weit auseinanderliegenden Punkten A und C zwei Punkte F, und G, Taf. 1_1 gegeben, die noch so nahe beisammen liegen, dass die Spirale zwischen ihnen durch ein Kreisbogenstück ersetzt werden kann, so wird N, d. h. der Mittelpunkt dieses Bogens, der Endpunkt des Durchmessers des Kreises G, F, O sein, der senkrecht auf der Sehne F, G, steht. Bestimmt man auf dieselbe Weise den Mittelpunkt eines weiteren Bogenstückes G, H, indem man einen weiteren Kreis durch H, G, O legt, und seinen Durchschnitt P, mit dem auf H, G, senkrecht stehenden Durchmesser bestimmt, so werden die Punkte P, N, G, auf einer geraden Linie liegen, wenn die Curvenstücke $F, G,$, G, H, durch Kreisbogenstücke ersetzt werden können. Ist auf diese Weise ein Mittelpunkt N, genau construirt, so lässt sich der nächste P, und so fort alle folgenden einfach dadurch bestimmen, dass man G, OP, dem Dreieck F, ON, ähnlich macht, und so kann dann die Curve leicht fortgesetzt werden.

Eigentlich ist die Rechnung des Winkels α, unter welcher die Spirale die Radienvectoren schneidet, einfacher als die eben angegebenen Constructionen; die Gleichung der logarithmischen Spiralen:

$$\Theta - \Theta' = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{lgn} \,.\, \frac{u}{u'},$$

darf als bekannt vorausgesetzt werden, in derselben bezeichnen Θu und $\Theta' u'$ zwei Azimuthe mit den zugehörigen Leitstrahlen. Sind also diese vier Grössen gegeben, so berechnet man mittelst derselben $tg\,\alpha$, $tg\,\alpha$ ist aber auch das constante Verhältniss der beiden senkrecht aufeinander stehenden Strahlen, welche den Radiusvector irgend eines Punktes projicirt, und dieses Verhältniss genügt, um nach obigem die Spirale zu construiren.

Setzt man in diese Gleichung speciell $\Theta - \Theta' = \frac{3}{2}\pi$, und $\frac{u}{u'} = \operatorname{tg}\alpha$, so erhält man die Spirale, deren Leitstrahlen bei der

Drehung um drei Rechte in demselben Verhältniss, als wie die einen Krümmungsradius projicirenden Strahlen zunehmen: Die Krümmungsmittelpunkte der mit diesem Verhältniss tg α construirten Spirale liegen also auf der Spirale selbst; wir erhalten die logarithmische Selbstevolute Taf. 1_2, bei der nämlich die Evolute nicht mehr verdreht erscheint und die am leichtesten construirt werden kann. Hat man einmal ein den Winkel $\frac{3}{2}\pi$ dieser Curve umfassendes Stück construirt, so lässt sie sich ganz einfach dadurch fortsetzen, dass man bei Beschreibung der sie ersetzenden Kreisbogenstücke die Zirkelspitze auf den beschriebenen Theil der Curve selbst aufsetzt. Die Normalen und Krümmungshalbmesser UT, TS, SO sind Tangenten zugleich. Durch Probiren erhält man aus:

$$\frac{3}{2}\pi = \text{tg}\ \alpha\ .\ \text{lgn tg}\ \alpha$$

die Tangente des Winkels, unter dem diese Curve die Radienvectoren schneidet, d. h. das Verhältniss der Radienvectoren

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{RO}{OS} = \frac{SO}{OT} = \frac{TO}{OU} \text{ etc.} = 3{,}6441734.$$

Mittelst dieses Verhältnisses (von dem $\frac{215}{59}$, $\frac{379}{104}$, $\frac{973}{267}$, angenehme Näherungswerthe für prismatische Maassstäbe die 3 Ziffern umfassen, sind) kann das Beschreiben dieser Curve ohne Weiteres vor sich gehen; ausserdem aber können auch beliebige Radienvectoren nach der Formel:

$$\text{lg}\ \frac{r}{c} = 0{,}000034666603\ \Theta' = 0{,}0020799962\ \Theta^0,$$

wo Θ' und Θ^0 den Winkel in Minuten und Graden bezeichnen, den die Leitstrahlen r und c mit einander bilden, berechnet werden. Der Winkel α selbst ist gleich: $74^0, 39', 18'',53$.

Diese beiden Spiralen (Taf. 1) können ganz die Stelle von Logarithmentafeln vertreten, und es lassen sich mittelst derselben alle Aufgaben lösen, bei denen Verhältnisse von Linien zu multipliciren und zu potenziren sind. Der Winkel zwischen zweien beliebigen Radienvectoren ist immer der Logarithmus ihrer Verhältnisse, und wir werden weiter unten durch ein Beispiel zeigen, wie diese Spiralen angewendet werden können.

Da die Längen der Leitstrahlen nicht direct mit den Winkeln, die sie mit einander bilden, verglichen werden können, so ist es für unsere Constructionen ganz einerlei, welches die Progression der Spirale ist. In Taf. 1 wurde sie so gewählt, dass nach einer Umdrehung der Leitstrahl sich auf das Zehnfache vergrössert hat. Dem entsprechend wurde auch der Umfang des Kreisbogens, auf dem die Winkel gemessen werden können, in 20 Theile getheilt und mit 0 5 10 .... 90 95 100 bezeichnet, so dass diese Anordnung dem Decimalsystem entspricht. Es liegen alle Radienvectoren, deren gegenseitiges Verhältniss 10, 100, 1000... ist, auf demselben Strahl. Doch ist diese Anordnung von keinem Werth für die graphische Statik, weil diese keine Zahlenverhältnisse kennt. Es verdient daher die Selbstevolute Taf. 1_2, die sich leichter und mithin auch genauer construiren lässt, immer den Vorzug vor allen andern. Der Kreisumfang, auf dem die Winkel gemessen werden können, ist hier in 24 Theile getheilt. Damit die Winkelbogen beider Spiralen nicht zu entfernt von ihr liegen, wurden in grösseren Entfernungen noch weitere Kreisbogen gezogen und eingetheilt, so dass die Längen der Kreisbogen nie viel kleiner als die entsprechenden Längen der Spiralen seien, und die Genauigkeit der Construction nicht leide.

Beispiel. Es sind die drei Höhen $a\,b\,c$ eines Parallelepipedons gegeben, wie gross ist die Seite x des Würfels gleichen Inhalts.

Man hat $x = \sqrt[3]{a\,b\,c}$ zu bilden.

oder $$\frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l}}\ ,$$

wo l den Leitstrahl des Ursprungs, die Einheit, bezeichnet. Nachdem man auch die Leitstrahlen der Längen a b und c (Taf. 1_2) bestimmt hat, addire man die drei Winkel $\widehat{a\,l}$, $\widehat{b\,l}$, $\widehat{c\,l}$ mit Berücksichtigung ihres Sinnes, und es wird x der Leitstrahl sein, welcher mit l einen Winkel bildet, der gleich dem $^1/_3$ dieser Summe ist.

Die Construction vereinfacht sich etwas, wenn man für l eine der gegebenen Höhen annimmt, es ist dann

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}}\ .$$

Ist a die grösste oder die kleinste der drei Höhen, so sind $\hat{b}a$ und $\hat{c}a$ gleichen Sinnes einfach zu addiren und zu dritteln. Ist dagegen a die mittlere Länge, und diese Annahme wurde Taf. 1_2 gemacht, so sind $\hat{b}a$ und $\hat{c}a$ entgegengesetzten Sinnes, man hat sie von einander abzuziehen; geht man dabei so zu Werke, dass die Differenz $a\hat{\triangle}$ im grösseren Winkel an a anzuliegen kommt, so wird x der Schenkel des nächsten Winkels sein, welcher diese Differenz $a\hat{\triangle}$ drittelt. Diese letzte Construction wird wohl immer die genauere sein.

Gar häufig hat man $x = \sqrt{ab}$ auszuführen, dies könnte nun auch unter der Form

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

leicht mittelst der Spirale geschehen, doch wird es wohl in allen Fällen einfacher und zweckmässiger sein, den Kreis zur Bestimmung der mittleren Proportionalen zu benutzen.

Mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab}$ sind:

a) Die Kreistangente zwischen den Abschnitten einer der durch den Endpunkt der Tangente gehenden Secanten.

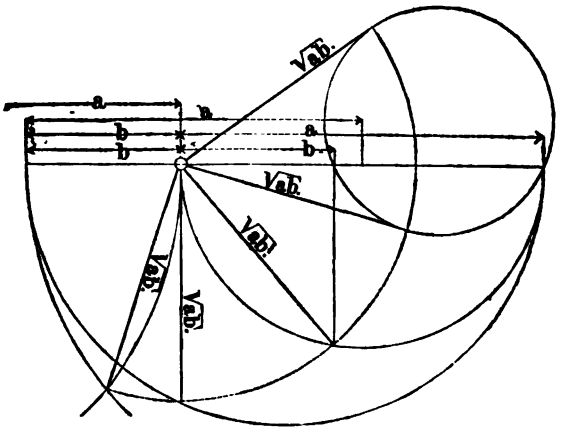
b) Die Sehne eines Kreises zwischen ihrer Projection auf einen der beiden durch ihre Endpunkte gehenden Durchmesser und dem Durchmesser.

c) Eine halbe Sehne zwischen den Abschnitten des auf ihr senkrecht stehenden Durchmessers.

d) Die gleich langen Sehnen zweier Kreisbogen gleich langen Halbmessers, welche einerseits durch einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt, anderseits durch die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte begrenzt werden: zwischen dem Segment, das die Kreisbogen auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte abschneiden und ihrem Halbmesser.

Die Richtigkeit von *a b c* wird in jeder Geometrie bewiesen, die Uebereinstimmung von *b* und *d* aber leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, dass das Segment in *d* gleich der doppelten Projection der Sehne in *b*, dagegen der Halbmesser in *d* nur gleich der Hälfte des Durchmessers in *b* ist.

Fig. 28.



In Fig. 28 sind die diesen Sätzen entsprechenden Constructionen der mittleren Proportionalen zusammengestellt.

Zweites Kapitel.

Logarithmen und Rechenschieber.

6. Addition und Subtraction von Zahlen durch Verschieben von Maassstäben.

Von ungemein grossem praktischen Nutzen ist die graphische Zusammensetzung der Logarithmen. Es wird dieselbe auf verschiedene Weise, namentlich aber mittelst der Rechenschieber ausgeführt.

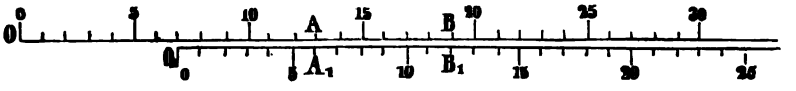
Diese Operationen sind zwar nicht in so hohem Grade graphischer Natur als wie das graphische Rechnen und die graphische Statik, weil sie analytische Daten graphisch behandeln und dann wieder analytisch geben, während letztere graphische Daten graphisch zusammensetzen und graphisch geben. Nichts desto weniger glauben wir diese Methoden hier nicht übergehen zu dürfen, weil sämmtliche Broschüren, die über Rechenschieber geschrieben wor-

den sind, nicht vom Begriffe des Logarithmus, vom Boden der Theorie ausgehen, daher nur Regeln für Handwerksburschenverstand geben. Da es nun ohne Verständniss der Logarithmen nicht möglich ist, sich des Rechenschiebers mit Vortheil zu bedienen, so hat er bei den gebildeten Technikern viel weniger Eingang gefunden, als er es verdiente. Der Zweck dieses Kapitels ist daher, ihm am hiesigen Polytechnikum den verdienten Eingang zu verschaffen.

Die Art und Weise, wie der Rechenschieber Zahlen addirt und abzieht, lässt sich am einfachsten an Maassstäben zeigen, die man verschiebt.

Denken wir uns die Theilstriche zweier gleich getheilter Maassstäbe in gleicher Weise fortlaufend numerirt und dann an einander verschoben (Fig. 29), so wird die Differenz zwischen den Nummern zweier einander gegenüberliegenden Theilstriche constant sein; in der Figur gleich 7. Bezeichnen wir die Nummern

Fig. 29.



der Theilstriche des oberen Maassstabes mit $a\ b\ c\ \ldots$, die der gegenüber liegenden des unteren mit $a_1\ b_1\ c_1\ \ldots$, wobei man sich unter diesen Buchstaben auch die Längen $O)\ A\ B\ C\ \ldots$ und $O_1)\ A_1\ B_1\ C_1\ \ldots$ denken kann, so hat man:

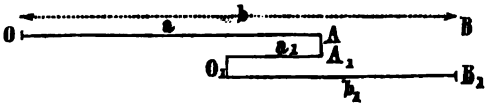
$$a - a_1 = b - b_1 = c - c_1 = \ldots,$$

Wird irgend eine dieser Grössen, z. B. b, als unbekannte betrachtet, so ist:

$$b = a - a_1 + b_1.$$

Um sich der ausgeführten Operationen stets klar bewusst zu sein, ist es nothwendig, sich durch Fig. 30 zu vergegenwärtigen, wie

Fig. 30.

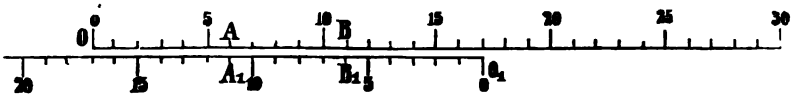


die Länge b aus dem Aneinanderreihen der Längen $a\ a_1\ b_1$ entstanden ist. Solche Aneinanderreihung ist immer möglich. Aus dem bisher Gesagten folgt:

Durch Verschieben von Maassstäben mit einstimmiger Theilung kann man von einer Zahl eine zweite abziehen und zur Differenz eine dritte addiren. Die Stellung der Maassstäbe bleibt unverändert, wenn die beiden ersten Glieder sich nicht ändern. Alle Werthe der gesuchten Summen, welche dann dem letzten Gliede b_1 entsprechen, stehen auf den beiden Maassstäben einander tabellarisch gegenüber. Dadurch, dass man eine der gegebenen Grössen verschwinden lässt, kann man zwei beliebige Zahlen addiren oder subtrahiren.

Man kann auch einen der beiden Maassstäbe umkehren, d. h. gegenstimmige Theilung verwenden (Fig. 31), dann ist die Summe

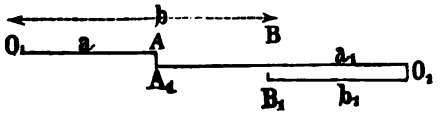
Fig. 31.



zweier gegenüberstehenden Nummern constant und man erhält die Resultate:

$$a + a_1 = b + b_1 = c + c_1 \ldots,$$
$$b = a + a_1 - b_1.$$

Fig. 32.



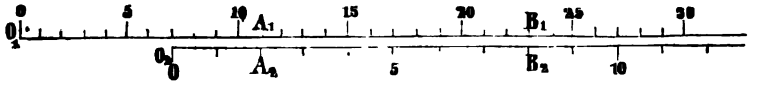
Das Aneinanderreihen der Zahlen wird durch Fig. 32 erläutert und es folgen die Sätze:

Durch Verschieben von Maassstäben mit gegenstimmiger Theilung kann man von der Summe zweier Zahlen eine dritte abziehen. Die Stellung der Maassstäbe bleibt unverändert, wenn die Summe der beiden ersten Glieder sich nicht ändert. Alle Werthe, welche sich zu dieser Summe ergänzen, stehen auf den beiden Maassstäben einander tabellarisch gegenüber. Dadurch, dass man eine der gegebenen

Grössen verschwinden lässt, kann man zwei beliebige Zahlen addiren oder abziehen.

Ferner kann man verschiedene, meistens doppelte und dreifache, Maassstäbe an einander verschieben. In Fig. 33 ist der untere Maassstab doppelt so gross als wie der obere. Hier müssen

Fig. 33.



offenbar die Nummern des unteren Maassstabes mit 2 multiplicirt werden, damit sie mit denen des oberen Maassstabes zusammengesetzt werden können; man hat also, wenn die Nummern der beiden Maasstäbe mit den Indexen 1 und 2 versehen werden:

$$a_1 - 2a_2 = b_1 - 2b_2 = c_1 - 2c_2 = \ldots,$$
$$b_1 = a_1 - 2a_2 + 2b_2,$$
$$b_2 = a_2 - \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{2}b_2.$$

Bei Anwendung gegenstimmig getheilter Maassstäbe erhält man:

$$a_1 + 2a_2 = b_1 + 2b_2 = c_1 + 2c_2 = \ldots,$$
$$b_1 = a_1 + 2a_2 - 2b_2,$$
$$b_2 = a_2 + \tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{2}b_1.$$

Wir glauben es unterlassen zu dürfen, diese Resultate in Worte zu kleiden.

Verwendet man Maassstäbe, die sich wie $m : n$ verhalten, so sind diese Verhältnisszahlen an entsprechender Stelle einzuführen.

7. Die gewöhnlichen Rechenschieber.

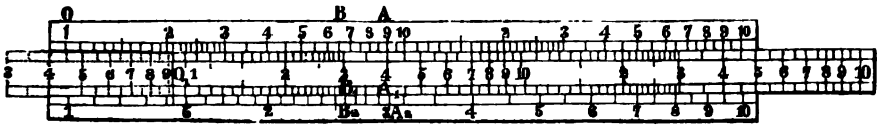
Bei gewöhnlichen Rechenschiebern sind die Strecken $O)AB \ldots O_1)A_1B_1 \ldots$ nicht mehr den Nummern $a\,b \ldots a_1\,b_1 \ldots$, sondern den Logarithmen derselben, also $\lg a$, $\lg b \ldots \lg a_1, \lg b_1 \ldots$ proportional.

Ganz auf graphischem Wege kann man zu diesen Logarithmen mit Hülfe der logarithmischen Spirale Taf. 1_1 und $_2$ gelangen, wenn man auf derselben die Punkte bestimmt, deren Entfernung vom Pol $O = 1$, $a, b \ldots$ und dann die Abscisse des treffenden Theilstriches den Winkeln proportional macht, welche die entsprechen-

den Radienvectoren mit einander bilden; diese Längen werden also erhalten, wenn man die Bogenstücke eines von O als Mittelpunkt beschriebenen Kreises zwischen den treffenden Radienvectoren rectificirt. Man bekommt verschiedene Scalenlängen durch Aenderung des Kreisradius. Diese Längen wiederholen sich für die Radienvectoren von $^1/_{10}$ bis 1, 1 bis 10, 10 bis 100. Gewöhnlich werden zwei solcher Scalen fortlaufend aufgetragen. In dem eben Gesagten wollen wir nur einen rein graphischen Ursprung der Logarithmen andeuten; in der Wirklichkeit aber wird man einfach die Logarithmen der Zahlen 1 bis 100 auf irgend einem Maassstab abgreifen und zwei Mal fortlaufend auftragen.

Mit diesen beiden Maassstäben wird dann gewöhnlich noch ein dritter im doppelten Maassstabe verbunden, der demnach die Zahlen von 1 bis 10 nur ein Mal enthält, wie Fig. 34 es zeigt.

Fig. 34.



In einem mit einer Coulisse versehenen Stabe spielt eine Zunge. Der obere Rand, dessen Nummern wir schlechtweg mit $a\ b$ ... bezeichnen werden, enthält zwei Logarithmenscalen. In gleicher Weise ist der obere Rand der Zunge getheilt, dem wir den Index 1 zuweisen und dessen a und b ... gegenüberliegende Nummern wir daher mit a_1 und b_1 ... bezeichnen. Wenn die Eintheilung des unteren Randes der Zunge identisch mit der des oberen ist, so werden dessen Nummern in der Folge mit dem gleichen Index, also mit $a_1\ b_1$ ... bezeichnet. Sind aber wie in Fig. 35 (s. Nr. 9) die Logarithmen auf diesem Rand in doppeltem Maassstabe aufgetragen, so dass derselbe nur eine Logarithmenscala enthält, so werden wir diese Nummern mit $a_2\ b_2$ ... bezeichnen. Auf dem unteren Rand des Stabes, dem wir den Index 3 zuweisen, sind die Logarithmen immer im doppelten Maassstab aufgetragen, und er trägt daher nur eine Scala.

Wendet man auf den oberen Rand des Stabes und der Zunge die Linienaddition von Fig. 30 an, so erhält man

$$\lg b = \lg a - \lg a_1 + \lg b_1,$$

oder

$$b = \frac{a}{a_1} b_1.$$

In Fig. 34 z. B. $b = \frac{9}{4} \cdot 3 = 6{,}75.$

Der frühere Satz in Nr. 6, dass die Stellung des Schiebers sich nicht ändere, wenn die Differenz der zwei ersten Zahlen a und a_1 sich nicht ändert, überträgt sich jetzt auf die Logarithmen; sie ändert sich nicht, wenn die Differenz dieser Logarithmen, d. h. der Quotient der entsprechenden Zahlen, constant bleibt. In Fig. 34 z. B. stehen alle Zahlen einander tabellarisch gegenüber, deren Quotient $= \frac{9}{4} = 2{,}25$ ist.

Da 0 der Logarithmus von 1 ist, so kann man dadurch, dass man eine der obigen 3 Zahlen = 1 werden lässt, je zwei beliebige Zahlen mit einander multipliciren, oder die eine durch die andere dividiren.

Das eben Entwickelte fassen wir also zusammen:

Durch Verschieben der beweglichen Zunge eines Rechenschiebers mit einstimmiger Theilung kann man den Quotienten zweier beliebiger Zahlen mit einer dritten Zahl multipliciren, also auch jede Zahl mit einer zweiten multipliciren oder dividiren. Die Stellung des Schiebers ändert sich nicht, wenn die beiden ersten Zahlen sich nicht ändern; demnach stehen alle Zahlen, deren Quotient constant ist, auf dem Schieber einander tabellarisch gegenüber.

Da die Scalen den Mantissen der Logarithmen entsprechen, so müssen deren Charakteristiken besonders addirt werden, was in der Regel im Kopf geschieht. Wären die Mantissen der zusammenzusetzenden Logarithmen so gross, dass ihre Summe die Einheit überstiege, so würde das Ende des Linienzuges von Fig. 30 in die nächste Scala fallen. Also muss die Charakteristik, die sich sonst ergeben würde, um 1 vermehrt werden, wenn das Ende des Linienzuges die nächste Scala überragt, dagegen um 1 vermindert werden, wenn z. B. in Folge eines grossen Nenners das Ende des Linienzuges in die vorausgehende Scala fällt.

Wäre z. B. $b = \frac{9}{4} \cdot 7$ zu bilden, so würde bei der folgenden Stellung des Schiebers:

0;	**1**		9	10	$15^3/_4$,
1;		1	4		7 ,

zur Summe der Charakteristiken, welche im gegenwärtigen Fall = 0 ist, $\underline{1}$ zu addiren sein, weil der bei der fetten 1 beginnende Linienzug über die nächste Scala 10 hinausfällt, die Charakteristik ist also definitiv 1 und das Resultat = $15^3/_4$.

Zur Bildung von $b = \frac{90}{0{,}4} \cdot 700$ wäre bei derselben Schieberstellung die Charakteristik

$$1 - \underline{9} + 2 + 1 = 5.$$

Das Resultat also 157500.

Wäre $b = \frac{2}{9} \cdot 3{,}5$ zu bilden, so müsste man bei der folgenden Schieberstellung

0;	1		7,8	**1**	2,
1;		1	3,5		9,

den Linienzug bei der fetten 1 beginnen lassen, weil die vorausgehende Scala noch zur Verwendung kommt. Zieht man dann von der darauf folgenden 2 lg 9 ab, so gelangt das Ende des Zuges weit in die vorausgehende Scala, und selbst nach Addition von lg 3,5 erreicht der Linienzug die Scala noch nicht. Also ist die Charakteristik -1 oder $\underline{9}$ und das Resultat = 0,78.

Hätte man zu bilden $\frac{0{,}2}{900} \cdot 0{,}035$, so wäre die Charakteristik:

$$\underline{9} - 2 + \underline{8} - 1 = \underline{4},$$

und das Resultat ,0000078.

Ist der Rechenschieber so construirt, dass die Scala umgekehrt werden kann, so können die bis jetzt behandelten Aufgaben ebenfalls gelöst werden. Der Linienzug unterscheidet sich vom vorigen nur dadurch, dass zuerst die beiden zu addirenden Logarithmen und hierauf der abzuziehende aneinandergereiht werden. Die Schieberstellung für das letzte Beispiel wäre:

0;		7,8	**1**	2		,
1;	1	9	7	3,5	1.	

Das Product aller unter einander stehenden Zahlen ist jetzt = 7. Man kann also:

Durch Verschieben der Zunge mit gegenstimmiger Theilung das Product zweier Zahlen durch eine dritte dividiren, also auch jede Zahl mit einer anderen multipliciren oder dividiren.

Die Stellung des Schiebers ändert sich nicht, wenn die beiden ersten Zahlen, d.h. das Product derselben, sich nicht ändert; in dieser Stellung stehen daher alle Zahlen constanten Productes einander tabellarisch gegenüber.

Insbesondere stehen sich reciproke Zahlen gegenüber, wenn die 1 der Zunge auf die 1 des Schiebers gestellt wird.

Bisher haben wir nur die oberen Ränder des Stabes und der Zunge benutzt; wir wollen jetzt auch deren untere Ränder zuziehen. Bei der Scalendisposition von Fig. 34 sind die Streckendifferenzen:

$$\lg a - \lg a_1 = 2 \lg a_3 - \lg a_1, \quad \text{constant.}$$

Sucht man daher die b aus den Verhältnissen:

$$\frac{b}{b_1} = \frac{b_3^2}{b_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{a_3^2}{a_1},$$

so erhält man mit Weglassung der doppelt vorkommenden und derjenigen Werthe, die wir schon kennen, folgende neue Lösungen:

$$b_1 = \frac{a_1}{a_3^2}\, b = \frac{a_1}{a}\, b_3^2 = \frac{a_1}{a_3^2}\, b_3^2,$$

$$b_3 = \frac{a_3}{\sqrt{a_1}}\sqrt{b_1} = \sqrt{\frac{a}{a_1}\, b_1}.$$

Wir unterlassen es, diese Resultate in Worte zu kleiden, und beschränken uns auf die Angabe von zwei Zungenstellungen, eine für die obere und eine für die untere Zeile.

Es sei zu bilden: $b_1 = \frac{4}{9} \cdot 2^2{,}6 = 3$ (genau $= 3{,}0044$, man merkt auf dem Rechenstab gerade noch, dass die 3 scharf ist).

Zungenstellung wie Fig. 34:

0;	1				9				,
1;			1		4	1			,
1;		8	1	3		1	1,2	3	,
3;	1	1,342		2,6	3		5,2	8,22	;

Hätte man statt 9 im Nenner 3^2, so könnte alles mittelst der beiden unteren Ränder 1 und 3 ausgeführt werden.

Fällt das Ende des Linienzuges in die erste Scala, so hat man einfach die Charakteristiken zu addiren, wobei die des Quadrats natürlich doppelt zu nehmen ist. Fällt dagegen das Ende des Linienzuges über die erste Scala hinaus, so ist 1 zum Logarithmus zu addiren. Für

$$b_1 = \frac{40}{0{,}9} \cdot 52^2 = 120178$$

findet dies statt, also ist die Charakteristik

$$= 1 - \underline{9} + 2 \,.\, 1 + 1 = 5.$$

Dieselbe Stellung löst auch die Aufgabe:

$$b_3 = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 3} = 2{,}6 \text{ (genau 2,598)},$$

nur hat man sich den Ursprung bei den äussersten 1 links (die nicht fett gedruckt sind) zu denken. Sind die Charakteristiken nicht gleich 0, so muss ihre Summe natürlicher Weise halbirt werden. Hiebei kann es, wenn die Summen der Charakteristiken ungerade sind, vorkommen, dass sie nach der Division mit dem Bruchtheil $^1/_2$ behaftet sind. Denkt man in diesen Fällen den unteren Rand 3 des Stabes als die eigentliche Logarithmenscala, so erscheinen die Längen der oberen Scalen $\sqrt{a}$, $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{b_1}$ als Halblogarithmen, mithin bedeutet $\frac{1}{2}$ als Charakteristik die Länge einer oberen Scala, die dem logarithmischen Resultat auf der Scala 3 beigefügt werden muss,

$$\text{z. B. } b_3 = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 30} = 8{,}22 \text{ (genau 8,216)}.$$

Hier ist die Charakteristik $= \frac{1}{2}$, d. h. es ist der Linienzug um eine obere Scalenlänge zu verlängern und bei der darauffolgenden 3 das Resultat von 8,22 abzulesen, wie das ebenfalls auf dem Schema angedeutet ist.

Fällt der so verlängerte Linienzug über die untere Scala 3 hinaus, so kann man auch auf der vorausgehenden Scala ablesen, hat aber dann 1 zur Charakteristik zu addiren, d. h. man setzt $1 - \frac{1}{2}$ statt $\frac{1}{2}$.

$$\text{z. B. } b_3 = \sqrt{\frac{9}{4}}\,80 = 13{,}42 \text{ (genau } 13{,}416).$$

Hier kann nur auf der vorausgehenden Scala abgelesen werden (s. das Schema), dafür aber ist die Charakteristik = 1.

Da die Scala 3 nur einfach vorhanden ist, so ist es nicht immer möglich, alles gleichzeitig abzulesen, z. B. wenn auf Scala 0 und 1 das Verhältniss $\frac{9}{4}$ eingestellt ist (s. Fig. 34), so ist es nicht möglich, gleichzeitig auf 1 und 3 die Verhältnisse zwischen $\frac{4{,}4}{1^2}$ bis $\frac{1}{1^2{,}5}$ und zwischen $\frac{1}{4^2{,}74}$ bis $\frac{4{,}4}{1^2}$ abzulesen.

In solchen Fällen kann man sich aber gar leicht mittelst eines Zirkels helfen; man nimmt den Theil, der die Scala überragt, in den Zirkel und trägt ihn vom anderen Ende der Scala aus auf. Auch mittelst der festen oberen Scalalänge, die man für immer in den Zirkel nimmt oder die man auf dem Rand eines Papierstreifens markirt, kann man jede Zahl um eine Scala versetzen und dort auf dem unteren Rand ablesen, wohin die Zunge nicht mehr reichte. Diese Operationen bedürfen keiner weiteren Erörterung, indem sie ja selbstverständlich sind; jene Betrachtungen über Möglichkeit und Unmöglichkeit der Ablesungen, welche z. B. Herrn *Sella* so viel zu schaffen machten, übergehen wir ganz; mittelst Zirkels oder Papierstreifens sind alle Operationen ausführbar.

Setzt man eine oder zwei der Längen S. 44 = 1 und einander gleich, so kann man noch die folgenden Operationen ausführen:

Zahlen quadriren und cubiren; einfache Zahlen, Quadrate und Cuben durch einfache Zahlen und Quadrate dividiren. Quadratwurzeln aus der einfachen und aus der Potenz 3 ausziehen, d. h. die Potenz $\frac{3}{2}$ bilden; mittlere Proportionale bestim-

men, und diese Potenzen noch durch eine Quadratwurzel dividiren.

Die Einübung dieser einfachen Operationen können wir füglich dem geneigten Leser überlassen und wollen uns nur noch eine Bemerkung über das Cubiren und das entsprechende Wurzelausziehen erlauben.

Um diese Operationen auszuführen, thut man am besten, die Zunge umzukehren; stellt man dann zwei gleiche Zahlen einander gegenüber, so giebt das Ende der Zunge auf dem oberen Rande die Cubikzahl an. Bei dem Gegenüberstellen von Zahlen unter $\sqrt[3]{10} = 2{,}154$ fällt das Ende des Linienzuges, bestehend aus dem Doppellogarithmus auf dem Rand 3 und einem einfachen Logarithmus auf 1, in die erste Scala; die Charakteristik ist einfach gleich dem 3fachen der Zahl. Wenn die Zahlen zwischen 2,154 und $\sqrt[3]{100} = 4{,}642$ einander gegenübergestellt werden, so fällt das Ende des Linienzuges in die zweite Scala, und die Charakteristik ist gleich dem 3fachen der Zahl $+ 1$. Werden grössere Zahlen einander gegenübergestellt, so fällt das Ende des Linienzuges in die zweite Scala und die Charakteristik ist gleich dem 3fachen der Zahl $+ 2$.

Die Regeln für das Cubikwurzelausziehen erhalten wir durch das Umkehren des eben Gesagten.

Man kann die folgenden Cubikwurzeln ausziehen:

$$b_3 = \sqrt[3]{a \,.\, a_1} = \sqrt[3]{a^2_3 \,.\, a_1}\,.$$

Man stellt nach Umkehrung der Zunge die Zahlen a auf den entsprechenden Scalen einander gegenüber und sieht, welche gleiche Zahlen auf 3 und 1 einander gegenüberstehen. Dieses Gegenüberstehen muss gesucht werden zwischen 0 und 2,15, wenn die Charakteristik keine Bruchtheile enthält, zwischen 2,15 und 4,64, wenn sie aus einer ganzen Zahl $+\frac{1}{3}$ oder $-\frac{2}{3}$ besteht, und endlich zwischen 4,64 und 10, wenn sie aus einer ganzen Zahl $+\frac{2}{3}$ oder $-\frac{1}{3}$ besteht.

Z. B.: Es sei zu bilden $b_3 = \sqrt[3]{4 \,.\, 9} = \sqrt[3]{4 \,.\, 3^2} = \sqrt[3]{2^2 \,.\, 9}$.
Schieberstellung:

0;	1			4	9	1		3,6		,
1;			1	9	4			1		,
1;		1,532	1	9	4		3,3	1	7,12	,
3;	1	1,532		2	3		3,3	6	7,12	1.

$\sqrt[3]{3,6} = 1,532$, denn die Charakteristik ist = 0,

$\sqrt[3]{36} = 3,3(019)$ „ „ „ „ = ⅓,

$\sqrt[3]{360} = 7,12(7,114)$ „ „ „ = ⅔.

Bei dem Abschätzen der letzten Decimalen ist darauf zu achten, dass, wenn zwei gleiche Zahlen auf 1 und 3 einander gegenüberstehen, die Längendifferenzen für gleiche kleine Nummerndifferenzen auf 1 nur halb so gross sind, als wie auf 3; werden demnach in der Nähe des Zusammentreffens zwei gegenüberliegende Zahlen abgelesen, so ist die Zahlendifferenz zwischen ihnen und der Zahl des wirklichen Zusammentreffens auf 1 doppelt so gross als wie auf 3. Stellt man z. B. die 9 einander gegenüber, so hat man:

1;	9,1	9	8,9 ,
3;	8,95	9	9,05.

Man sieht, die 9 liegt in dem Drittel von 9,05 gegen 8,9 hin und im Drittel von 8,95 gegen 9,1. Hiernach kann zuweilen leicht interpollirt werden.

8. Ueber den Gebrauch der gewöhnlichen Rechenschieber.

Auf den gewöhnlichen Rechenschiebern von 0,26 bis 0,30 Meter Länge beträgt zwischen 1 und 2 die Entfernung der Theilstriche 0,02, zwischen 2 und 5 0,05, zwischen 5 und 10 0,1; nimmt man an, dass noch ½ mit ziemlicher Genauigkeit eingeschätzt werden könne, so beträgt die Genauigkeit

zwischen 1 und 2; 0,004 : (1 bis 2) = 0,004 bis 0,002,
„ 2 „ 5; 0,01 : (2 „ 5) = 0,005 „ 0,002,
„ 5 „ 10; 0,02 : (5 „ 10) = 0,004 „ 0,002.

Sagen wir daher rund $^1/_{300}$.

Der Gebrauch des Rechenschiebers ist daher überall angezeigt, wo keine grössere Genauigkeit gefordert wird. Also bei

der Berechnung von Geldbeträgen, die das 300fache der kleinsten Münze nicht überschreiten; bei allen approximativen Kostenberechnungen; bei Berechnung aller Balkendimensionen, denn bei Annahme der Festigkeitscoefficienten ist man lange nicht des $^1/_{300}$ sicher; bei all den kleinen Rechnungen, die der Constructeur nebenher auszuführen hat, denn selten verlangt er grössere Genauigkeit. In all den eben aufgezählten Fällen aber ist der Rechenschieber absolut zu empfehlen, denn die Zeit der Rechnung wird erspart und Fehler können höchstens beim Ablesen gemacht werden. Um scharf ablesen zu können, machen wir noch auf den folgenden Vortheil aufmerksam. Es ist schwer, direct einzustellen oder abzulesen, wenn auf beiden Rändern Decimalen zwischen den Theilstrichen einzuschätzen sind, während es nicht schwer hält, auf einen Strich genau einzustellen. Man thut daher gut, die eine Zahl, und zwar diejenige mit den kleineren Intervallen, so zu corrigiren, dass von der anderen Scala genau ein Theilstrich einzustellen ist. Es sei $a + \delta$ die Zahl auf der Seite der grössern Intervalle, δ der einzuschätzende Theil zwischen den Intervallen, immer $< 0{,}1$. Diese Zahl sei gegenüberzustellen a_1, die ebenfalls nicht genau mit einem Theilstrich zusammentrifft. Da nun

$$a_1 : a + \delta = a_1 - \frac{a_1 \delta}{a + \delta} : a$$

ist, so sieht man, dass sich die Stellung des Schiebers nicht ändert, wenn man statt $a + \delta$ und a_1 den scharfen Theilstrich a der corrigirten Zahl $a_1 - \frac{a_1 \delta}{a + \delta}$ gegenüberstellt; die Correction $\delta' = \frac{a_1 \delta}{a + \delta}$ kann aber direct auf dem Schieber abgelesen werden, denn aus $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{a_1}{a + \delta}$ folgt, dass sie auf der Seite von a_1 der Correction δ auf der Seite von a gegenüber liegt.

Beispiel. Es sei 312 der Zahl 743 gegenüberzustellen, die Intervalle der Theilstriche sind bei 31 grösser als bei 74, mithin stellen wir 31 ein und corrigiren 743. Wir stellen provisorisch 31 auf 74:

0;	1	2	31,
1,		4,78	74,

und finden die zwei gegenüber 4,78 rund 5, es muss also 743 um

5 corrigirt werden, wir haben daher den Theilstrich 31 auf 738 zu stellen, was jetzt ganz scharf geschehen kann.

Umgekehrt verfährt man bei dem Ablesen, man liest bei dem Theilstrich 31 genau 738 ab und addirt die Correction 5.

Für gegenstimmige Scalen hat man:

$$(a + \delta)\ a_1 = a\left(a_1 + \frac{a_1 \delta}{a}\right).$$

In diesem Fall ist also die Correction nicht so bequem, man muss erst a_1 auf δ einstellen und die Correction bei a ablesen:

0;	1	2	3,1	,
1;		7,4	4,8	1.

Ebenso verhält es sich bei dem Einstellen von Zahlen auf der Scala 1 und auf der Doppelscala 3. Man hat bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von δ:

$$a_1 : (a_3 + \delta)^2 = a_1 - \frac{2\,a_1\,\delta}{a_3 + \delta} : a_3^2 \quad \text{und}$$

$$a_1 + \delta : a_3^2 = a_1 : \left(a_3 - \frac{a_3\,\delta}{2\,(a_1 + \delta)}\right)^2.$$

Man hat also zuerst die Zahlen auf den Scalen 0 und 1 einander gegenüber zu stellen, als ob die Zahl a_3 nicht quadratisch wäre, und dann die Correction zu verdoppeln oder zu halbiren, je nachdem sie auf den Scalen 1 oder 3 verwendet werden soll.

Diese Regel ändert sich nicht, wenn die Schieber und Zunge gegenstimmig verwendet werden.

Durch einige Beispiele wollen wir jetzt noch zeigen, wie einfache Formeln der Behandlung mit dem Rechenschieber angepasst werden und wie vortheilhaft in gewissen Fällen die Verwendung des Rechenschiebers ist.

Es genügt hier auf die Nützlichkeit des Rechenschiebers aufmerksam zu machen, wenn innerhalb der Genauigkeitsgrenzen mehrere Zahlen mit einem constanten Verhältniss zu multipliciren sind. Man stellt das Verhältniss ein und tabellarisch stehen die Producte den Factoren gegenüber, z. B. bei Kostenberechnungen, wo viele Gegenstände mit dem gleichen Preis zu multipliciren sind. Bei Gesellschaftsrechnungen stellt man die Gesammtmasse den Totalkosten gegenüber, und allen Partialquantitäten stehen die Partialkosten gegenüber.

Bei Maassreductionen wird die Verwandlungszahl der 1 gegenübergestellt und die gleiche Längen bezeichnenden Maasse stehen einander gegenüber. Auch zusammengesetzte Maassreductionen lassen sich auf diese Weise direct gegenüberstellen; z. B. die Engländer geben den auf Flächen vertheilten Druck π_e in Pfunden von 0,4534 Kilogr. oder Tonnen von 1,0156 tn. pro engl. □″ von 0,^{m}0254 Seitenlänge an. Wie gross ist dieser Druck π_{fr} in Kilogrammen oder in Tonnen pro 1 □Centimeter? Wir verwandeln die englischen Pfunde π_e und den engl. □″ in französisches Maass, dann muss der Quotient 0,4534 π_e : $2{,}54^2 = \pi$ Klgr. pro □Centimeter geben. — Werden also auf 1 und 3 0,4534 und 2,54 gegenübergestellt, so stehen die verwandelten Maasse auf 0 und 1 einander gegenüber:

0;	1	14,23	14,7	,
1;	0,703	1	1,033	,
1;	0,703	1		4,4534,
3;	1		Ath.	2,54 .

Für Tonnen hat man:

0;	1	4,45	6,36	,
1;	0,1574	0,7	1	,
1;				1,016,
3;				2,54 .

Auf dieselbe Weise können Kosten auf Längen und Flächen verwandelt werden u. s. w.

Wenn die Producte zweier Zahlen oder einer Zahl und eines Quadrates mit einem constanten Coefficienten zu multipliciren sind, so muss man ein für allemal den reciproken Coefficienten ausrechnen, und kann dann unmittelbar die Rechnung mittelst des Schiebers ausführen.

Wir stellen hier einige Formeln zur Berechnung geometrischer Körper mit den nothwendigen reciproken Coefficienten zusammen. Es bezeichne d den Durchmesser, u den Umfang des vorkommenden Kreises, h die Höhe des Körpers, s die Seite, Länge der Ergänzungslinie seines Mantels.

Flächeninhalt des Mantels eines Cylinders	$\pi d h$	$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$	$u h$
Flächeninhalt des Mantels eines senkrechten Kreiskegels	$\frac{1}{2}\pi d s$	$\frac{2}{\pi} = 0{,}6366$	$\frac{1}{2} u h$

Flächeninhalt des Mantels eines abgestumpften senkrechten Kreiskegels	$\pi\frac{d+d_1}{2}s$	$\frac{2}{\pi} = 0{,}6366$	$^1/_2(u+u_1)s$	2
Flächeninhalt eines Kreises	$^1/_4\pi d^2$	$\frac{4}{\pi} = 1{,}273$	$\frac{u^2}{4\pi}$	$4\pi = 12{,}57$
Flächeninhalt einer Kugelzone	$\pi d h$	$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$	$u h$	
Cubikinhalt eines Kreiscylinders	$^1/_4\pi d^2 h$	$\frac{4}{\pi} = 1{,}273$	$\frac{u^2 h}{4\pi}$	$4\pi = 12{,}57$
Cubikinhalt eines Kreiskegels	$^1/_{12}\pi d^2 h$	$\frac{12}{\pi} = 3{,}820$	$\frac{u^2 h}{12\pi}$	$12\pi = 37{,}70$
Cubikinhalt einer Kugel	$^1/_6\pi d^3$	$\frac{6}{\pi} = 1{,}910$	$\frac{1}{6\pi^2}u^3$	$6\pi_2 = 59{,}22$

Treten an die Stelle der Kreise regelmässige Vielecke, gegeben durch ihren Umfang und durch die Durchmesser der ein- oder umschriebenen Kreise d_e oder d_u, so wird π gleich $\frac{u}{d_e} = \pi_e$ und $\frac{u}{d_u} = \pi_u$. Der Flächeninhalt des Vielecks ist dann $= {}^1/_4\, u\, d_e = \frac{u^2}{4\pi_e} = {}^1/_4\,\pi_e\, d_e^2 = \frac{\pi_u^2 d_u^2}{4\pi_e}$.

Wir geben hier die Werthe von π_e, π_u, $4\pi_e$ und die reciproken Werthe von $\frac{\pi_u^2}{4\pi_e}$, $^1/_4\,\pi_e$.

	π_u	π_e	$4\pi_e : \pi_u^2$	$4 : \pi_e$	$4\pi_e$
Dreieck	2,598	5,196	3,0793	0,7698	20,784
Viereck	2,828	4	2	1	16
Fünfeck	2,939	3,633	1,6813	1,1011	14,531
Sechseck	3	3,464	1,5396	1,1547	13,857
Siebeneck	3,037	3,371	1,4618	1,1866	13,484
Achteck	3,062	3,314	1,4142	1,2071	13,255
Neuneck	3,078	3,276	1,3821	1,2211	13,103
Zehneck	3,090	3,249	1,3612	1,2311	12,997
Elfeck	3,099	3,229	1,3449	1,2387	12,917
Zwölfeck	3,106	3,215	1,3333	1,2440	12,861
Dreizehneck	3,111	3,208	1,3259	1,2468	12,833
Vierzehneck	3,115	3,196	1,3179	1,2528	12,782
Fünfzehneck	3,119	3,188	1,3112	1,2546	12,753
Sechszehneck	3,122	3,183	1,3065	1,2568	12,730

Sind statt der oben angegebenen Volumina die Gewichte der Körper zu berechnen, so wird man am zweckmässigsten den reciproken Werth der specifischen Gewichte mit den Coefficienten verbinden, um die gewünschten Gewichte mittelst einer einzigen Schieberstellung zu erhalten. Für viele Stoffe hat Herr „*J. F. Artur*, Règle logarithmique, Paris 1845“ die folgenden Coefficienten berechnet:

Das specifische Gewicht	γ'
Dessen reciproken Werth zur Berechnung von prismatischen Stäben aus Querschnittsfläche und Länge	$\gamma = 1 : \gamma'$
Zur Berechnung von Cylindern aus Länge und Quadrat des Durchmessers	$4 : \pi\gamma'$
Zur Berechnung von Cylindern aus Länge und Quadrat des Umfanges	$4\pi : \gamma'$
Kugeln aus dem Cubus des Durchmessers	$6 : \pi\gamma'$
Kugeln aus dem Cubus des Umfanges	$6\pi^2 : \gamma'$

Auf Seite 54 und 55 theilen wir diese Coefficienten für eine Auswahl von Stoffen mit; und fügen hier ein einziges Beispiel über den Gebrauch bei:

Beispiel. Die Entfernung der oberen und unteren Fläche zweier mit einem Bolzen von $2^1/_2$ Centimeter zu verbindenden Balkenflächen beträgt 66 Centimeter. Wie viel wiegt der Bolzen?

Für Kopf und Mutter gebe man den 20fachen Durchmesser, also 50 Centimeter zu. Den Coefficient $\frac{4}{\pi\gamma'}$ ist für Eisencylinder gleich 0,1635.

Schieberstellung für $\frac{0{,}25^2 . 11{,}6}{0{,}1635}$:

0;	444	Inhalt,
1;	116	1634 Länge,
2;	1	25 Durchmesser.

Charakteristik $2 : .9 - 9 + 1 = 0$.

Der Bolzen wiegt demnach 4,44 Kilogramm.

In sehr vielen Fällen genügt die Genauigkeit des Rechenschiebers zur Berechnung von Aufgaben aus dem Wasserbau; die anzuwendenden Erfahrungscoefficienten bieten in der Regel keine Genauigkeit von $\frac{1}{300}$, also genügt der Rechenschieber; und es

Materialien	Specifisches Gewicht γ'	Reciprokes specifisches Gewicht $1:\gamma'=\gamma$	Cylinder ausgedrückt durch das Quadrat des Durchmessers $4:\pi\gamma'$	Cylinder ausgedrückt durch das Quadrat des Umfangs $4\pi:\gamma'$	Kugel ausgedrückt durch den Cubus des Durchmessers $6:\pi\gamma'$	Kugel ausgedrückt durch den Cubus des Umfangs $6\pi^2:\gamma'$
A. Feste Körper.						
Platin, gewalztes . .	22,069	0,0453	0,0577	0,5694	0,0865	2,683
Gold, geschmiedet .	19,3617	0,0516	0,0658	0,6490	0,0986	3,058
Quecksilber (bei 0°)	13,598	0,0735	0,0936	0,9241	0,1405	4,355
Blei, gegossen . . .	11,3523	0,0881	0,1122	1,107	0,1682	5,216
Silber, gegossen . .	10,4743	0,0955	0,1216	1,200	0,1823	5,654
Kupfer, gewalzt . .	8,95	0,0117	0,1423	1,404	0,2134	6,616
Nickel, geschmiedet	8,666	0,1154	0,1469	1,450	0,2204	6,833
Stahl	7,8163	0,1279	0,1629	1,608	0,2443	7,576
Schmiedeisen	7,7880	0,1284	0,1635	1,614	0,2452	7,604
Gusseisen	7,2070	0,1388	0,1767	1,744	0,2650	8,217
„ weiss . .	7,67	0,1304	0,1660	1,638	0,2490	7,721
Zinn, gegossen . . .	7,2914	0,1371	0,1746	1,723	0,2619	8,122
Zink, gegossen . . .	7,19	0,1391	0,1771	1,748	0,2656	8,236
Glimmer 2,7 bis . .	3	0,3333	0,4244	4,189	0,6366	19,74
Kalkstein 2,6 bis Marmor	2,8376	0,3524	0,4487	4,429	0,6731	20,37
Quarz 2,636—2,653	2,65	0,3774	0,4805	4,743	0,7208	22,35
Feldspath 2,49—2,62	2,6	0,3846	0,4897	4,833	0,7345	22,78
Graphit, Mühlsteine etc.	2,5	0,4	0,5093	5,027	0,7639	23,69
Gypsstein . . 2,2—	2,4	0,4167	0,5305	5,236	0,7958	24,67
Kreide, Sandstein 2,2—	2,3	0,4348	0,5536	5,464	0,8304	25,75
Erde, kiesig. Thon 1,86—	2,2	0,4545	0,5787	5,712	0,8681	26,92
Schwefel	2	0,5	0,6366	6,283	0,9549	29,61
Sand, trocken 1,4 — nass	1,9	0,5263	0,6701	6,614	1,005	31,17
Alabaster	1,8470	0,5336	0,6794	6,706	1,019	31,60
Sandmörtel	1,8	0,5556	0,7073	6,981	1,061	32,90
Thon, Schlamm 1,66 — 1,76	1,7	0,5882	0,7489	7,392	1,123	34,83
Cementmörtel 1,7 —	1,6	0,625	0,7958	7,854	1,194	37,01
Backstein 2,2 —	1,5	0,6667	0,8488	8,378	1,273	39,48
Gypsmilch 1,6, trock.	1,4	0,7143	0,9094	8,976	1,364	42,29
Kohle, dichte	1,3292	0,7523	0,9579	9,454	1,437	44,55
Gyps, gebrannt Humus	1,25	0,8	1,0186	10,053	1,528	47,37
Kalk, gelöscht 1,4, gebrannt	0,8	1,25	1,5915	15,708	2,387	74,02
Eichenholz, frisch .	0,930	1,075	1,369	13,51	2,054	63,67
„ trocken .	1,670	0,5988	0,7624	7,525	1,144	35,46
Mahagoniholz	1,063	0,9407	1,198	11,82	1,797	55,71
Buchsholz	0,91	1,099	1,399	13,81	2,099	65,07
Buchenholz	0,852	1,174	1,494	14,75	2,242	69,50
Eschenholz	0,845	1,183	1,507	14,87	2,260	70,08

Materialien	Specifisches Gewicht γ'	Reciprokes specifisches Gewicht $1:\gamma'=\gamma$	Cylinder ausgedrückt durch das Quadrat des Durchmessers $4:\pi\gamma'$	Cylinder ausgedrückt durch das Quadrat des Umfangs $4\pi:\gamma'$	Kugel ausgedrückt durch den Cubus des Durchmessers $6:\pi\gamma'$	Kugel ausgedrückt durch den Cubus des Umfangs $6\pi^2:\gamma'$
Erlen- und Ulmenholz	0,800	1,250	1,592	15,71	2,387	74,02
Pflaumenbaumholz	0,785	1,274	1,622	16,01	2,433	75,44
Apfelbaumholz	0,733	1,364	1,737	17,14	2,606	80,79
Kirschbaumholz	0,715	1,399	1,781	17,58	2,671	82,82
Nussbaumholz	0,671	1,490	1,898	18,73	2,846	88,25
Birnenbaumholz	0,661	1,513	1,926	19,01	2,889	89,59
Kiefernholz	0,657	1,522	1,938	19,13	2,907	90,13
Tannenholz	0,550	1,818	2,315	22,85	3,472	107,7
Linden- und Haselnussbaumholz	0,604	1,656	2,108	20,81	3,162	98,04
Pappel, weisse spanische	0,529	1,890	2,407	23,75	3,610	111,9
Pappel, gewöhnliche	0,383	2,611	3,324	32,81	4,987	154,6
Korkholz	0,240	4,167	5,305	52,36	7,958	246,7
B. Flüssige Körper.						
Schwefelsäure	1,8409	0,5432	0,6916	6,826	1,037	32,17
Wasser d. Todtensees	1,2403	0,8063	1,027	10,13	1,540	47,74
Meerwasser	1,0263	0,9744	1,241	12,24	1,861	57,70
Wasser, destillirt	1,0	1,0000	1,273	12,57	1,910	59,22
Wein, Burgunder	0,9915	1,009	1,284	12,67	1,926	59,73
Baumöl	0,9153	1,093	1,391	13,73	2,087	64,70
Terpentinöl	0,8697	1,150	1,464	14,45	2,196	68,09
Erdharz, flüssiges	0,8475	1,180	1,502	14,83	2,254	69,87
Weingeist, reiner	0,792	1,263	1,608	15,87	2,411	74,77
Schwefeläther	0,7155	1,398	1,780	17,56	2,669	82,76
C. Gase.	(1000.sp.G.	bei 0,76 m.	Druck.)			
Luft, trocken	1,2987	0,7700	0,9804	9,676	1,471	45,60
Joddampf	11,319	0,0883	0,1125	1,110	0,1687	5,232
Terpentinöldampf	6,1870	0,1616	0,2058	2,031	0,3087	9,571
Schwefeläther	3,3584	0,2978	0,3791	3,742	0,5687	17,63
Chlor	3,2078	0,3117	0,3969	3,917	0,5954	18,46
Schweflige Säure	2,9013	0,3447	0,4389	4,331	0,6583	20,41
Alkoholdämpfe, absolute	2,0952	0,4773	0,6077	5,998	0,9115	28,26
Kohlensäure	1,9792	0,5053	0,6433	6,349	0,9650	29,92
Salzsäure	1,6200	0,6173	0,7860	7,757	1,179	36,55
Schwefelwasserstoff	1,5470	0,6464	0,8230	8,123	1,235	38,28
Sauerstoff	1,4357	0,6965	0,8868	8,753	1,330	41,25
Stickstoff	1,2623	0,7922	1,009	9,955	1,513	46,91
Kohlenoxyd	1,2427	0,8047	1,025	10,11	1,537	47,65
Wasserdampf	0,8097	1,235	1,572	15,52	2,359	73,14
Ammoniakdampf	0,7749	1,290	1,643	16,22	2,465	76,42
Sumpfgas	0,7208	1,387	1,766	17,43	2,650	82,16
Arsenwasserstoff	0,6870	1,456	1,853	18,29	2,780	86,20
Wasserstoff	0,08974	11,14	14,19	140,0	21,28	659,9

ist eine Illusion, wenn man glaubt, genauer rechnen zu können. Wir geben hier einige Andeutungen über diese Verwendung des Schiebers.

Es sei die Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen und Canälen mittelst der Formel

$$v = k \cdot \sqrt{\frac{h}{l} \cdot \frac{F}{p}}$$

zu berechnen.

Wir betrachten die Scala 3 als die der wirklichen Logarithmen, stellen dem k_3 das l_1 gegenüber, fügen dann dem h_1 dem Ende des Linienzuges, die auf I mit dem Zirkel abgegriffene Logarithmendifferenz $\sqrt{\frac{F}{p}}$ bei und erhalten dann auf 3 die Geschwindigkeit v. Da diese auf der Doppelscala erhalten wird, so kann man sehr genau ihr gegenüber auf 0 die 1 von 1 gegenüberstellen, und erhält dann F gegenüber auf 0 die Wassermasse Q.

Häufig sind $Q\,k\,h\,l$ gegeben und durch Probiren sollen $\frac{F}{p}$ bestimmt werden. Dann verbinde man zunächst $k\sqrt{\frac{h}{l}}$ zu einer Zahl, und berechne dann direct $\left(k\sqrt{\frac{h}{l}}\right)\sqrt{\frac{F}{p}}$.

Statt des Coefficienten k verwendet *Weisbach* den Coefficienten ζ. Alsdann besteht die Beziehung:

$$k^2\zeta = 2g,$$

aus der für verschiedene Werthe von ζ der Rechenschieber am übersichtlichsten die entsprechenden von k liefert, denn stellt man der Zahl $2g = 19{,}62$ auf 0, die 1 resp. 10 von 1 gegenüber, so stehen auch den ζ auf 1 die k auf 3 tabellarisch gegenüber.

Zur Berechnung der Höhe h aus Gleichungen von der Form:

$$h = \zeta\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{p}{F}\,l = \frac{v^2}{k^2}\cdot\frac{p}{F}\,l,$$

bilde man den Linienzug $\frac{v^2}{k^2}\,l$ und füge das Verhältniss $\frac{p}{F}$ mit dem Zirkel bei.

Zur Berechnung von Formeln von der Form:

$$Q = \mu \sqrt{2g}\, b\, k^{\frac{3}{2}} = \frac{\mu b k^{\frac{3}{2}}}{0{,}2258},$$

nehme man $k^{\frac{3}{2}}$ in Zirkel, indem man k^3 direct auf dem Schieber halbirt, und addire es zum Linienzug $\frac{\mu b}{0{,}226}$.

Man sieht aus diesen Beispielen, wie mit Hülfe des Zirkels die Reihe der Aufgaben erweitert werden kann. Ueberhaupt kann man ein beliebiges Verhältniss $\frac{c_0}{c_1}$ in Zirkel nehmen, nach Nr. 2 S. 11, mittelst des Sinusverhältnisses $\frac{m}{n}$ die Grösse lg $\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{\frac{m}{n}}$ bilden, zu irgend einem der möglichen Linienzüge, z. B. zu $\frac{a_0}{a_1} b$ addiren oder subtrahiren, und so Werthe der Ausdrücke der allgemeinen Form:

$$b = b_1 \cdot \frac{a_0}{a_1} \cdot \left(\frac{c}{c_1}\right) \pm \frac{m}{n},$$

direct und auf kürzestem Wege berechnen.

Auch wiederholen lassen sich diese letzten Verhältnisse, so dass man auch mit $\left(\frac{c_0}{c_1}\right) \pm p^{\frac{m}{n}}$ alle Zahlen und Verhältnisse multipliciren kann. Hat man eine mehrfach wiederholte Multiplication einer Potenz mit einem constanten Verhältniss auszuführen, so geschieht dies am zweckmässigsten mittelst Maassstäben; solche Maassstäbe sind bei englischen Schiebern, die wir in der nächsten Nummer beschreiben wollen, für die Zinszahlen 1,05 an den Maassstäben so angebracht, dass man ohne Hülfe des Zirkels oder Papierstreifens, jede Zahl mit den Potenzen dieser Zinszahl multipliciren oder dividiren kann.

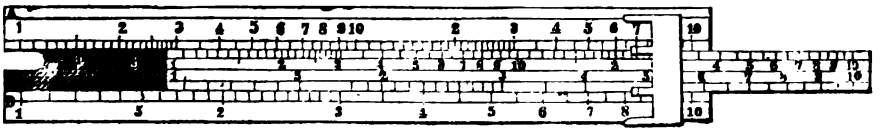
Noch weitere Vorkehrungen, die zur Erweiterung des Gebrauches der Rechenschieber dienen, werden wir in der folgenden Nummer kennen lernen.

9. Verbesserte Rechenschieber.

Hier wollen wir einiger Verbesserungen erwähnen, die man an den Rechenschiebern angebracht hat, um sie entweder im Allgemeinen, oder für specielle Zwecke brauchbarer zu machen.

In der letzten Zeit haben *Tavernier* und *Vinay* in Paris (39 rue de Babylone) die der Scala 3 gegenüberliegende einfache Scala 1 durch eine Doppelscala ersetzt, so dass jetzt auch die Zunge sowohl die einfache als auch die doppelte Scala trägt. (Fig. 35.) Bei dieser Anordnung aber wäre es nicht mehr mög-

Fig. 35.



lich, bei gleichstimmigen Scalen die einfache Scala der Doppelscala gegenüber zu stellen, wenn nicht durch einen beweglichen Index (siehe die Figur) dafür gesorgt worden wäre, die Zahlen von irgend einem Rand auf den anderen zu übertragen. Der Index kann auf dem Stabe verschoben werden und die Zunge bewegt sich hohl unter demselben; in irgend einer Stellung geben die Striche auf den zwei kleinen Zeigern gegenüberstehende Zahlen auf den 4 Rändern an.

Durch diese Aenderungen wurden die folgenden Vortheile erzielt. Unter den Nr. 7 S. 44 als möglich angegebenen Operationen finden sich nicht die beiden folgenden:

$$b_0 = \frac{a_3^2}{a_2^2} b_2^2 \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{a_3}{a_2} \sqrt{b_1},$$

die jetzt auch möglich sind. Z. B.:

$$b_0 = \frac{7^2}{4^2} 3^2 \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{7}{4} \sqrt{9}.$$

Schieberstellung:

0;	1	1	2,75,
1;			9 ,
2;	1		3 ,
3;	1		5,25,

Im ersten Beispiele liest man mittelst des Zeigers der 3 auf Scala 2 gegenüber 27,5 auf 0 (genau $27^{9}/_{16}$) ab, die Charakteristik ist = 1, weil der Linienzug über die erste Scala hinausfällt. Im zweiten Beispiele liest man der 9 auf Scala 1 gegenüber 5,25 auf 3 ab. Im letzten Falle werden 2 und 3 als Scalen und 0 als Halb- oder Wurzelscala betrachtet. Ueberhaupt kann man jetzt Quadrate und Zahlen, oder Zahlen und Wurzeln in jeder beliebigen Weise verbinden.

Dadurch, dass man den Nenner = 1 werden lässt, kann man auch 4te Potenzen und biquadratische Wurzeln bilden. Das letztere geschieht, analog dem beim Ausziehen der Cubikwurzel beobachteten Verfahren, ebenfalls am zweckmässigsten durch Umkehrung der Scalen. Man verschiebt den Zeiger, bis er auf der umgekehrten Scala 2 (die jetzt nicht mehr der Scala 3, sondern der Scala 0 gegenüber liegt) und auf der Scala 3 gleiche Zahlen indicirt.

Für eine und dieselbe absolute Zahl kann dieses auf vier verschiedene Weisen geschehen, je nachdem die Charakteristik gleich einer ganzen Zahl $\pm \frac{i}{4}$ gleich ist, wo i die vier Zahlen 0 1 2 3 bezeichnen kann.

Bei Charakteristiken ohne Brüche überragt die gegenstimmig angelegte Zunge den Stab links um mehr als eine kurze Scala und das Zusammentreffen findet statt zwischen 1 und 1,7783. Mit den Brüchen $+\frac{1}{4}$ oder $-\frac{3}{4}$ überragt die Zunge links um weniger als eine kurze Scala, und das Zusammentreffen findet statt zwischen 1,7783 und 3,1623. Mit den Brüchen $\pm\frac{2}{4}$ überragt die Zunge rechts um weniger als eine kurze Scala und das Zusammentreffen findet statt zwischen 3,1623 und 5,6234; endlich mit den Brüchen $+\frac{3}{4}$ oder $-\frac{1}{4}$ überragt die Zunge um mehr als wie eine kurze Scala und das Zusammentreffen findet statt zwischen 5,6234 und 10.

Auf diesen Rechenschiebern können jetzt auch direct $a^{\frac{3}{4}}$ und $a^{\frac{4}{3}}$ gebildet werden. Bei gegenstimmiger Zunge stehen direct auf den jetzt anliegenden 3 und 1 gleiche Zahlen gegenüber, deren Cubus gleich der 4ten Potenz der auf 2 und 3 mittelst Zeiger gegenüber-

stehenden gleichen Zahlen ist. Selten können die beiden Gegenüberstellungen gleichzeitig stattfinden, und es wird meistens die Zunge um eine Doppelscalenlänge verschoben werden müssen, z. B. $8^4 = 16^3$

0 ;				4,1	4,1		10	1
2 ;			2,53		10	8		
1 ;		1,6	1		1			
3 ;	1	1,6	2,53		6,4	8	10	.
							Ende	

Stellt man auf 3 und 1 die Zahlen 1,6 gegenüber, so liest man auf 0 die Zahl 4,1 mit der Charakteristik 3, also 4100 (genau 4096) ab. Das Ende des Stabes reicht jetzt nur bis 6,4 der Scala 3. Das Zusammentreffen der Zahlen auf 2 und 3 findet jetzt bei 2,53 statt. Laut Obigem muss aber wegen der Charakteristik $\frac{3}{4}$ das Gegenüberstehen zwischen 5,623 und 10 gesucht werden, man muss also mit Festhalten des Endes der Zunge bei 6,4 auf 3 mittelst des Zeigers so die Zunge um ihre ganze Länge verschieben, dass sie den Stab um mehr als eine Scala überragt, dann findet man das Zusammentreffen bei 8.

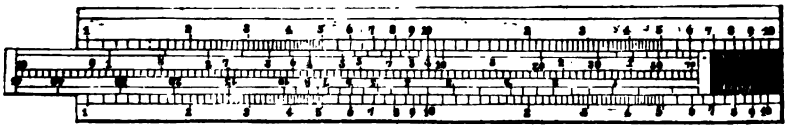
Als eine wirkliche Verbesserung ist der angebrachte Zeiger zu betrachten, der gestattet auf der einen Scala eine Zahl zwischen den Theilstrichen zu markiren und eine andere ebenso ungerade Zahl genau einzustellen; er macht also die Nebenrechnungen von Nr. 8 S. 49 ganz überflüssig. Leider steht der Zeiger nicht immer ganz senkrecht auf den Scalen. Ein anderer Nachtheil gegen früher besteht darin, dass man jetzt nicht mehr Zahlen tabellarisch einander gegenüberstellen kann, deren Product constant ist, die Uebertragung muss mittelst des Zeigers geschehen, weil in gegenstimmiger Lage der Zunge die gleich eingetheilten Scalen nicht mehr aneinander liegen. Auch muss noch bemerkt werden, dass trotz des höheren Preises die neueren Schieber schlechter als die älteren der gleichen Fabrik gearbeitet sind.

10. Trigonometrische Rechenschieber.

Auf der Rückseite (Fig. 36) in der Mitte der Zunge befindet sich der Maassstab, in welchem die Doppelscala aufgetragen

worden ist; sie ist so eingerichtet, dass wenn man die Eins einer Zahl auf dem unteren Rand des Stabes gegenüberstellt, das Ende des Stabes auf der Rückseite der Zunge den lg markirt. Die beiden Ränder der Zunge tragen die lg sin und lg tg im Maassstab der einfachen Scala für die Charakteristik von $\bar{8}$ bis 1. Die sinus beginnen daher bei 34′ 22″,7 und schliessen mit 90° (siehe Fig. 36),

Fig. 36.



die Tangenten aber beginnen mit 34′, 22″,5 und schliessen mit 45°. Leider ist die Eintheilung dieser trigonometrischen Ränder eine gar grobe. Bis 10° ist sie nur von 10 zu 10′, während das Intervall zwischen 40′ und 50′, 20 der Intervalle zwischen 1,4 bis 2 enthält, es könnten also hier füglich halbe Minuten noch angegeben werden, und an ein genaues Einstellen ist also hier gar nicht zu denken, auch am Ende ist die Einstellung keine sehr genaue mehr, zwischen 50° und 60° sind noch 10 Theilstriche, dann kommen nur mehr 3 im Ganzen für 75°, 80° und 90° vor, es darf also innerhalb dieser Strecken nicht mehr proportional eingeschaltet werden. Nimmt man also diesen Theil aus, so kann man nach dem Umdrehen der Scala, so dass der untere Theil oben liegt, Zahlen aus Sinus- und Cosinusverhältnissen multipliciren, also viele trigonometrischen Aufgaben lösen. Decken sich gerade die beiden Scalen, so stehen den Graden ihre Sinus gegenüber.

Bezüglich der Tangenten kleiner Winkel gilt das Gleiche als wie von dem Sinus, von 10° ist der Maassstab von 20′ zu 20′, von 20° an bis zu dem Ende bei 45° von $^1/_2{}^0$ zu $^1/_2{}^0$ eingetheilt. Bequem kann man jetzt eigentlich nur mit Tangentenverhältnissen zwischen 2° und 45° multipliciren. Liegt der Winkel 45° zwischen den Winkeln, deren Tangentenverhältnisse man bestimmen will, so setzt sich der lg zusammen aus der Strecke der Tangentenscala vom kleineren Winkel bis zum Ende bei 45°, + der Strecke von hier rückwärts bis zum Complement (Ergänzung zu 90°) des grösseren Winkels. Diese Summe lässt sich nun zwar mit dem Zirkel herstellen, allein sie ist in der Regel umständlich zu be-

handeln, bei grossen Winkeldifferenzen umfasst sie 4 Scalenlängen; man muss also zuerst 1 bis 3 Scalenlängen abziehen, ebenso viele Einheiten zur Charakteristik addiren, und dann erst kann man mit dem Rest als Tangentenverhältniss operiren. Das ist sehr umständlich, und wir haben daher immer nur die allereinfachsten trigonometrischen Rechnungen mittelst des Rechenschiebers ausgeführt, z. B. wenn die Tangentenscala die beiden einfachen Scalen deckt, so stehen den Graden die Tangenten gegenüber, 10% Steigung entsprechen 5°43 (genau 5°,42,38″) Elevation. Wieviel Graden entspricht eine Steigung von 2 met. auf 30 und auf 3 met.? Charakteristik $\underline{8}$ und $\underline{9}$. Um beide Aufgaben gleichzeitig lösen zu können, stellen wir das Ende der Tangentenscala der zweiten 3 gegenüber. Siehe hier die Stellung, worin wir den Ursprung der Tangentenscala mit 34′, das Ende mit 45° bezeichnen.

0		1	2	3	10	20	30	1
Tg	34′	1°,54	3°,49	5°,43	18°,25	33°,45	45	

Dann giebt die zwischen 34′ und 5,43 stehende 2 den zur Charakteristik $\underline{8}$ ($\mathrm{tg} = \frac{2}{30}$) gehörenden Elevationswinkel 3°49′ (genau 3°48′49″) und die zwischen 5°,43 und 45° stehende 2 den zur Charakteristik $\underline{9}$ ($\mathrm{tg} = \frac{2}{3}$ oder $1^1/_2$ malige Böschung) gehörenden Winkel von 33°45′ (genau 33°41′24″). Endlich ist noch zu bemerken, dass der 1 und 10 die zu $\frac{1}{30}$ und $\frac{1}{3}$ gehörenden Elevationswinkel von 1°,54′ (genau 1°54′33″) und 18°25′ (genau 18°26′6″) gegenüberstehen.

Ueberhaupt stehen allen Winkeln die Höhen gegenüber, welche sie am Ende einer Basis 30 abschneiden würden.

Um endlich auch die trigonometrischen Functionen von Winkeln unter 34′23″ berechnen zu können, ist auf der Scala 0 die reciproke Länge von 1′ und 1″ oder die Zahl der Minuten und Secunden, die auf den Halbmesser gehen, nämlich 3437,75 und 206265 markirt (nützlich wäre es, auch noch die Zahl der Grade 57,296 zu markiren, unsere Figuren sind jedoch zu klein, um irgend eine derselben anzugeben). Da bis zu einem Grad sin und tang erst in der 4. Stelle abweichen, so darf man unter dem Grad

bei Rechenschiebern füglich statt sin und tg den Bogen nehmen. Wir können jetzt eine beliebige Zahl von Minuten und Secunden mit einem Radius multipliciren, z. B. wie lang sind n Minuten auf einem Bogen von 300 met. Radius; wir bilden $\frac{n.300}{1:1'}$ Schieberstellung:

0;	1	1,745	3	5,24	8,73
1;	11,45	20	(1′)	60	100′

Mit Berücksichtigung der Charakteristik 3 von 1:1′ sieht man also, dass bei 300 met. Radius 1 Meter 11,45 Minuten enthält, und dass dann die Minutenzahlen ihren Längen tabellarisch gegenüberstehen. 60′ oder 1° hat eine Länge von 5,24 Meter u. s. w.

Aus der Differenz der zuerst abgelesenen und dann genau berechneten Winkel sieht man, wie wenig zuverlässig diese Ablesungen, trotzdem dass wir doch einige Uebung darin besitzen, sind. Durch bessere Eintheilung, namentlich des unteren Theiles der Scala, wird sich die Genauigkeit etwas vergrössern können, immerhin nicht sehr erheblich. Denn diese nur scheinbare Ungenauigkeit hat in etwas Anderem ihren Grund: wir messen Längen mit sehr grob eingetheilten Maassstäben, z. B. Ketten mit Gliedern von ,20 oder ,50 met., Winkel dagegen immer mit höchst fein eingetheilten Instrumenten, auf denen die Theilstriche nur mit Lupen abgelesen werden können; bei der Verbindung von Längen und Winkel werden also von den letzteren mehr decimale als von ersteren gegeben, und deshalb scheinen nur die Ablesungen der Winkel weniger genau.

Beispiel. Die drei Winkel eines Dreiecks sind 50°, 70° und 60°, die 70° gegenüberliegende Seite hat eine Länge von 600, welches ist die Länge der der beiden andern.

Man stelle, siehe auch Figur 36, die 70° der 6 gegenüber, dann liest man:

1	489	553	600		10
	50°	60°	70°	90°	

der 50° gegenüber 488, und der 60° gegenüber 551 ab.

Mit Vortheil werden Rechenschieber auch bei Messtischaufnahmen mittelst Distanzmessern benützt, um die in der Steigung gemessenen Längen auf den Horizont zu reduciren und um die Höhendifferenz der Endpunkte zu bestimmen. Ungemein einfach sind die Rechnungen, wenn die Distanzlatte durch den Gehülfen mittelst eines Visirs senkrecht auf den Sehstrahl des Mess-

tisches gestellt wird; in diesem Fall hat man einfach die abgelesene Länge mit dem sin und cos zu multipliciren, was keiner weiteren Erläuterung bedarf und direct mittelst jeden Rechenschiebers ausgeführt werden kann.

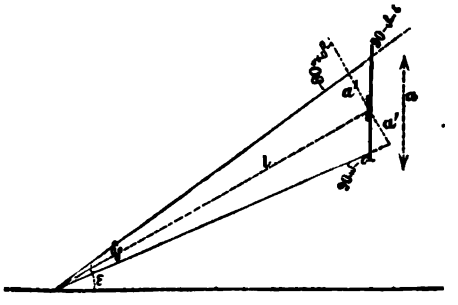
Für Geometer, welche diese Operation hundertmal jeden Tag zu verrichten haben, wird es zweckmässig sein, sich den Stab eigens für diese Zwecke construiren zu lassen. Es geschieht dies, indem man die allerletzten Theilstriche der Sinusscala mit den Complementgraden versieht, also statt 45^0 50^0 $60^0 \ldots 90^0$, 45^0 40^0 30^0 0^0 schreibt, denn man hat ja äusserst selten Elevationswinkel über 45^0 zu beobachten; dann erstrecken sich auf der Doppelscala links über 1,8 Scalenlängen die Sinus für die Elevationswinkel, und rechts über 0,2 Scalenlängen die Cosinus für die Reductionen auf den Horizont. Um jederzeit in einer einzigen Stellung sowohl sin als auch cos ablesen zu können, müssen links jenseits der $34' 23''$ noch einige Cosinustheilstriche angebracht werden; streng genommen sind sie nur bis zum sin, dessen $\lg = \bar{9}$ ist, also bis $5^0\ 43'$ nothwendig, um z. B. cos 5^0 ablesen zu können, wenn 5,20′ auf 98 steht, sind sie nothwendig, weil dann das Ende rechts die Scala der Zunge den Stab überragt. Da $\cos 10^0 = \sin 80^0 = ,9848$ ist, so ist es jederzeit möglich, diese wenigen Theilstriche ohne Verlängerung des Instruments auf der Scala noch anzubringen.

In der Schweiz werden gewöhnlich die Latten nicht senkrecht auf den Visirstrahl, sondern vertical gestellt. Statt der Länge $2a'$ liest man dann laut Fig. 37 die Länge:

$$a = a' \left(\frac{\cos \delta}{\cos (\varepsilon + \delta)} + \frac{\cos \delta}{\cos (\varepsilon - \delta)} \right) = \frac{2a'}{\cos \varepsilon \, (1 - \operatorname{tg}^2 \delta \operatorname{tg}^2 \varepsilon)}$$

ab. Die directe Entfernung ist also gleich $a \cos \varepsilon$, wenn man die sehr kleine Grösse $\operatorname{tg}^2 \delta \operatorname{tg}^2 \varepsilon$ der 1 gegenüber vernachlässigt, was auch füglich geschehen kann, weil der durch die beiden äussersten Fäden des Kreuzes bezeichnete Winkel 2δ sehr klein ist.

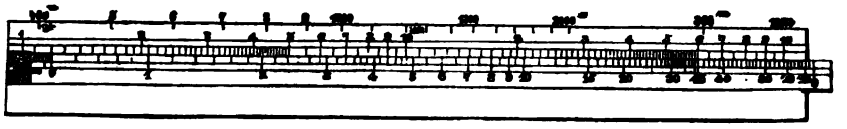
Fig. 37.



Es ist demnach die auf den Horizont
reducirte Länge gleich . . . $a \cos^2 \varepsilon$,
und die Höhendifferenz gleich . . $a \cos \varepsilon \sin \varepsilon = a \cdot {}^1/_2 \sin 2\varepsilon$.

Zur Berechnung dieser Längen könnte ein Schieber wie Fig. 38 eingerichtet werden.

Fig. 38.



Der obere Rand des Stabes enthalte wie gewöhnlich zwei Zahlenscalen. Auf den Rand der Zunge können für die Charakteristiken $\overline{8}$ bis 1, die Werthe von Log $\frac{1}{4} \sin 2\alpha$ aufgetragen werden. Die Winkel beginnen mit $\frac{1}{4}\, arc\, (\sin = 0{,}02) = 34' 23''$. $\frac{1}{4}\, arc\, (\sin = 0{,}2) = 5^0 46' 6\frac{1}{2}''$ trifft auf das Ende der ersten Scala, 45^0 endlich auf die 5 der 2ten Scala. Es ist das das Ende der Zungenscala, denn die Function kann nie grösser als $\frac{1}{4}$ werden. Ist der Elevationswinkel grösser als wie 45^0, so ist die Höhendifferenz auf dem Complement des Winkels abzulesen, weil $\frac{1}{4} \sin 2\,(45 \pm \varepsilon) = \frac{1}{4} \cos 2\varepsilon$ ist. Der freie Raum zwischen 45^0 und dem Ende der Scala genügt, um die $\cos^2$ von 45^0 bis 0^0 aufzutragen. Durch Verschieben der Zunge nach links und Einstellung des äussersten Endes rechts der Zunge in die 2te Scala des Stabes ist es immer möglich, alle Grade der Sinusscala über $5^0 46' 6\frac{1}{2}''$ abzulesen, und die ganze Cosinusscala liegt am Stab. Sind die Daten aber derart, dass Winkel unter $5^0 46'$ hohen Zahlen, z. B. 99 gegenübergestellt zu stehen kommen, wie es bei Entfernungen 1 10 100 und darüber vorkommt, so kann die Einstellung nur dadurch geschehen, dass die Zunge nach rechts geschoben wird. In diesen Fällen liegt aber die Cosinusscala rechts jenseits des Stabes, und es kann auf ihr nicht mehr abgelesen werden; um also ohne weitere Verschiebung der Zunge auch die hiezu gehörigen Cosinus ablesen zu können, müssen auch am linken Ende Cosinustheilstriche für mindestens $5^0{,}46'$ angebracht werden. Der Abrundung wegen wird man hier die Theilstriche zwischen $\cos^2 10^0$ und 1

noch anbringen; und man ist jetzt im Stande, mittelst einer einzigen Einstellung sowohl Reduction auf den Horizont als auch die Höhendifferenz der Stationen abzulesen.

Ueber den Zahlen des Stabes befindet sich noch eine grobe Eintheilung mit weit von einander entfernten Theilstrichen, sie giebt die an der Höhendifferenz anzubringende Correction wegen Rundung der Erde und Refraction bestimmt nach der Formel $,0672 \left(\frac{l}{1000}\right)^2$ an; unter dem Hectometer bei der Scala links und Kilometer bei der Scala rechts liest man die Refraction in ctm. links und in dezm. rechts ab. In der Meinung, dass auf diese Weise höchstens Distanzen von 2 klm. in Betracht kommen können, wurde bei 2000 met. rechts abgebrochen, dagegen nach aussen 300 met. (statt 3000) angegeben, unter denen man die Refraction in Millimetern abliest. Diese Scala gilt natürlich nur für Metermaass. Aus der Natur der Sache geht hervor, dass diese Scala nichts anderes, als die um ,0672 verschobene Doppelscala ist. Bei der Benutzung ist darauf zu achten, dass der anvisirte Punkt, mag auf- oder abwärts visirt worden sein, um die Correction tiefer liegt.

Beispiel. Man habe auf der Latte 120 met. (oder 1200) abgelesen. Schieberstellung wie Fig. 38 bei Elevationswinkeln unter 20°. Dann liest man vor der 0 links den Elevationswinkeln gegenüber die reducirte Länge ab: z. B. 16° gegenüber 110 und auf der Hauptscala den 16° gegenüber die Höhendifferenz 32. Die Refraction mit 1 mm. bei 120 m. kann füglich vernachlässigt werden, bei 1200 m. aber beträgt sie 10 ctm.

Auch jenseits 22° kann in der vorliegenden Stellung noch abgelesen werden. Würde man die Zunge um eine Scalenlänge nach links verschieben, dann könnte man für alle Neigungswinkel zwischen 4° 55′ und 45° ablesen. Diese Stellung wäre eigentlich die richtigere, wir konnten sie jedoch Fig. 38 nicht darstellen, weil wir die ganze Zunge zeigen wollten. Bei der Arbeit wird man über die Art der Einstellung nie in Zweifel sein können; bei Neigungswinkeln unter 5° ist das linke Ende in die Scala links, und bei grösseren Winkeln das rechte Ende in die Scala rechts zu stellen.

11. Rechenschieber für specielle Zwecke.

Wenn Zahlen sehr häufig mit bestimmten Coefficienten multiplicirt werden müssen, so wird beinahe jeder Irrthum bei der Berechnung ausgeschlossen, wenn auf der einen der Scalen nur diese Zahlen beibehalten und scharf durch einen einzigen Strich markirt werden. So fand ich einstens oben bei der Gicht eines englischen Hochofens einen Rechenstab angebracht, auf dessen beweglicher Zunge nur 3 Striche zu sehen waren, bezeichnet mit den Namen „Erz, Kohle, Fluss". Die Arbeiter, welche dafür zu sorgen hatten, dass diese Ingredienzen immer in den richtigen Verhältnissen aufgegeben wurden, wogen die ankommenden Erzwagen ab, stellten den betreffenden Theilstrich auf das Gewicht ein, und konnten dann unmittelbar bei den zwei anderen Theilstrichen die entsprechenden Gewichte von Brennmaterial und Flussmittel ablesen. Von dem Arbeiter wird dabei nichts verlangt, als wie die Fähigkeit, richtig ablesen zu können.

Auch in England findet man Rechenschieber, durch welche bei kleineren Käufen die Verwandlung der Pennies in Schillinge, sowie die der Unzen in Pfunde, d. h. die Multiplication mit den unächten Brüchen von $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{20}$ umgangen wird.

Fig. 39.

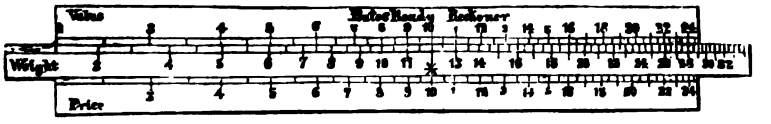


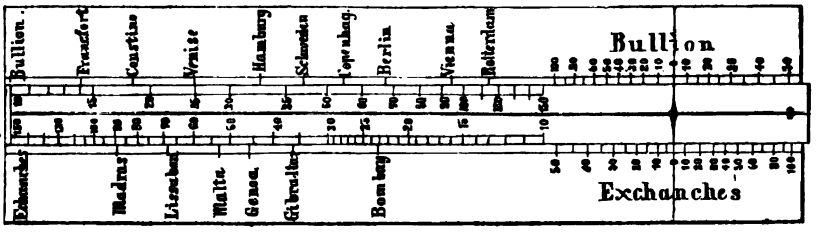
Fig. 39 stellt einen solchen dar; der Scala 3, siehe die Figur, ist der Preis in Pennies gewidmet, sie reicht von 2 bis 25 Pennies und ist noch in $^1/_4$ Pennies eingetheilt. Die Scala 2 der Zunge trägt nur einen scharf markirten Strich, der auf den Preis eingestellt wird. 1 der Zunge ist die Gewichtsscala, sie reicht von 2 bis 36 *lbs* und ist auf ihre ganze Länge von ,32 met. in $^1/_{16}$, d. h. in Unzen eingetheilt (in der Figur konnte dies wegen des kleinen Maassstabes nur theilweise geschehen). Die oberste Scala 0 des Schiebers trägt die Kosten in Schillingen, und ist auf ihre ganze Länge in Pennies eingetheilt (auch dies konnte Fig. 39

nicht geschehen). Die Operation ist jetzt höchst einfach und bedarf kaum einer Erklärung; es wird das Zeichen auf den Preis gestellt, und man liest dem Gewicht der Waaren gegenüber deren Kosten, oder den Kosten gegenüber das Gewicht der Waare ab; und umgekehrt, denn stellt man die Kosten der Waare gegenüber, so erhält man unter dem Zeichen auf 3 deren Einheitspreis.

Diese Art Rechenschieber wird wohl nicht mehr construirt werden, sobald das Decimalsystem eingeführt sein wird, immerhin kann man sich Verhältnisse denken, wo für technische und landwirthschaftliche Zwecke ähnliche Constructionen gute Dienste leisten können.

Ein moderner Rechenschieber, ebenfalls aus England, ähnlich Fig. 40, dient zur Verwandlung der Maasse, Gewichte und Mün-

Fig. 40.



zen. Nur die bewegliche Zunge ist logarithmisch eingetheilt, und zu beiden Seiten derselben sind über 100 verschiedene Maasse, Gewichte und Münzen an ihren Stellen aneinander gereiht und mit Theilstrichen versehen, welche auf der log. Scala ihrer Verwandlungszahl entsprechen. Wird nun irgend eine Länge, ein Gewicht oder eine Geldsumme ihrer Einheit gegenübergestellt, so kann man unmittelbar ablesen, wie gross dieselbe in irgend einer anderen auf dem Massstab befindlichen Einheit ausgedrückt wäre. Vor gewöhnlichen Münztafeln hat dieser Schieber den Vorzug, dass er noch mit den Verwandlungszahlen multiplicirt, was die Tafeln nicht thun. So lange nicht in der ganzen Welt eine Maass-, Gewichts- und Münzeinheit eingeführt ist, wird dieser Maassstab in seiner jetzigen Form gute Dienste leisten, namentlich wenn man neben die Bezeichnung der Einheit auch noch ihre Verwandlungszahl drucken würde, denn dann wäre die Tabelle mit dem Multiplicationsapparate vereinigt; allein auch nach Einfüh-

rung allgemeiner Einheiten wird diese Form noch mit Vortheil verwendet werden, um direct Grössen zu verwandeln, die auf verschiedene Weise ausgedrückt werden können, z. B. einen Druck pro Flächeneinheit in Atmosphärendruck, in Druck einer Wasser-, Quecksilbersäule oder Stein-Cementsäule u. s. w.

Fig. 40 zeigt die Einrichtung eines Wechsel- und Münzverwandlungsstabes. Auf der einen Seite des Schiebers finden sich die Curse der verschiedenen auf dem Platze (hier London) vorkommenden Wechselpapiere an ihrer Stelle auf der logarithmischen Scala aufgetragen; dieser Ausgangscurs ist auf dem Rande in Zahlen angegeben. Auf der anderen Seite rechts finden sich die Werthe der verschiedenen Münzsorten angegeben; für die letzteren wird man offenbar am zweckmässigsten den ihrem reellen Metallwerth entsprechenden Werth annehmen. Wahrscheinlich aus Willkür sind die beiden Scalen gegenstimmig disponirt, so dass bei den Papieren die hohen, bei den Münzen die niedrigen Curse oben an der Scala stehen. Endlich sind unten auf den beiden Rändern die gleich langen Scalen 1 bis 2 und von 5 bis 100 aufgetragen, und einerseits 1 mit 0; 1,10 mit 10; 1,20 mit 20, 2 mit 100, andererseits lg 90 mit 10, 80 mit 20 und 50 mit 50 bezeichnet, und so disponirt, dass wenn dem Rahmen die Paricurse der Zunge gegenübergestellt werden, der Index dieser letzteren auf diesen Scalen der 0 gegenübersteht. In dieser Stellung ist der Schieber in Fig. 40 gezeichnet.

Werden jetzt auf diesem Schieber beliebige Curse auf der Zunge ihren Strichen auf den Rahmen gegenübergestellt, so giebt der Index auf der Scala unten unmittelbar an, wie hoch der eingestellte Curs unter oder über dem angenommenen Paricurs steht. Irgend einer anderen Valor gegenüber steht der Curs, den diese haben dürfte, um ebenso theuer oder billig (bezüglich der angenommenen Paricurse), als wie die eingestellte zu sein, und dient daher zur Beurtheilung der Zweckmässigkeit der vorhandenen Zahlmittel. Endlich stehen in irgend einer Stellung der Zunge zwei beliebigen Valoren Zahlen gegenüber, welche in denselben gleiche Werthe repräsentiren, so dass dieser Schieber auch dazu dienen kann, alle Werthe aus einer Münze in die der anderen zu verwandeln.

Herr Banquier *L. Pestalozzi* sel. hat für die Zwecke der Agiotage einen äusserst sinnreichen Schieber einfach aus Zeichen-

papier construirt. Der Rahmen besteht (s. den Querschnitt Fig. 42) aus einem zusammengelegten und hinten zusammengeklebten Blatt Zeichenpapier. In demselben spielt ein einfaches Blatt Zeichenpapier, die Zunge. Die Ränder des Rahmens und der Zunge werden nun dadurch gebildet, dass aus dem vorderen Blatt lange streifenförmige Oeffnungen ausgeschnitten wurden, von denen jede zwei Ränder lieferte. In Fig. 41 sind drei solcher Oeffnungen mit sechs Rändern aufgetragen, auf welchen nun logarithmische Eintheilungen angebracht werden können. Entsprechende Eintheilungen werden auf das innere Blatt, die Zunge, gezeichnet, und man gelangt so zur Vereinigung mehrerer Schieber.

Fig. 41.

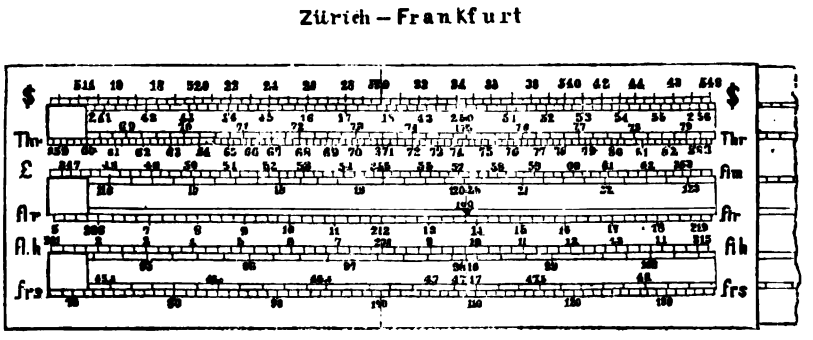


Fig. 42.

Jedem Rand des Rahmens wird nun ein Handelsplatz, mit dem das Haus in Verbindung steht, zugewiesen und die Logarithmen des Werthes der dort üblichen Wertheinheit in Franken aufgetragen. Da die Curse von fundirten Werthen, in Folge des Angebotes und der Nachfrage allein, nur innerhalb sehr enger Grenzen, 8 Procent höchstens schwanken, und man daher nur den Theil zwischen 0,96 und 1,04 des gewöhnlichen Schiebers braucht, so kann die Scalenlänge sehr gross gewählt werden, denn der vorliegende Schieber braucht nur die Strecke lg 1,04 — lg ,96 = 0,035 der ganzen Scala zu enthalten; der Schieber, den ich hier beschreibe, hatte eine Scalenlänge von 7,5 M., was eine Länge von ,26 M. für

das Instrumentchen gab. (Fig. 41 hat eine Scalenlänge von 3 M. = 10 Fuss.)

Auf die Mitte des Rahmens werden die Mittelcurse $ 530, Thlr 371, LS und fl M 255, fl rh. 212, fl Holl. 208, Paris (Zürich) 100 angesetzt und nun nach rechts und links die lg der entsprechenden Zahlen aufgetragen; also der Theilstrich 5,10 auf der Dollarscala wird bei lg 530 — lg 510 = ,01671 (1″, 6‴,71) links aufgetragen; 5,2 bei lg 5,3 — lg 5,2 = ,00828 (8‴,28); 5,4 bei lg 5,4 — lg 5,3 = ,00811 u. s. w. Auf der Thalerscala sind die Theilstriche links bei $\lg \frac{371}{369}$ = ,00234; $\lg \frac{371}{370}$ = ,00117 .... und rechts bei $\lg \frac{372}{371}$ = ,00117 angebracht u. s. f. Die letzten Intervalle sind nicht in 10, sondern, wie es auf (zopfigen) Bankplätzen üblich ist, in 8 Theile getheilt.

Für den Verkehr mit jedem Platz wurde eine Zunge eingetheilt, auf der alle Curse in der Valuta dieses Platzes ausgedrückt sind. Jedoch ist wohl darauf zu achten, dass gegenseitig auf dem Rahmen und auf der Zunge die Scalen um gleich viel verschoben sein und dass demnach die Zahlen auf beiden überall im gleichen Verhältniss stehen müssen. Zur Verwandlung werden wohl die Mittelcurszahlen selbst verwendet, z. B. für das Blatt Frankfurt, das in Fig. 41 dargestellt ist, der Zahl 2,12. Auf die Mittellinie der Zunge, welche in der Figur etwas seitlich liegt, weil wir sie uns ausgezogen denken, treffen demnach die Punkte $\frac{530}{212}$ $\frac{371}{212}$ $\frac{255}{212}$ u. s. f. Die Scala fl. rh. trägt keine Eintheilung, sondern es ist nur die Mittellinie markirt.

Der Theilstrich 243 für $ liegt links in der Entfernung $\lg \frac{5{,}30}{2{,}12 \,.\, 2{,}43} = \lg \frac{250}{226}$ = ,0123. Der Theilstrich 257 auf $\lg \frac{257}{250}$ = 0,120 rechts der Mitte entspricht genau 250 (250 fl. für 100 $ oder 2 fl. 30 für einen). Auf die gleiche Weise werden auch die anderen Scalen der anderen Wechselcurse aufgetragen.

Aus der bisherigen Beschreibung geht hervor, dass dieser Schieber nichts Anderes ist, als die Zusammenstellung einzelner, aus einer 3 Meter langen Scala herausgegriffener Theile, die gerade gebraucht werden und die man der Bequemlichkeit wegen

unter einander statt neben einander gestellt hat. Der Rand und die Zunge werden auch nur in einer bestimmten gegenseitigen Stellung gebraucht. Fig. 40 mit dem eingeschobenen Blatt Frankfurt, dient für die Operationen zwischen Zürich und Frankfurt und löst unmittelbar die folgende Aufgabe: Wie hoch kommt der fl. in Frankfurt, wenn irgend eines der mit einem Rand bedachten Papiere, z. B. £ um einen gegebenen Curs, z. B. 255, in Zürich zu haben ist und dafür in Frankfurt $119^1/_4$ (fl. für 10 £) gelöst werden. Dieser gesuchte Curs ist offenbar gleich dem Quotient $\frac{255}{119^1/_4}$ der gegebenen Curse, man liest daher das Resultat $213^{13}/_{16}$ auf dem Rande der Mitte gegenüber ab. Bei Vergleichung der beiden Curszettel Zürich und Frankfurt braucht man daher nur einen Blick auf diesen Schieber zu werfen, um zu sehen, ob mit einem anderen Papier die Zahlung theurer oder billiger kommt. Wären z. B. holländische fl. in Zürich um 210 zu haben, in Frankfurt aber zu 98 notirt, so wäre dieses Papier theurer als das Londoner, denn die Zunge muss nach rechts geschoben werden, um die Curse einzustellen. Wären dagegen Paris um 98 in Zürich zu haben und in Frankfurt zu $45^7/_8$ notirt, so wäre das billiger. Denn um die beiden Curse gegenüberzustellen, muss die Zunge links geschoben werden; es geschehe dieses, und dann wird in der Vergleichung fortgefahren, bis das billigste Zahlungsmittel gefunden ist, mit dem dann die Zahlung effectuirt wird.

Die Genauigkeit, mit der das Instrument arbeitet, genügt vollständig, denn die $^1/_8$ Theile sind noch sehr lang. In irgend einer Stellung der Zunge giebt es also mit hinreichender Genauigkeit eine Gegenüberstellung äquivalenter Curse.

Das Instrumentchen wäre vielleicht noch einer Verbesserung fähig, wenn man auf dem Rand der Zunge Frankfurt die Logarithmen der einfachen Zahlen 98 99 100 101 102 mit ihren Unterabtheilungen, den Achteln, auftragen würde; man könnte alsdann zum gegebenen Curse direct noch eine beliebige Zahl Procente für Spesen, Commission u. s. w. addiren.

12. Ein englischer Rechenschieber.

Wir schliessen mit der Beschreibung eines sehr feinen Rechenschiebers, der sich im Besitze des Herrn Bankdirectors Finsler befindet. Es ist ein doppelter Schieber, d. h. der Schieber ist so dick (,008 M.), dass zwei Zungen in demselben angebracht werden konnten, eine auf der oberen, eine auf der unteren Seite.

Die obere Seite ist in Allem gleich dem gewöhnlichen Nr. 7 S. 41 beschriebenen Schieber, auch ist die obere Zunge auf ihrer unteren Seite mit den trigonometrischen Functionen sin und tg versehen.

Der Rand der unteren Seite trägt wie gewöhnlich zwei Scalenlängen, die Zunge aber deren drei. Da nun die beiden Zungen noch vertauscht werden können, so ist man im Stande, den Zungenrand von $^1/_3$ Scalenlänge sowohl demjenigen mit halber, als auch dem mit ganzer Scalenlänge gegenüberzustellen und so alle in Nr. 8 S. 57 angedeuteten Operationen auszuführen, welche bei verschiedenen Rechnungen, namentlich also bei hydrometrischen, gute Dienste leisten können.

Die Rückseite der Zunge trägt die gewöhnliche Scala in gegenstimmiger Lage. Die Wand zwischen den beiden Coulissen auf der oberen Seite ist bei A (siehe den Längenschnitt des Schiebers Fig. 43) so zugeschärft, dass man dort genau ablesen kann.

Fig. 43.

Werden nun die beiden Zungen so vertauscht, dass dort auf der gegenstimmigen Scala, deren wir oben erwähnten, abgelesen werden kann, und stellt man dort irgend eine Zahl b ein, so kann man oben zwischen den Rändern $a_0\, a_1\, a_3$ in Folge der besonderen Lage dieser unteren Scala die Verhältnisse ablesen:

$$\frac{a_0}{a_1^{2/3}} = \frac{a_3^2}{a_1^{2/3}} = ,81\ b.$$

Wir haben nicht entdecken können, wohin gerade diese, offenbar mit dem englischen Maasssystem zusammenhängende Formel gehört, wir erwähnen derselben aber, weil auf die gleiche

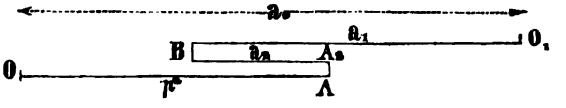
Weise Dispositionen getroffen werden können, die in der Hydraulik und in der Festigkeitslehre gute Dienste leisten könnten, und weil wir den Schieber vollständig beschreiben wollen.

Der zweite Rand des unteren Schiebers a_3 ist wie ein gewöhnlicher Maassstab äquidistant eingetheilt, die Entfernung der Theilstriche ist $=$ lg 1,05. Betrachtet man den 0 Punkt dieses Maasstabes als Anfang eines Linienzuges, so kann man laut Fig. 44 bilden:

$$\lg a_0 = \lg p^n - \lg a_2 + \lg a_1, \qquad \text{oder}$$

$$a_0 = \frac{a_1}{a_2} p^n ;$$

Fig. 44.



die Grundformel für Berechnung von Zinses-Zinsen.

Endlich ist auch noch der Boden der beiden Coulissen, der sonst gewöhnlich nur zur Verlängerung des Maassstabes benutzt wird, mit Scalen für Rentenberechnungen ausgenutzt. Der Boden der einen Coulisse ist so eingetheilt, dass wenn das Ende der Zunge auf den Theilstrich n ($= 3$ in Fig. 44) eingestellt wird, die Zunge um den

$$\lg (1 + 1{,}05 + 1{,}05^2 + \cdots 1{,}05^{n-1})$$

vorgeschoben ist. Irgend zwei Zahlen von Rand und Zunge stehen daher in der Beziehung

$$a_0 = a_1 (1 + 1{,}05 \cdots 1{,}05^{n-1}).$$

Der Boden der anderen Coulisse ist genau auf dieselbe Weise behandelt, er enthält die den

$$\lg \left(1 + \frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \cdots \frac{1}{1{,}05^n}\right)$$

entsprechenden Theilstriche und löst wie oben die Aufgabe

$$a^0 = a_1 \left(1 + \frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \cdots \frac{1}{1{,}05^n}\right).$$

Dieser Schieber giebt also die gebräuchlichsten Formeln zur Berechnung von Zinses-Zinsen und des Werthes vergangener und

zukünftiger Renten oder Annuitäten. Es ist das eine sehr nützliche Zuthat, um approximative Rentenberechnungen auszuführen; wenn es sich dagegen um die wirkliche Rentenberechnung handelt, werden in der Regel wohl drei Stellen nicht mehr genügen.

Das hier beschriebene Instrument ist genau 1 engl. Fuss lang, der auf den äusseren Rändern des Stabes einmal in 100 und einmal in 144 Theile getheilt ist. Endlich sind auf einer der beiden Seiten eine Auswahl der auf S. 54 gegebenen Coefficienten eingedruckt.

Vergleicht man die jetzt gewöhnlich cursirenden Schieber mit diesem, so muss leider ein bedeutender Rückschritt wahrgenommen werden, sowohl was das Material — er besteht aus einem zähen Buchsbaumholz, das jetzt noch glatt ist, während die neueren Schieber aus einem glasigen Holz bestehen, das sich in kurzer Zeit mit Scharten überdeckt — als auch die Feinheit der Eintheilung betrifft.

Weit aber überragt er alle neueren hinsichtlich der Menge der Rechnungsmittel, die er bietet, und man muss aufrichtig bedauern, dass die Firma nicht mehr existirt. Er trägt das Zeichen Cary London; auf einem der Nr. 11 beschriebenen Maassstäbe las ich W. Cary 182 Strand 1815. Ein anderer ähnlicher Schieber trug die Aufschrift 17 Poultry London 1824.

Wir wollen hier zum Schluss bemerken, dass der Zeichner viele von den hier angeführten Vortheilen sich direct mittelst gezeichneter Maassstäbe verschaffen kann. Die drei eben erwähnten, zu Zinsen und Rentenberechnungen dienenden Maassstäbe lassen sich direct auf das Papier auftragen.

So wurden auf Taf. 2_6 die Werthe von p^n, Taf. 2_7 die von $\sum_1^n \frac{1}{p^n}$ und Taf. 2_8 $\sum_1^n p^n$ für $p = 1{,}05$ aufgetragen. Der Maassstab der Scala ist = 0,10 M., wäre das auch der Maassstab des Rechenschiebers, so könnte man den Logarithmus einer beliebigen dieser Functionen n, p direct mit dem Zirkel auftragen, zum Logarithmus einer beliebigen anderen Zahl addiren und auf diese Weise dieselben Aufgaben als wie mittelst des englischen mit besonderen Scalen versehenen Schiebers lösen.

Wir können es nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, wie durch diese Theilstäbe auch die Natur der Function zu Tage tritt. Wie es sich von selbst versteht, sind die Theil-

striche der p^n Taf. 2_6 für gleiche Differenzen in n äquidistant. Für ebensolche Differenzen nehmen die Distanzen auf $\Sigma \frac{1}{p^n}$ Taf. 2_7 stets ab und ihre Summe convergirt gegen 20, was durch einen starken Abschlussstrich hervorgehoben ist. Die Distanzen von Σp^n nehmen auch stets ab, allein die Summe convergirt nicht.

Auf die übrigen Taf. 2 aufgetragenen Maassstäbe werden wir später noch einmal zurückkommen.

13. Ueber graphische Darstellungen im Allgemeinen.

So alt als die Kunst des Zeichnens ist auch die der graphischen Darstellungen; die ersten Schriftzeichen waren nichts Anderes, als Darstellungen der Objecte, welche sie im Geiste vorführen sollten. Während nun die Schrift ihren eigenen Weg ging und die Schriftformen sich mehr und mehr von der Form der ursprünglichen Objecte entfernten, zu Conventionalzeichen wurden, suchte die bildende Kunst ihre Darstellungen mehr und mehr mit der Wirklichkeit in Einklang zu bringen, und schon im grauen Alterthum war man so weit gekommen, selbst Thiere mit dem Bild zu täuschen. Die ersten einfachsten Bilder bestanden nur aus Umrissen, Profilen. Diese Profile behaupteten in ihrer einfachen Form ihren Platz, abgesehen von allen Vervollkommnungen der Zeichenkunst. Bei dem Bau der ältesten Tempel mussten die Profile ihrer Gesimse gezeichnet werden, und die Umrisse der Berge und die Längenprofile der auf diese zu führenden Strassen sind Profile. Das Profil dient aber nicht allein zu technischen, sondern auch zu Darstellungen abstracter Begriffe, seitdem man den Verlauf verschiedener Curven eingehender studirt.

Ebene Curven werden als der graphische Ausdruck der Abhängigkeit zweier Variabeln aufgefasst und leisten in dieser Form der Analysis und der Technik ausgezeichnete Dienste. Die gezeichnete Curve gewährt einen besseren Ueberblick, als wie die eingeschriebene Gleichung, es können auf der Zeichnung leicht alle Singularitäten hervorgehoben und anschaulich gemacht werden; das gilt in noch höherem Grad, wenn die Gleichung der Curve nicht gegeben ist, sondern nur einzelne zusammengehörige Werthe zweier Variabeln in Tabellenform gegeben sind. In diesem

Fall kann die aufgetragene Curve sogar dazu dienen, die noch unbekannten Abhängigkeitsgesetze zu ermitteln. So bieten jetzt die aufgetragenen Temperatur- und Barometercurven den Meteorologen das vorzüglichste Material ihrer Studien.

Auch im vorliegenden Buche werden wir beständig und in der ungebundensten Form Gebrauch von diesem Hülfsmittel machen; es wäre daher Unrecht, wenn wir mit Stillschweigen die Bestrebungen des französischen Ingenieurs *L. Lalanne* übergehen wollten, der in den *Annales des pts. et ch.* 1846 1 *pg.* 1. *Memoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur* versuchte, die Lehre der graphischen Darstellungen zu vervollkommnen und auf drei Variabeln auszudehnen; und zwar ist das hier am Schlusse des Kapitels über Rechenschieber um so mehr am Platz, als seine Studien zu einem ganz ähnlichen (jedoch früher schon bekannten) Instrumente führen.

So wie eine Function zwischen zwei Variabeln durch eine Curve, deren Coordinaten sie sind, dargestellt werden kann, ebenso kann es bei einer Function zwischen drei Variabeln durch eine Fläche geschehen, und wenn wir auf dem Zeichenblatt, das nur zwei Dimensionen hat, eine krumme Oberfläche darstellen könnten, könnten wir zugleich Functionen von drei Variabeln eben so gut, als mittelst des Profils solche von zwei Dimensionen darstellen.

Mittelst Horizontalcurven ist dies aber möglich. Es mögen die drei Unbekannten xyz räumliche Coordinaten vorstellen, wobei wir uns, um das Wort Horizontalcurven mit Recht gebrauchen zu dürfen, die Ebene der xy horizontal denken. Wir geben jetzt der Variabeln z einen festen constanten Werth $z = z_n$, durch welchen eine Parallelebene z_n zu xy dargestellt wird. Die Gleichung zwischen den Variabeln ist die einer Curve in der Ebene z_n, die wir parallel zur z Axe in die Ebene der xy projiciren und dort zeichnen. Geschieht nun dasselbe für eine ganze Reihe äquidistanter Werthe z_0 ($z = 0$), z_1 z_2 ... z_{n-1}, so erhält man eine Reihe von Curven, in denen jeder Topograph die Horizontal- oder Niveaucurven erkennen wird und welche, in hinlänglich kleinen Distanzen construirt, ein vollkommenes Bild der Fläche geben; hat man ebenfalls in hinlänglich kleinen Entfernungen mittelst feiner Striche die x und y eingezeichnet, so kann man auch

unmittelbar, ohne irgend etwas vorher zu zeichnen, das zu bestimmten Werthen von xy gehörige z ablesen.

Ist die Gleichung in Bezug auf x und y vom ersten Grad, so sind die Horizontalen der z gerade Linien. Die Function $z = \alpha x + \beta y + c$ wird durch eine Reihe paralleler Geraden dargestellt. Insbesondere bilden diese Geraden gleiche Winkel mit den x und y Axen, wenn $\alpha = \beta$ ist, Winkel von 45°, wenn diese Axen senkrecht auf einander stehen.

Die Gleichung $z = \frac{x}{y}$ oder allgemeiner $z - c = \frac{x-a}{y-b}$ wird durch einen Strahlenbüschel dargestellt, dessen Mittelpunktscoordinaten a, b sind.

Ist die Gleichung vom zweiten Grad, so sind die Curven Kegelschnitte.

Die Einmaleinstafel $z = xy$ wird durch eine Reihe gleichseitiger Hyperbeln dargestellt, welche die Coordinatenaxen zu Asymptoten haben. Diese Hyperbeln können aber auch leicht in gerade Linien verwandelt werden, man braucht nur zu setzen:

$$\lg z = \lg x + \lg y,$$

und die Logarithmen als unbekannte betrachten. Da $\lg x$ und $\lg y$ den gleichen Coefficienten $\alpha = \beta = 1$ haben, stellt diese Gleichung für constante z Linien von 45° dar. In Taf. 2_1 haben wir ein solches Multiplicationsschema dargestellt. Die Seiten des Vierecks enthalten die logarithmische Eintheilung, die wir schon vom Rechenschieber her kennen. Alle gleichnamigen Theilstriche sowohl der gegenüberliegenden als auch der bei 0 anstossenden Seiten sind durch horizontale, verticale und durch Linien, die unter 45° schief stehen, mit einander verbunden. Mittelst dieser so construirten Tafel, von *Lalanne* Abacus genannt, kann nun wie mittelst des Rechenschiebers operirt werden. Laut Obigem und auch aus sonst selbstverständlichen Gründen schneiden sich eine horizontale und eine verticale Linie zweier Zahlen auf der schiefen Linie, welche der Zahl ihres Productes entspricht; aus demselben Grund, die horizontale (oder verticale) und schiefe Linie zweier Zahlen auf der verticalen (oder horizontalen) ihrer Productenzahl.

Man ist aber nicht auf das Product zweier Zahlen beschränkt, man kann so viele man will mit einander multipliciren; um 2 . 3 . 5 . 7 zu bilden, fahre man (mit irgend einem spitzen Zeiger)

auf der Verticallinie 2 bis zur Horizontallinie 3, sie schneiden sich auf der schiefen Linie 6; auf derselben fährt man bis zu einem Rand, dem unteren z. B., dann auf 6 hinauf bis zur Horizontalen von 5, sie schneiden sich auf der Schiefen 3 (resp. 30), wir fahren auf derselben zur Horizontalen 7, welche auf der Schiefen 21 geschnitten wird. So oft man den rechten oder oberen Rand trifft, hat sich die Charakteristik um eine Einheit vermehrt, es geschah das zwei Mal, mithin hat das Product die Charakteristik 2 und ist 210.

Genau auf die gleiche Weise, nur umgekehrt, verfährt man beim Dividiren. Es sei zu bilden $\frac{360}{3.4.5.6}$. Wir fahren auf der schiefen Linie 360 bis zum Schnitt mit der verticalen 6, sie schneiden sich auf der horizontalen 6, wir fahren an den verticalen Rand nach 6 und von dort auf der schiefen 6 bis zur horizontalen 5, sie schneiden sich auf der verticalen 1,2, wir fahren auf der verticalen hinauf bis zum oberen Rand und von dort auf der schiefen bis zum Punkt, wo sie sich in die Factoren 3.4 zerlegt; der gesuchte Quotient ist also = 1.

Die Divisionen und Multiplicationen können nun auch abwechselnd vorgenommen werden, so dass man beliebige Producte mit directen und reciproken Factoren bilden kann.

Die Horizontal- und die Verticallinie zweier gleichen Zahlen schneiden sich auf der Diagonalen, die durch den Ursprung geht und senkrecht auf den schiefen Linien steht; sie kann daher als die Linie der Quadrate bezeichnet werden.

Zieht man durch den Ursprung Linien, welche mit der Horizontalen die Tangente 2 bildet, so schneidet sich auf ihr jede Verticallinie mit der Horizontalen ihres Quadrats und der schiefen Linie ihres Cubus. Sie kann daher als die Linie der Cubus bezeichnet werden.

Denkt man sich überhaupt den ganzen Strahlenbüschel der äquidistanten Tangenten gezogen, so schneidet er irgend eine Verticallinie auf der Horizontalen ihrer 1, 2, 3..$n$ten Potenz und auf den schiefen Linien ihrer . . . . 2, 3, 4..$(n + 1)$ten Potenzen. In Taf. 2_1 sind nur die Linien der zweiten und dritten Potenzen gezogen. Mittelst derselben kann man also auch Quadrat- und Cubikwurzeln ausziehen.

Hat man Zahlen, Quadrate, Cubus oder beliebige Potenzen mit einem Coefficienten zu multipliciren, so kann das direct mittelst des Zirkels geschehen oder man kann auch, wenn die Zahl häufig wiederkehrt, um es ein für allemal gethan zu haben, durch die Zahl des Coefficienten eine Horizontallinie ziehen. Wäre z. B. die Horizontale p aufgetragen, so könnte man, um lp zu bilden, auf der Verticalen l hinauf bis zur Linie der Quadrate fahren, auf den Schiefen herunter bis zum Rand und von hier hinauf bis zu p, wo das Product abzulesen ist.

Noch bequemer ist es, wenn die Operation sehr häufig wiederkehrt, in der Entfernung des Multiplicationscoefficienten Parallellinien zu den Quadrat- oder Cubuslinien zu ziehen. In Taf. 2_1 geschah dies für die Bildung der Producte $r\pi$ und $r^3\pi$. Durch die Zahl π des verticalen Randes wurden Parallele zur Diagonalen gezogen. Irgend eine Verticallinie 4 z. B. schneidet diese Parallele auf der Horizontalen $r\pi = 12{,}6$ und auf der schiefen Linie 50,3, die Charakteristik ist in beiden Fällen gleich 1, weil die Linie π vor dem Schnittpunkt einmal den horizontalen Rand getroffen hatte.

In Taf. 2_1 wurde noch eine Linie mit dem Tangentenverhältniss 2 durch $\frac{4}{3}\pi = 4{,}19$ gezogen, eine Verticallinie durch den Radius schneidet sie auf dem Inhalt der Kugel.

Aus dem Vorausgehenden ist ersichtlich, dass man eigentlich alle Operationen mit dem einfachen Abacus Taf. 2_1 ausführen kann, dass dagegen die Operationen für einzelne häufig vorkommende Rechnungen vereinfacht, also erleichtert werden können. Wir haben Taf. 2_2 noch ein besonderes Quadrat für die Bildung der im technischen Leben so häufig vorkommenden Producte a^2b und $a\sqrt{b}$ gezeichnet. Die Linien werden, wenn man die horizontalen Abscissen den Quadraten a, und die verticalen Ordinaten den einfachen Potenzen zuweist, mit der Horizontalen den Tangentenwinkel $-\frac{1}{2}$ bilden. Auf dem horizontalen Rand münden die schiefen Linien, auf dem Product a^2b, auf den Verticalen $a\sqrt{b}$ aus; als Ingenieur, der häufiger a^2b braucht, haben wir die schiefen Linien durch die Theilstriche der ganzen Zahlen des horizontalen Randes gezogen und an den verticalen Rand deren Wurzeln geschrieben; ein Mechaniker und Hydrauliker, der häufiger $a\sqrt{b}$

braucht, hätte die schiefen Linien durch die Theilstriche der ganzen Zahlen des verticalen Randes gezogen und an den horizontalen Rand deren Quadrate geschrieben. Wäre endlich für eine und dieselbe sehr häufig wiederkehrende Operation eines der obigen Producte, beständig mit einem und demselben Coefficienten zu multipliciren, so würde man das ganze System dieser Linien um den Logarithmus dieses Coefficienten vertical verschieben, wenn es sich um einen Coefficienten von $a\sqrt{b}$ handelt, und horizontal, wenn es sich um einen solchen von a^2b handelte. Auf einer schiefen Linie von 45° durch den Ursprung schneiden sich die verticalen und horizontalen mit den schiefen des Cubus und der $\frac{3}{2}$ ten Potenz.

Auf einer Linie, die mit der Horizontalen den Tangentenwinkel n bildet, schneiden sich die Verticale a, die Horizontale a^n und die schiefe Linie, welche auf der Horizontalen bei a^{2n+1} und auf der Verticalen auf $a^{n+\frac{1}{2}}$ ausmündet.

Beispiel. Welches ist das Gewicht einer Eisenstange von ,025 M. im Gevierten und 3 M. Länge? Wir nehmen das specifische Gewicht des Eisens 7,8 in Zirkel und tragen es vom Schnitt der Horizontalen 2,5 mit der Verticalen 3 M. aus horizontal auf, die Zirkelspitze trifft auf die scharfe Linie 59 (genau 591). Die Charakteristik ist, wenn wir in Decimetern und Kilogrammen rechnen, $= 1 + 2 . \bar{9} = 9$. Die schiefe Linie 59 trifft in die dritte Scala, also ist die Charakteristik des Resultats $9 + \bar{2} = 1$; das Gewicht demnach 59 Kilogr.

Würde es sich um runde Körper handeln, so hätte man zum specifischen Gewicht noch den Logarithmus des entsprechenden π zu addiren.

Alle Arten von Tafeln, mit deren Zahlen zu multipliciren oder zu dividiren ist, lassen sich in Form von Maassstäben bringen, auf denen die entsprechenden Längen direct abgegriffen werden können. Taf. 2_4 und 2_5 sind Maassstäbe für die trigonometrischen Functionen; einen Vortheil dieser graphischen Tafeln den gedruckten gegenüber müssen wir noch hervorheben: die beiden Segmente irgend eines Punktes auf der Scala ergänzen sich zur Scalenlänge, sie sind daher die Logarithmen reciproker Zahlen; es sind also durch die Logarithmen der sin. und cos. auch die der sec. und cosec. gegeben, als Distanzen vom rechtseitigen Rand.

Dasselbe gilt von Taf. 2_6 der p^n, die Entfernung irgend eines n vom rechten Rand ist gleich dem Log. von $\frac{1}{p^n}$.

Diese sin. und cos. Stäbe erstrecken sich nur über das Intervall $\bar{8}$ bis 1 der Charakteristiken. Da für die sin. oder tg. von Winkeln, welche einen kleineren Logarithmus als $\bar{8}$ haben, die Bogenlängen genommen werden können, so hat man, um die Logarithmen dieser Functionen zu erhalten, nur die Länge einer Minute oder Secunde, welche Taf. 2_9 zu entnehmen ist, zum Logarithmus der betreffenden Minuten- oder Secundenzahl zu addiren. Der Stäbe Taf. $2_{6\,7\,8}$ haben wir weiter oben S. 76 schon erwähnt.

In Taf. 2_9 endlich haben wir noch einige Functionen von g und π aufgetragen. Namentlich für g ist der oben erwähnte Vortheil der reciproken Strecken beachtenswerth, indem man beinahe so häufig $\frac{1}{2g}$ und $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ braucht, als wie $2g$ und $\sqrt{2g}$.

Der praktische Techniker wird diese Tafeln nun nach Belieben erweitern und vermehren. Nur als Beispiele figuriren sie hier auf Taf. 2.

Vergleicht man die Operationen mittelst des Abacus mit denen mittelst des Rechenschiebers, so scheinen jene allgemeiner und umfassender als wie diese zu sein, dagegen erscheinen sie uns weniger genau und praktisch: eine Linie zwischen zwei schiefen Linien zu interpoliren, längs derselben herabfahren bis zu einer interpolirten Verticallinie und dann wieder hinauffahren, ist jedenfalls viel ungenauer, als die Aneinanderreihung der drei zu addirenden Strecken. Rechnet man hiezu noch, dass der Rechenschieber viel leichter in die Tasche geschoben werden kann, als ein in grösserem Maassstabe ausgeführter Abacus, so begreift man die grössere Verbreitung, die der Rechenschieber nach und nach gewonnen hat.

14. Verwandlung der Gleichungen, die krumme Parallelschnitte geben, in solche mit geraden.

Bei der Construction des Abacus ist es uns gelungen, mit Hülfe des Logarithmirens die Function $z = xy$, die Hyperbeln darstellt, wenn man z eine Reihe constanter Werthe beilegt, durch gerade Linien darzustellen. Dieses Verfahren ist einer Ausdehnung fähig. Es ist zunächst klar, dass diese Darstellung

durch gerade Linien immer möglich ist, wenn die Gleichung nach zwei der Unbekannten, x und y z. B., so getrennt werden kann, dass sie die Form

$$a_z x' + b_z y' + c_z = 0$$

annimmt, worin x' eine eindeutige Function von x allein, y' eine solche von y und a_z b_z c_z solche von z allein sind. Denn man braucht nur x und y fortlaufende Werthe beizulegen, die entsprechenden $x'y'$ auszurechnen, auf die Coordinatenaxen auftragen und die Theilpunkte mit den Indexen der x und y zu versehen. Dann für fortlaufende Werthe von z die Axenabschnitte $-\frac{c_z}{a_z}$ und $-\frac{c_z}{b_z}$ berechnen, auftragen, Linien durchziehen und mit dem Index des zu Grunde gelegten z versehen, so ist die Darstellung vollendet. Das Blatt ist dann von drei Schaaren gerader Linien, nämlich Parallelen zu den Coordinatenaxen und schiefen Linien, erfüllt; und in jedem Punkt, in welchem sich drei solcher Linien schneiden, tragen diese drei Linien die Indexe zusammengehöriger xyz.

In den oben behandelten Beispielen $z = \frac{x}{y}$ ist $x' = x$, $y' = y$, $a_z = 1$, $b_z = -z$ und $c_z = 0$, und in $z = xy$ ist $x = \lg x$, $y' = \lg y$, $a_z = b_z = 1$ und $c_z = -\lg z$.

Ueber die Verwandlung von $\varphi(xyz) = 0$ in $a_z x' + b_z y' + c_z = 0$ lassen sich keine allgemeine Regeln geben. Man wird diejenige Unbekannte, welche in den meisten Gliedern und in den höchsten Exponenten vorkommt, als z behandeln und durch passende Divisionen die beiden anderen zu trennen suchen. Gelingt es nicht, so wird die folgende Verwandlung unter allen Verhältnissen auf unendlich viele Weisen möglich sein.

$$\varphi(xyz) = a_z f_1(xy) + b_z f_2(xy) + c_z = 0;$$

setzt man jetzt:

$$x' = f_1(xy) \quad \text{und} \quad y' = f_2(xy),$$

so wird die Reduction vollbracht sein, allein man wird vielleicht zur graphischen Bestimmung von x' und y' eine oder zwei weitere graphische Tafeln, die ebenfalls aus drei Schaaren gerader Linien bestehen, zu Hülfe nehmen müssen. Wäre eine von diesen f_1 oder f_2 wiederum nicht mittelst eines einzigen Blattes gerader Linien darstellbar, so könnten weitere Blätter zu Hülfe genommen wer-

den; es ist sogar denkbar, dass unendlich viele Blätter angenommen werden müssten, die Function also in dem hier angenommenen Sinne gar nicht convergire. Wie dem aber auch sei, so wird es nie zweckmässig sein, mehr als ein Blatt zur Darstellung zu verwenden, und gelingt diese nicht mittelst gerader Linien, so möge man zu Curven greifen, denn bei mehreren Blättern geht die graphische Uebersichtlichkeit ganz verloren.

Als Beispiel für eine Function, die zweier Blätter bedarf, behandelt *Lalanne* die Function:

$$z = \frac{ax^2}{x+y},$$

und setzt $x + y = y'$, wozu ein Blatt mit schiefen Linien zu 45° nothwendig ist, $x' = ax^2$ kann direct durch Numeration reducirt werden und die Function $z = \frac{x'}{y}$ ist jetzt durch einen Strahlenbüschel dargestellt, der durch den Ursprung geht. Allein dieses zweiten Blattes bedarf es auch nicht, bringt man die Gleichung auf die Form:

$$y - ax^2 \cdot \frac{1}{z} + x = 0,$$

oder

$$y - (ax^2)\ z' + x = 0,$$

wo $z' = \frac{1}{z}$ gesetzt wurde, und man hat die Gleichung der geraden Linie zwischen y und z'.

Von den durch *Lalanne* behandelten Beispielen wollen wir hier noch einer Tafel für Strassenauf- und Abträge erwähnen, auf die wir später zurückkommen werden, und einer sehr schönen Tafel zur allgemeinen Auflösung der cubischen Gleichungen, die vorher auf die Form:

$$x^3 + px + q = 0$$

zu bringen sind. Den Grössen p und q werden die Coordinatenaxen zugewiesen, und jeder Werth von x giebt eine gerade Linie bezüglich der Coordinaten p und q. Alle diese geraden Linien umhüllen eine cubische Parabel; durch jeden Punkt im Innern derselben gehen drei Strahlen, durch jeden Punkt ausserhalb derselben nur einer, so dass hier das Reich der imaginären und reellen Wurzeln ausgeschieden ist; dieses Verfahren ist natürlich

auch auf die Lösung aller Gleichungen von der Form

$$x^m + px^n + q = 0$$

anwendbar.

Der Aufsatz schliesst mit geschichtlichen Notizen über graphische Darstellungen.

Wir glaubten bei der Ausarbeitung graphischer Methoden diesen bedeutenden Aufsatz nicht mit Stillschweigen übergehen zu dürfen.

Drittes Kapitel.

Verwandlung der Flächen.

15. Verwandlung des Dreiecks.

Die Richtigkeit der oben Nr. 4 zur Bestimmung des Flächeninhalts der Fig. 19 und 20 (s. S. 15) ausgeführten Multiplication lässt sich auch direct geometrisch nachweisen. Verbindet man nämlich C und D mit B u. A, so ist wegen der Parallen AD und BC der Inhalt des Dreiecks $OCD = OAB$. In Fig. 19 ist dann $2b$ die Basis, f die Höhe, in Fig. 20 aber $2b$ die Höhe, f die Basis des Dreiecks OCD, mithin ist in beiden Fällen der Flächeninhalt von $OAB = F =$

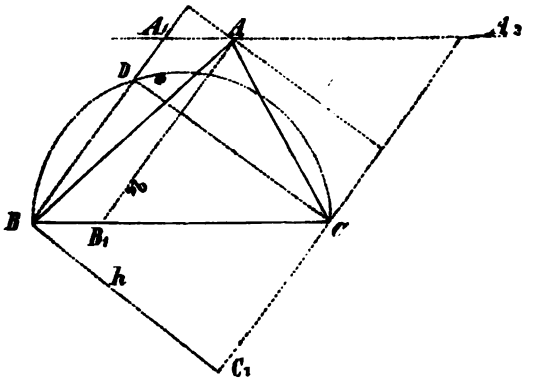
$$\tfrac{1}{2} \cdot 2bf = bf \text{ . oder } f = \frac{F}{b},$$

d. h. wir haben den Flächeninhalt F durch die Höhe f eines Rechtecks dargestellt, dessen Basis $= b$ ist. Wir sind also hier durch Verwandlung des Dreiecks AOB auf die Dreiecksbasis oder Dreieckshöhe $2b$ genau auf dieselbe Weise zu demselben f gelangt, als wie früher durch Multiplication derselben Höhe mit der Basis und durch Division des Productes durch b. Bei complicirteren Figuren lässt sich diese Uebereinstimmung nicht mehr nachweisen, und dann ist die Verwandlung der Figur entschieden der Bestimmung und Summirung der Flächeninhalte aller einzelnen Dreiecke, aus denen sie besteht, durch Multiplication ihrer

Dimensionen vorzuziehen. Wir wollen also jetzt zeigen, wie beliebige Figuren durch Verwandlung in ein Rechteck mit bestimmter Basis oder ein Dreieck, das das Doppelte dieser Basis zur Höhe oder Basis hat, gemessen werden können. Man erhält dann durch diese Verwandlung Linien, welche diesen Flächeninhalten proportional sind, und die ganz nach den Regeln des ersten Kapitels behandelt werden können.

Es muss nicht immer, wie in Fig. 19 und 20, irgend eine der drei Seiten eines Dreiecks als dessen Basis betrachtet werden, sondern es kann jede Linie AB_1 (Fig. 45), welche einen Eckpunkt A mit einem Punkt B_1 der gegenüberliegenden Seite BC

Fig. 45.



verbindet, als solche betrachtet werden. Als Höhe hat man dann die orthogonale Projection CD der A gegenüberliegenden Seite BC auf eine Senkrechte zu AB_1 anzunehmen. Diese Projection auf einen Perpendikel wollen wir zum Unterschied der Projection auf die Linie AB_1 selbst die Antiprojection nennen.

Denn verwandelt man durch Ziehen der Parallelen AA_1 das Dreieck ABC in das Dreieck gleichen Inhalts A_1BC (CA_1 ist nicht ausgezogen), so dass A_1B parallel und gleich AB_1 ist, so wird CD die Höhe des Dreiecks A_1BC sein. CD nimmt seinen grössten Werth an, wenn es mit BC zusammenfällt, dem entspricht denn der kleinste Werth von AB_1, nämlich die Höhe des Dreiecks ABC. Dreht man dann AB_1, so nimmt es bis ins Unendliche zu, während D einen Halbkreis auf BC beschreibt und bis zu 0 abnimmt. Man kann demnach jede Länge, die grösser als

die Höhe des Dreiecks ist, als Basis, und als Höhe jede Länge, die kleiner ist als die A gegenüberliegende Seite BC, zur Reduction anwenden.

Ebenso wie das Dreieck in A_1BC verwandelt wurde, kann es auch in A_2BC verwandelt werden und sein Inhalt als Product von $\frac{1}{2} A_2C . BC_1$ abgelesen werden; überhaupt kann die Doppelbasis $2b$ als schief gemessene Entfernung der Basis BC von der parallelen AA_1 zu ihr an jeder beliebigen Stelle gemessen werden. Und die Höhe $h = BC_1$, DC u. s. w. kann auch als senkrechte Entfernung der beiden durch B und C geführten Parallelen an jeder beliebigen Stelle gemessen werden. In obiger Figur sind die drei durch die Eckpunkte des Dreiecks gehenden besonderen Lagen der Basis und Höhe eingezeichnet worden.

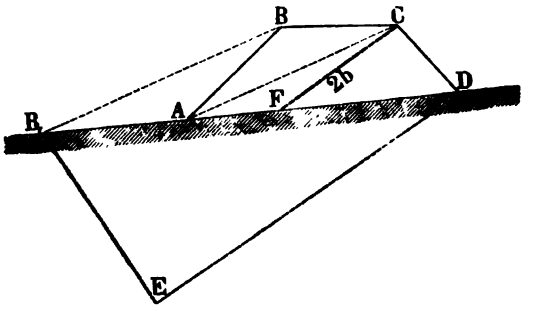
Betrachtet man zwei durch denselben Eckpunkt gehende senkrechte Linien, z. B. A_1B und BC_1 als zusammengehörig, so kann man auch sagen: Führt man durch einen Eckpunkt B eines Dreiecks zwei Senkrechte BA_1 und BC_1, und schneidet man auf der einen durch eine Parallele AA_1 zu einer durch den Punkt B gehenden Seite die Länge BA_1, und auf der anderen durch eine Parallele CC_1 zu BA_1 die Länge BC_1 ab, so wird durch das Product dieser beiden Längen der doppelte Inhalt des Dreiecks dargestellt.

Ist nun eine der beiden Linien CD oder AB_1 gleich der Doppelbasis $2b$ angenommen worden, so wird die andere gleich der Linie f sein, die den Flächeninhalt darstellt.

16. Verwandlung des Vierecks.

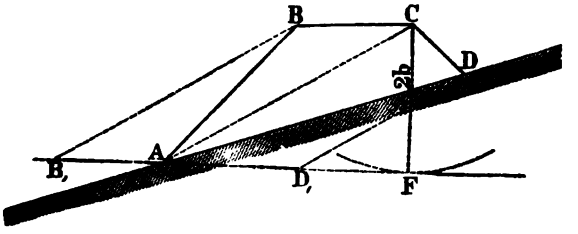
Das Viereck $ABCD$ (Fig. 46, s. S. 88) könnte man durch Ziehen der Parallelen BB_1 zu AC in ein Dreieck B_1CD verwandeln (die Linie B_1C wurde nicht ausgezogen) und dann durch eine beliebige Basis FC und die dazu gehörige Antiprojection B_1E der Seite B_1D den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen, nach dem man entweder CF oder B_1E gleich der Doppelbasis $2b$ angenommen hatte, erhält man die andere Linie als Maass f des Vierecks.

Fig. 46.



Man kann jedoch ohne Verwandlung zur Reduction des Vierecks auf die Doppelbasis $2b$ gelangen; man beschreibe (Fig. 47) mit $FC = 2b$ einen Kreisbogen von C aus, ziehe von A aus eine Tangente B,F an denselben und betrachte FC als Antiprojection

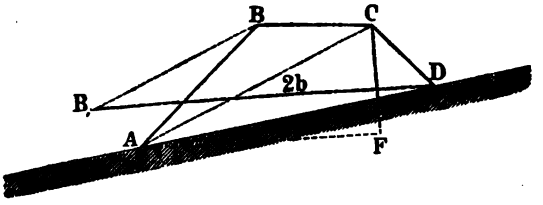
Fig. 47.



der Diagonalen AC, dann wird (analog der Fig. 45 S. 86), wenn $BB,$ und $DD,$ parallel zu CA laufen, $AB,$ die Basis des Dreiecks ABC und $AD,$ die Basis des Dreiecks $ACD,$ mithin der Flächeninhalt $ABCD = {}^1/_2 \overline{B,D,} \,.\, \overline{CF} = {}^1/_2 \overline{B,D,} \,.\, 2b = \overline{B,D,} \,.\, b$ und durch $B,D,$ dargestellt sein.

Diese Construction ist nicht mehr ausführbar, wenn CF länger als die grösste Dimension des Vierecks $ABCD$ ist; dann

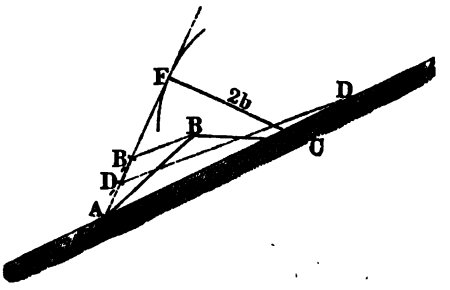
Fig. 48.



trage man diese Länge $2b$ als Basis B,D auf, indem man von D aus mit der Zirkelöffnung $2b = B,D$ auf der zur Diagonalen AC Parallelen BB, den Punkt B, abschneidet. Der Flächeninhalt wird dann durch die Antiprojection CF der Diagonalen AC gemessen.

Ist das Viereck verschlungen, wie Fig. 49, so geben obige Constructionen die Differenz (statt wie in Fig. 48 die Summe) der beiden Dreiecke ABC und ACD, aus denen das Viereck besteht. Die Basen der beiden Dreiecke ABC und ADC fallen dann auf einander, ziehen sich ab und die längere AB, bezeichnet die grössere Fläche.

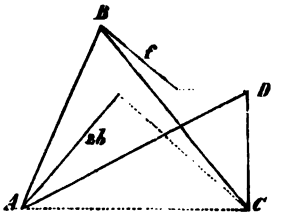
Fig. 49.



Bei der Verwandlung von verschlungenen Vierecken hat f das Zeichen der Fläche, zu deren Begrenzung die von der gemeinschaftlichen Diagonale AC entferntere Ecke gehört.

Gerade so wie die den Inhalt des Dreiecks in Fig. 45 darstellenden Linien an mehreren verschiedenen Orten abgegriffen werden konnten, können auch bei den Vierecken diese Linien verschiedene Lagen erhalten. Wir wollen sie hier nicht alle zeichnen, und begnügen uns, daraus eine einzige bequeme für das verschlungene Viereck (Fig. 50) zu zeichnen, den Nachweis der Richtigkeit dem Leser überlassend.

Fig. 50.

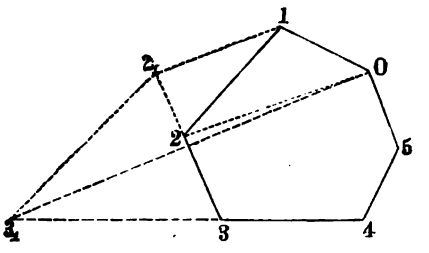


17. Verwandlung mehr als vierseitiger Polygone.

Zieht man durch eine Ecke 1 (Fig. 51, s. S. 90) eine Parallele 1 2, zur Diagonalen $O2$, welche die beiden nächsten Endpunkte verbindet, bis zu ihrem Durchschnitt 2_1 mit der zweiten Seite 2 3, so wird das Dreieck O 1 2 dem Dreieck $O\ 2_1\ 2$. ($2_1 O$ ist nicht aus-

gezogen), mithin auch das Polygon $O\ 2_1\ 3\ 4\ \ldots$ dem gegebenen Polygon $O\ 1\ 2\ 3\ 4$ gleich sein. Der Eckpunkt 1 ist also eliminirt, und das neue Polygon hat ein Eck weniger. Auf dieselbe Weise kann nun auch der neue Eckpunkt 2_1 dadurch eliminirt werden, dass man $2_1\ 3_1$ zu $O3$ parallel zieht. Auf diese Weise fortfahrend kann man ein Polygon von beliebig vielen Seiten in ein Viereck, hier $O3_1 4\ 5$ verwandeln und dieses dann nach Nr. 16 S. 88 auf die Basis $2b$ reduciren.

Fig. 51.



Bei dem oben beschriebenen Verfahren wurde der Eckpunkt O in der Art festgehalten, dass jede neue Seite eines jeden neuen Polygons durch diesen Punkt geht; es lässt sich aber auch statt eines Eckpunkts eine Seite festhalten.

Auf Taf. 3_2 ist diese Operation an einem Eisenbahnprofil vorgenommen worden. Es wurde

1 1, parallel zu 2 O
2 2, „ „ 3 1,
3 3, „ „ 4 2,
4 4, „ „ 5 3,
5 D „ „ A 4,

gezogen und so schliesslich die Linie AD bestimmt, welche gleiche Flächeninhalte rechts und links abschneidet. Die Richtigkeit dieser letzteren Verwandlung bedarf keines weiteren Nachweises und es genügt hier, den Gang anzudeuten. Wird auf dieselbe Weise der obere Theil des Profils auf die Linie BC verwandelt, so hat man nur mehr das Viereck $ABCD$ auf die Doppelbasis $2b$ zu reduciren, um f, das den Inhalt des ganzen Profils darstellt, zu erhalten.

Die hier angedeutete Art und Weise, den Flächeninhalt zu bestimmen, ist wohl die zweckmässigste bei allen gegebenen Querprofilen der verschiedenartigsten Form. Mit etwas Uebung erlernt man die Verwandlungen ganz mechanisch auszuführen, indem man immer nur die Spitze des Zirkels oder des Bleistifts in 1, 2, 3, 4, etc. einsetzt und ohne Numeriren und ohne Linienziehen

die Operation ausführt. Liegt z. B. der Winkel bei 3 3, so wird mit dem Stift der Winkel an dem Punkt 3, festgehalten, während man den Winkel sammt dem Lineal, an den er nachher gleiten soll, um 3, drehend auf den zweiten Punkt 5 bringt, dann lässt man den Punkt 3, los und verschiebt am Lineal den Winkel nach dem nächsten Punkt 4 und der Punkt 4, ist bestimmt u. s. f.

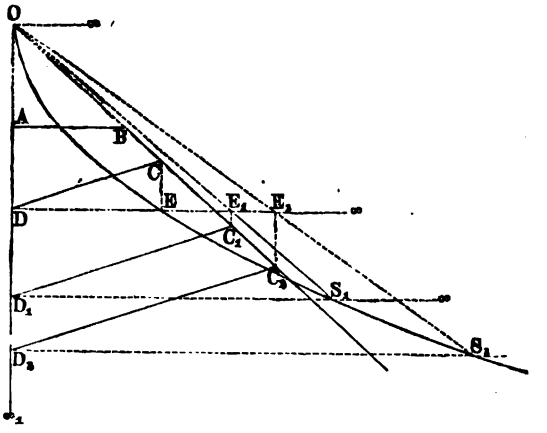
Dieses Verfahren ist ganz mechanisch und man hat nicht im Mindesten auf die Form der Begrenzung Rücksicht zu nehmen, und es ist einerlei, ob der Linienzug, den man verwandelt, sich nach rechts oder links wendet. Constructionen aber, die so ganz mechanisch, ohne irgend eine Beachtung der Lage der verschiedenen vorkommenden Linien ausgeführt werden können, haben immer auch eine ganz allgemeine Geltung, und wirklich verwandelt diese Methode, bei etwa vorkommenden Verschlingungen, mit Berücksichtigung des Zeichens, die Fläche. Wird z. B. genau wie oben beschrieben, bei Verwandlung des Taf. 3_3 aus Auf- und Abtrag bestehenden Profils verfahren, so gleicht sich ganz von selbst Auf- und Abtrag aus und das verwandelte Profil *A B C D* ist gleich der Differenz der zwei Flächen. Ob zwei Flächen gleichen oder entgegengesetzten Sinnes seien, erkennt man daran, ob der sie fortlaufend umfahrende Linienzug, den man verwandelt, die einzelnen Flächen in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne umfährt. So ist der Sinn 3 4 *A B C O*, in welchem der Auftrag umfahren wird, der entgegengesetzte vom Sinn *C O* 1 2 3 4, in welchem der Abtrag umfahren wird, wie es durch die Pfeile im Innern einer jeden Figur angedeutet ist. Der Sinn, in welchem die Schlussfigur *A B C D* umfahren wird, bezeichnet die Flächen, deren Summe die grössere ist. Wären z. B. mehr Ab- als Auftragsflächen vorhanden gewesen und in Folge dessen die Linie *A D* nach *A D*, gefallen, so würden in der That *A B C D, A* und *C O* 1 2 3 4 gleichen Sinnes sein.

18. Parabeltafel für Auf- und Abtragsprofile.

Die Querprofile der Strassen und Eisenbahndämme sind meistens Vierecke, welche auf drei Seiten von geraden Linien gleicher Richtung und Lage und auf der vierten von der Terrainlinie begrenzt sind, deren Lage und Richtung sich ändert.

Da die Flächen dieser Profile ausserordentlich häufig zu berechnen sind, so hat man sie für verschiedene Lagen und Richtungen der Terrainlinie im Voraus berechnet, tabellarisch geordnet und auch graphisch in der Art aufgetragen, dass man den Flächeninhalt der Profile unmittelbar auf der Horizontalen abgreifen kann, welche durch den Terrainpunkt geht. Wir wollen hier zeigen, wie eine solche graphische Tafel statt gerechnet construirt werden kann. Wie gewöhnlich verwandeln wir nur das halbe Profil $ABCD$ (Fig. 52) und betrachten dasselbe als Differenz

Fig. 52.



der Dreiecke OCD und OBA. Diess hat den Vortheil, die graphische Tafel für alle Profile gleicher Böschung benutzen zu können, indem man mittelst einer einzigen Parallelen zu OD_2 den für jede Profilgattung constanten Inhalt OAB über der oberen Begrenzung AB abziehen kann. Unsere Aufgabe besteht nun vorerst nur darin, alle Dreiecke OCD, OC_1D_1 ... auf eine gemeinschaftliche Doppelbasis OD so zu reduciren, dass die Spitzen der reducirten Dreiecke auf die Horizontalen durch DD_1D_2 fallen.

Man projicire den Fuss aller Böschungen CC_1C_2 durch verticale auf die Horizontallinie, die durch D den Fuss der Doppelbasis geht, nach EE_1E_2, so werden die gegebenen Dreiecke OCD, OC_1D_1, OC_2D_2 ..... den Dreiecken OED, OE_1D_1, OE_2D_2 etc. gleich sein, und diese den Dreiecken OED, OS_1D, OS_2D (weder die Linien D_1E_1, D_2E_2 noch D_1S_1, D_2S_2 wurden

ausgezogen) etc., wenn die Punkte $E E_1 E_2$ auf die Horizontalen DE, DS_1, DS_2 von O aus projicirt werden. Diese letzteren Linien stellen also den Flächeninhalt der aufeinanderfolgenden Dreiecke dar; um ihn zu erhalten, hat man sie nur mit $^1/_2\, OD$ als Basis zu multipliciren.

Verbindet man alle S durch eine Curve, deren Natur wir sogleich ermitteln werden, so ist durch diese der Flächeninhalt aller Profile gleicher Böschung und gleicher Neigung des Geländes gegeben.

Die Punkte $E S_1 S_2 \ldots$ können als Schnitte des Strahlenbüschels O $(DEE_1 E_2 \ldots \infty)$ und des Parallelstrahlenbüschels ∞ $(O D D_1 D_2 \ldots \infty_1)$ betrachtet werden. Beide Strahlenbüschel sind demselben geraden Gebilde $O C C_1 C_2 \ldots \infty_2$ projectivisch, mithin ist der Ort aller S eine Curve zweiter Ordnung.

Da dem gemeinschaftlichen Strahl $O\infty$ als Strahl des Büschels O betrachtet, die unendlich ferne Gerade $\infty\infty_1$ des Parallelstrahlenbüschels ∞ entspricht, so berührt die Curve diese im Punkt ∞; sie ist also eine Parabel und $O\infty$ ein Durchmesser.

Dem gemeinschaftlichen Strahl ∞O als Strahl des Parallelenstrahlenbüschels betrachtet, entspricht der Strahl OD des Büschels O : OD ist also eine Tangente, welche die Curve im Punkt O berührt.

Da die Tangente OD senkrecht auf dem ihrer Richtung conjugirten Durchmesser $O\infty$ steht, so ist dieser letztere die Axe der Parabel.

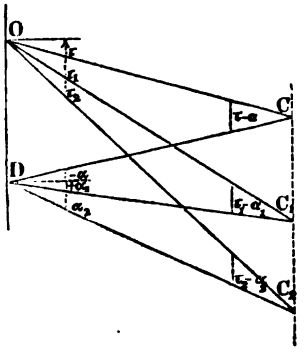
Diese Parabel ist demnach vollständig bestimmt und kann für jede gegebene Böschung und Geländeneigung leicht construirt werden.

Aendert man die Böschung oder ändert man die Neigung des Geländes, so erhält man eine andere Parabel. Construirt man nun für verschiedene stetig aufeinanderfolgende Neigungen des Geländes die dazu gehörigen Parabeln, so kann man durch Interpolation für alle Neigungen des Geländes den Flächeninhalt des Profils auf der Horizontalen abgreifen, die durch den Fuss seiner Mittellinie geht.

Wenn sich die Böschung ändert, so ändern sich ebenfalls die Parabeln; allein da die Aenderung des Flächeninhaltes in Folge der Böschungsänderung genau derselben Art als die in Folge der Aenderung der Neigung des Geländes ist, so dass die Inhalte aller

Profile OCD, OC_1D und OC_2D (Fig. 53), bei denen die Differenzen $\tau - \alpha$ der Neigungstangenten und der Böschungstangenten des Geländes gleich gross sind, ebenfalls gleich gross sind: so thut man am besten, zum Index der Parabeln nicht etwa die Neigungen des Geländes oder der Böschungen, sondern diese Tangentendifferenz $\tau - \alpha$ selbst zu nehmen. Auf diese Weise erhält man eine und dieselbe graphische Parabeltafel, welche für alle Neigungen der Böschungen, des Geländes und für alle Profilhöhen dienen kann.

Fig. 53.



Da die Tangentendifferenz $\tau - \alpha$ als Index der Flächentafel dienen soll, so ist es am zweckmässigsten, diese Differenzen in arithmetischer Reihe auf einander folgen zu lassen. Dies ist nicht allein bequem, um ohne graphisches Auftragen der Geländeneigung den Inhalt aus der Tafel direct abzulesen, sondern es erleichtert noch ungemein die Construction der Tafel selbst, indem dann alle Strahlen des Büschels O (Fig. 52 S. 92) durch die verschiedenen Parabeln in gleiche Theile getheilt werden. Es sei OC (Taf. 3_4) irgend ein Strahl, welcher die Horizontale DC des Fusspunktes D der Doppelbasis OD im Punkt C schneidet, und den Winkel arc. tg τ mit der Horizontalen bildet, dann wird dieser Punkt ein Punkt der Parabel τ sein, denn die Höhe OD des Dreiecks OCD ist bereits gleich der Doppelbasis, mithin bedarf es keiner Reduction mehr, und sein Inhalt wird durch CD dargestellt. Wir ändern nun die Tangentendifferenz τ um δ, indem wir tg $D_1CD = \delta$ machen; es ist dann der Inhalt des Dreiecks OCD_1 auf der Parabel $\tau - \delta$ abzulesen, und wir erhalten einen Punkt derselben, indem wir es durch Ziehen der Parallelen D_1C_1 in das Dreieck OC_1D verwandeln, dessen Höhe gleich der Doppelbasis OD ist, so dass D_1C_1 das Maass des Dreiecks OCD_1 ist. Da nun von Constructionswegen C_1 auf dem Strahl OC und auf der Horizontalen des Terrainpunktes D_1 liegt, so ist C_1 ein Punkt der Parabel $\tau - \delta$ auf dem Strahl OC. OD_1D und OC_1C sind also ähnliche Gebilde, und wenn die Unterschiede DD_1, D_1D_2 etc. der Tangentendifferenzen gleich gross sind, so werden es auch

die Segmente CC_1, C_1C_2 etc. sein, welche die Parabeln auf dem Strahl OC abschneiden. Um die Punkte zu erhalten, in welchen andere Strahlen OB, OE von denselben Parabeln geschnitten werden, hat man die Schnitte H, K dieser Strahlen mit der Horizontalen, welche durch den Schnitt C der treffenden Parabel mit dem Strahl OC geht, parallel zur gemeinschaftlichen Tangente OD auf diesen nach G und I, und diese Punkte horizontal (parallel zum gemeinschaftlichen Durchmesser) auf die Strahlen $O(HK)$ zu projiciren, um die gesuchten Parabelpunkte B, E zu erhalten. Der Beweis lässt sich ganz wie oben daraus ableiten, dass die Strahlenbüschel $\infty(OGCI\infty_2)$ und $O(DHCK\infty)$ dem geraden Gebilde $OGCI\infty_2$ projectivisch sind.

Aus diesen Constructionen könnte auch noch direct gefolgert werden, dass alle Strahlen von O durch die Parabeln in ähnlichen Gebilden $OB_2B_1B\ldots$, OC_2C_1C, OE_2E_1E geschnitten werden, wenn es nicht unmittelbar schon daraus hervorginge, dass O ein Aehnlichkeitscentrum der ähnlich gelegenen Parabeln ist. Aus letzterem folgt aber noch, dass alle Strahlen des Büschels O von den Parabeln unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Diese sind demnach auch gleich dicht auf einem Strahl, wenn sie ihn in gleiche Segmente theilen. Will man daher die Unterschiede der Tangentendifferenzen auf den Strahlen von der Verticalen ausgehend gegen die Horizontale hin abnehmen lassen, so hat diese Abnahme auf die ganze Länge des Strahles hin in gleicher Weise zu geschehen. Längs eines ganzen Strahles hin hat der Unterschied der Tangentendifferenzen von 0,01, z. B. auf 0,02, dann auf 0,05 und 0,10 zuzunehmen.

19. Construction und Benutzung der Parabeltafel.

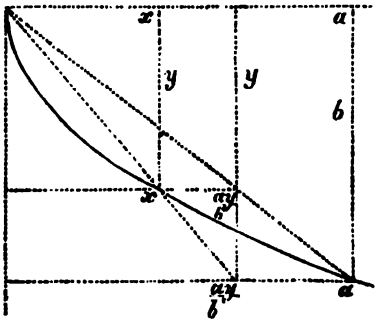
Mittelst der eben entwickelten Grundsätze und einiger einfachen Rechnungen ist es nun leicht, die Parabeltafel zu construiren. Wir nehmen auf dem Millimeterblatt Taf. 4, das 2,4 Decimeter lang und 1,8 breit ist, den oberen Rand als Abscissen- und als Axe der Parabeln, den linken verticalen Rand als Ordinaten-Axe und als gemeinschaftliche Tangente aller Pabeln an, und werden den Schnitt dieser beiden Linien, den Ursprung der Coordinaten mit O, alle Punkte mit (xy) bezeichnen.

Die Gleichungen der zu construirenden Parabeln OBC z. B. ergeben sich einfach aus der Proportion $\frac{FB}{FG} = \frac{DH}{DC}$ oder (Fig. 54) $\frac{x}{y} = \frac{ay}{b^2}$, oder $= \frac{y}{a}$, wenn wie auf Taf. 4 $b = a$, d. h. $GOF = 45^0$ gemacht wird, denn dann ist die Ordinate y des Punktes $B = OF = FG = DH$ und die Gleichung der Parabel wird:

$$y^2 = ax.$$

Mittelst dieser Gleichung wurden die Ordinaten aller Parabeln der Taf. 4 der Parameter 100, 50, 30 und 20 direct für Ordinatendifferenzen von 0,1 bis 0,2 gerechnet.

Fig. 54.



Für alle folgenden Parabeln wurden die Schnitte derselben mit den aufeinanderfolgenden Strahlen von O bestimmt. Für den ersten dieser Strahlen z. B., der den unteren Rand des Blattes bei 0,18 schneidet und dessen Gleichung demnach:

$$y = \tau x = \frac{1,8}{0,18} x = 10\, x$$

ist, hat man

$$y = \frac{a}{\tau} = 0,1\,.\,a, \quad \text{und} \quad x = \frac{a}{\tau^2} = 0,01\,.\,a.$$

Die Parameterdifferenz Δa der auf diesem Strahl auslaufenden Parabeln ist $= 1$, demnach die Ordinatendifferenzen gleich 0,1 (1 Centimeter) und die Abscissendifferenzen $= 0,01$ (1 Millimeter). Es geht demnach eine Parabel durch jeden Schnitt des Strahles $\tau = 10$ mit einem Centimeter und Millimeter.

Hierauf wurde $\frac{1}{\tau} = 0,12$ gesetzt. Der entsprechende Strahl schneidet den unteren Rand mit der Parabel 15 in 0,216 und die der Parameterdifferenz $\Delta a = 1$ entsprechende Ordinatendifferenz Δy ist $= 0,12$; und die Parabeln, die durch den Schnitt des

Strahls 10 mit der Horizontalen 0,1, 0,2, 0,3 ... gingen, gehen auch durch den Schnitt des Strahls $\frac{1}{0,12}$ mit den Horizontallinien 0,12, 0,24, 0,36 u. s. f. Die zwischen diesen Strahlen befindlichen Parabelstücke können daher direct eingezeichnet werden, sie laufen alle mit einander parallel, so dass ein an einem Lineal verschiebbarer Winkel nur einmal angelegt zu werden braucht, um die schon vorhandenen Parabeln zu verlängern. Die Abscissendifferenzen der Parabelschnitte auf dem letzten Strahl sind $\Delta x = \frac{\Delta a}{\tau^2} = 0{,}0144$; erst die Parallele $a = 25$ geht durch den Schnitt der Verticallinie 0,36 mit dem Strahl. Da dieser Schnitt über das Blatt fällt, so enthält der Strahl keinen Schnitt von Verticallinien mit einer Parabel.

Auf dieselbe Weise wurden weiters nun die Parabeln zwischen den Strahlen $\frac{1}{\tau} = 0{,}12$ und 0,13 gezogen u. s. f. Wir begnügen uns hier damit, die Werthe von $\frac{1}{\tau}$, Δa, Δx und Δy für diejenigen Strahlen zu geben, auf denen neue Parabeln auftreten und die also Dichtigkeitsgrenzen bilden.

$\frac{1}{\tau}$	0,1	0,2	0,3	0.5	0,8	1,2	2,4	4	8	15
Δa	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,002
Δy	0,1	0,1	0,06	0,05	0,04	0,024	0,024	0,02	0,016	0,03
Δx	0,01	0,02	0,018	0,025	0,032	0,0288	0,0576	0,08	0,128	0,45

Die Abscissen der Schnitte der Strahlen mit dem oberen Rand erhält man durch Multiplication von 1,8 mit $\frac{1}{\tau}$; und die mit dem Seitenrand durch Division von 2,4 mit $\frac{1}{\tau}$.

Gegen Ende werden die Schnitte der Strahlen mit den Horizontalen sehr schief, auf der anderen Seite aber sind dann auch die Entfernungen der Parabeln auf denselben viel grösser, viele derselben liegen auf Kreuzungspunkten der Netzlinien, und man erhält dann einfach die übrigen Punkte durch Theilung der Entfernung dieser Netzpunkte von O in eine kleine ganze Zahl. So gehen z. B. auf dem Strahl $\frac{1}{\tau} = 4$ alle Parabeln durch solche

Kreuzungspunkte, jeder fünfte Strahl durch eine Kreuzung von Centimeterlinien, insbesondere erhält man durch Multiplication der Δ mit 20 für die Coordinaten des Schnitts K der Parabel $a = 0{,}1$ mit dem Strahl $x = 1{,}6$ und $= 0{,}4$.

Da eine Parabel durch den Scheitel, ihre Axe und irgend einen ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, so gelangt man zu den auf Taf. 4 verzeichneten Parabeln, welches auch die Basis sein mag, auf die man die Flächeninhalte zu reduciren beabsichtigt; diese Tafel kann daher zur Reduction auf alle möglichen Basen dienen, denen sie einfach durch die Bezeichnung der Parabeln angepasst wird. Soll jede Parabel mit der Tangentendifferenz $\tau - a$ (Fig. 53, S. 94) der Böschungs- und Geländeneigungen bezeichnet werden, so muss die Parabel den Index 1 erhalten, welche durch den Punkt $(2b, 2b)$, dessen Coordinaten gleich der Doppelbasis sind, geht. Taf. 4 wurde für eine Reductionsbasis von 5 Ctm. oder eine Doppelbasis von 10 Ctm. beziffert, und die Parabel, welche durch die Ecke des Decimeters O geht, mit 1 bezeichnet. Denn es ist klar, dass jetzt das rechtwinkelige Dreieck, dessen Hypotenuse $O1$ (auf der Linie OC) ist, keiner weiteren Reduction mehr bedarf, weil jede seiner Catheten schon der Doppelbasis gleich ist, und sein Flächeninhalt daher auch durch diese dargestellt wird. Der Index aller anderen Parabeln ergiebt sich durch die proportionale Bezifferung aller Strahlen des Büschels O.

Zum Schluss erläutern wir den Gebrauch dieser Flächentafel durch ein Beispiel:

Es seien die Inhalte des Auf- und Abtrags für das Normalprofil Taf. 3_5 zu bestimmen.

Wir verwandeln das Dreieck über dem Auftragsprofil in das Dreieck AOA_1 und das unter dem Abtragsprofil in das Dreieck BB_1O_1, die Höhe dieser Dreiecke ist gleich der Basis b, die Hälften ihrer Basen f und f_1 stellen daher ihren Flächeninhalt dar (6,75 und 12,4 Quadratctm.).

Der Ursprung der Coordinaten für die Verwandlung des Auftrags ist daher auf Taf. 4 der Punkt M, dessen Abscisse gleich f, und dessen Ordinate gleich OL (Taf. 3_5) ist; und für die Verwandlung des Abtrags ist es der Punkt N, dessen Abscisse gleich f und dessen Ordinate gleich O_1L ist.

Soll nun z. B. für eine Auftragshöhe LP und eine Neigung

des Geländes 0,53 der Inhalt des Profils (Taf. 3_5) bestimmt werden, so findet sich derselbe als Abscisse PQ (Taf. 4) des Punktes der Parabel 0,67 — (— 0,53) = 1,2, dessen Ordinate MP gleich der Höhe LP (Taf. 3_5) ist. Er muss natürlich mit dem zur Probe construirten Inhalt $f_{,,}$ übereinstimmen. Der wirkliche Inhalt ist gleich $PQ \,.\, b = 3{,}66 \,.\, 5 = 18{,}3$ Quadratctm.

Die Parabel kann auch auf graphischem Wege bestimmt werden. Der Strahl OC_1 (Taf. 4), der mit der Horizontalen einen Winkel bildet, dessen Tangente $= \tau - \alpha$ ist, schneidet jederzeit die Horizontale $D_1 C_1$, deren Ordinate $= 2b = 10$ Ctm. ist, in den zugehörigen Parabeln; denn das Dreieck $D_1 O C_1$ bedarf dann keiner Verwandlung mehr. Man trage also ein für allemal die am Rand $2b = OR$ gemessene Neigungstangente der constanten Böschung RT (hier bei $1^1/_2$maliger Böschung $\frac{10}{1{,}5} = 6{,}7$ Ctm.) auf und ziehe davon die ebenfalls am Rand $OR = 2b$ gemessene Tangente der Neigung des Geländes TU (hier $— 10 \,.\, 0{,}53 = — 5{,}3$) ab, so wird $RU = 2b\,(\tau - \alpha)$ sein; und U wird ein Punkt des Strahles OC_1 sein, der in C_1 die treffende Parabel angiebt.

Auch ohne Auftragen von MP kann der Flächeninhalt auf rein rechnerischem Wege ermittelt werden:

Zur Auftragshöhe $LP = 5{,}1$ Ctm. (Taf. 3_5) addire man die constante Ergänzungshöhe $OL = 2{,}65$, dann findet man (Taf. 4) die zur Ordinate 7,75 gehörige Abscisse des Punktes Q der Parabel 1,2, deren Index nun eben rechnerisch ermittelt wurde, gleich 5 Ctm., einem Flächeninhalt von $5 \,.\, 5 = 25$ Quadratctm. entsprechend. Hievon geht der ein für allemal bestimmte Inhalt 6,75 des Ergänzungsdreiecks ab, und es bleiben 18,25 Quadratctm. als Inhalt des Profils. Alles, was hier vom Auftrag gesagt wurde, gilt wörtlich auch von Abtragsprofilen. Kaum brauchen wir noch zu erinnern, dass die jetzt erläuterte parabolische Flächentafel zur gegenseitigen Bestimmung je zweier Werthe dienen kann, die durch die Relation $y^2 = n \,.\, 2bx$, wo n den Index der Parabel bezeichnet, gegeben sind. Die Parabel 0,1 z. B. geht durch alle Punkte, deren Ordinaten gleich den Wurzeln der Abscissen sind, also durch die Punkte (1,1) (4,2) (9,3) (16,4) etc.

20. Die Formeln für Auf- und Abtragsprofile, und ihre Darstellung durch gerade Linien.

Wie oben schon erwähnt wurde, hat man früher zur Berechnung der Querschnittsflächen Tafeln mit doppeltem Eingang construirt, denen für gegebene Auftrags- oder Abtragshöhe und gegebene Neigung des Geländes der entsprechende Flächeninhalt entnommen werden konnte. Trotzdem dass die Berechnung solcher Tafeln heute nicht mehr praktisch erscheint, wegen der Aenderungen, die an den Profilen beständig vorzunehmen sind, und weil auf dem Wege der Verwandlung und Umfahrens mittelst des Planimeters, den wir in einer der folgenden Nummern werden kennen lernen, die Inhalte beinahe so schnell als wie mittelst einer Hülfstafel ermittelt werden können, so wollen wir dennoch hier kurz zeigen, wie die für diese Berechnungen dienenden Formeln entwickelt werden können.

Es sei α die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der letzten Profilbegrenzung gegen die Horizontale. In Fig. 55 und 56 sind es die Böschungen

Fig. 55.

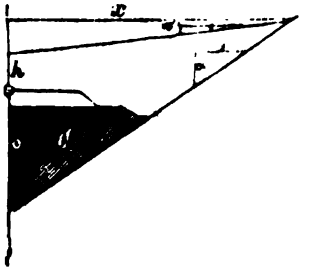
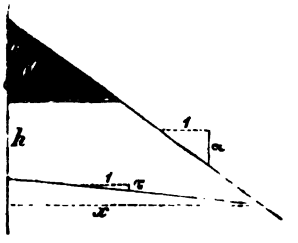


Fig. 56.



des Profils. τ die in demselben Sinne gemessene Neigungstangente des Geländes. Ferner sei h die Auftragshöhe, c die constante Höhe, welche die Höhe h zum Segment ergänzt, das von der Böschung α und dem Gelände τ auf der Mittellinie ausgeschnitten worden, und x die horizontalgemessene Entfernung des Schnittpunktes dieser Linien von der verticalen Mittellinie des Profils, so hat man:

$$(\alpha - \tau)x = h + c.$$

Ist endlich C der constante Inhalt der Fläche, welche das Profil zum Dreieck, zwischen α und τ, ergänzt, die wir in den Fig. 55 u. 56 schraffirt haben, die dort negativ ist, die aber auch positiv sein kann, z. B. wenn das Gelände auf der Grabensohle ausmünden sollte, so erhält man den Inhalt der Querschnittsfläche:

$$F = \frac{1}{2}(h + c)\,x - C = \frac{(h + c)^2}{2(\alpha - \tau)} - C.$$

Diese Gleichung bestätigt die oben gefundenen Resultate. Betrachtet man $h + c$ als variable Abscisse und trägt man am Ende derselben in irgend einem Maassstabe F, oder wenn man sich graphisch ausdrücken will, F getheilt durch irgend eine Verwandlungsbasis als Ordinate auf, so wird der Ort der Endpunkte derselben,

weil F nur in der ersten Potenz vorkommt, eine Parabel sein. Die Linie der $(h+c)$ ist die Axe der Parabel. Der Parameter der Parabel ist weder eine Function von τ, noch von α, sondern von $\alpha - \tau$, man geht also von einer Parabel zu einer andern über, wenn man die Böschung oder die Geländeneigung ändert; für dasselbe $\alpha - \tau$ erhält man aber immer dieselbe Parabel. Die abzuziehende constante Fläche C wird einfach durch Parallelverschiebung der Abscissenaxe berücksichtigt.

Diese Formeln gelten nur innerhalb gewisser Grenzen, es muss natürlich das Gelände die treffende Profilbegrenzung schneiden. Sind xy die Coordinaten einer Profilecke, so muss $h = y \pm x \operatorname{tg} \alpha$ sein, wenn das Gelände durch diesen Eckpunkt gehen soll, und ist demnach die entsprechende Grenze. Für gewisse Werthe von h, die sich aus den Grenzen ergeben, schneidet das Gelände die Profilbegrenzung ein zweites Mal, so dass dann das Profil sowohl Auftrag als auch Abtrag enthält. Die neu hinzukommende Fläche muss, wie sich das von selbst versteht, besonders berechnet werden, dann aber zu der durch die Formel gegebenen Fläche addirt werden; denn die Formel giebt mathematisch consequent fortarbeitend den Inhalt der verschlungenen Figur, d. h. die Differenz des Auf- und des Abtrags, nämlich die Fläche 0, wenn Auf- und Abtrag sich ausgleichen; es muss also in diesem Fall die hinzugekommene Fläche auch zur Fläche 0 addirt werden, um die richtigen Flächen zu erhalten.

Taf. 2_3 haben wir auch nach *Lalanne's* Methoden diese Inhalte durch gerade Linien dargestellt; in der vereinfachten Formel:

$$F = \frac{1}{2} h^2 . \frac{1}{\alpha - \tau}$$

fassen wir $\frac{1}{2} h^2$ als Coefficienten der Abscisse $\frac{1}{\alpha - \tau}$ auf, dann ist die Gleichung der Ordinate F eine gerade Linie. Als Einheit für die Zahl $\frac{1}{\alpha - \tau}$ haben wir $,02^m$ angenommen, also $\frac{,02^m}{\alpha - \tau}$ aufgetragen, und 2 an die Verticale ,01; 1 an ,02; ,5 an ,04; ,25 an das Ende der Tafel 0,8 geschrieben. Als Maassstab für die Flächen wurde $,001^m$ für 1^{qm} angenommen; es wurden demnach auf dem Rand rechts der Verticalen ,25 die Segmente $F = \frac{1}{2} h^2 . \frac{1}{25} = 2 h^2$ oder die Höhen ,002 ,008 ,018 0,032 ,05 $,72^m$ aufgetragen, die erhaltenen Punkte mit dem Ursprung verbunden, die Strahlen des erhaltenen Büschels mit den entsprechenden $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnet, Strahlen eingeschaltet, wo es thunlich erschien, dann der Strahlenbüschel auf mehrere Strahlen fortgesetzt, und die Tafel war vollendet.

Diese Tafel ist gewiss viel leichter zu construiren als die Parabeltafel, allein sie besitzt nicht mehr dieselbe graphische Unmittelbarkeit. Die Höhen sind Producte der Rechnung und müssen durch Rechnung ergänzt werden; man kann nicht mehr wie auf Taf. 4 die zu ergänzende Ordinate M oder N abziehen und von dort aus die Höhen mit dem Zirkel abgreifen, sondern es muss die Ergänzungshöhe von M des Profils Taf. 3_5 mit $2{,}6^m$ für den Auftrag und die Höhe von N mit $4{,}55^m$ für den Abtrag zur Profilhöhe in Zahlen addirt werden, und so bestimmt sich erst der den Flächeninhalt abschneidende Strahl. Dagegen können die Ergänzungs-

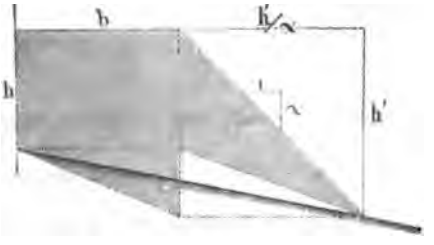
dreiecke der Flächen mit $6{,}75^{qm}$ und $12{,}4^{qm}$ für Auf- und Abtrag direct mittelst Horizontallinien abgeschnitten werden, weil die Verticallinien den Flächeninhalten direct proportional sind, es geschah so Taf. 2_3. Um nun mittelst dieser Tafel das Auftragsprofil von Seite 98 Taf. 3_5 zu berechnen, ermittle man die totale Höhe des Profils $= 7^m{,}7$; der entsprechende Strahl schneidet auf dem Neigungsverhältniss $\alpha - \varepsilon = 1{,}2$ mit der Horizontalen von 6,75 Met. den Flächeninhalt aus, wie das auf der Figur bei PQ angedeutet ist.

Als allgemeine Flächentafel ist Taf. 4 weitaus vorzuziehen, die Parabeln zeigen auch viel anschaulicher das Gesetz des Wachsens der Inhalte, als wie die reciproke Eintheilung der Abscissen auf Taf. 2_3.

Handelt es sich dagegen um die Herstellung einer Tafel für ein specielles Profil, so wird es nach der Form Taf. 2_3 viel leichter sein. Man wird zu h sogleich die Ergänzungshöhe c addiren, den Strahl $h + c$ mit dem Index h versehen, und die Eintheilung der Flächenordinaten erst von der Constante C des Ergänzungsdreiecks aus vornehmen. Dann wird der Strahl der Höhe h auf der Ordinate der Neigung $\varepsilon - \alpha$ den Flächeninhalt direct abschneiden.

Wie wir oben Seite 84 schon bemerkten, hat übrigens *Lalanne* für Darstellung dieser Flächeninhalte die Parabeln beibehalten.

Fig. 57.



Später werden wir noch den Inhalt ausgedrückt durch die Höhen h und h' Fig. 57 brauchen. Wir nehmen die durch die Figur angedeutete Verwandlung in die schraffirte Fläche vor. Dann erhält man den gesuchten Flächeninhalt einfach gleich:

$$F = \frac{1}{2} b\,(h + h') + \frac{hh'}{2\alpha}.$$

Diese Formel kann man in die folgende Form bringen:

$$F = b\left(\frac{h+h'}{2}\right) + \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{h+h'}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{h-h'}{2}\right)^2,$$

$$= F' - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{h-h'}{2}\right)^2;$$

wenn man den Inhalt des unten horizontal begrenzten Profils der Höhe $\frac{1}{2}(h + h')$ mit F' bezeichnet.

$\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{h-h'}{2}\right)^2$ aber ist der Inhalt eines rechtwinkeligen kleinen Dreiecks, dessen Hypothenuse die Böschung und dessen Höhe gleich der halben Höhendifferenz $\frac{1}{2}(h - h')$ ist.

Im authographirten: „*Recueil de notes des anciens élèves-ingenieurs de Lausanne* 15 *Déc.* 69" schlägt Herr *Ed. Pellis* vor, einfach Tafeln für Profil-Inhalte bei horizontalem Gelände zu berechnen, F' neben der Höhe $\frac{1}{2}(h + h')$ aufsu-

schlagen und mit den Inhalten des eben bezeichneten kleinen Dreiecks zu corrigiren, die zu diesem Behufe für die verschiedenen Höhendifferenzen ebenfalls in einer Tafel zusammengestellt werden könnten.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die zur Berechnung der mittleren Höhe und halben Höhendifferenz $\frac{1}{2}(h - h')$ nothwendige äussere Höhe h' weder aus der Vermessung noch aus dem Nivellement sich ergiebt, sondern durch Zeichnen des Profils construirt werden muss, und dass die Benutzung der Tafeln nur dann vortheilhaft sein kann, wenn dadurch jenes Zeichnen erspart wird.

Immerhin glaubten wir diesen Vorschlag hier mittheilen zu müssen, und bemerken noch, dass Herr *Pellis* das ganze und nicht das halbe Profil behandelt hat. Die Form der obigen Gleichungen ändert sich dabei gar nicht.

21. Verwandlung von Kreisflächen.

Bei Verwandlung einer von einem Kreisbogen begrenzten Fläche muss man stets von der Eigenschaft des Kreises Gebrauch machen, dass der Flächeninhalt eines Kreissectors gleich dem Flächeninhalt eines Dreiecks ist, das den Mittelpunkt zur Spitze und ein dem Kreisbogen gleich langes Stück der Tangente zur Basis hat.

Das einzige praktische Verfahren, einen Bogen auf einer Tangente zu strecken, besteht darin, eine beliebige Sehne auf dem Bogen und auf der Tangente gleich oft umzuschlagen, und die Reste am Ende zu addiren. Da frägt es sich nun, wie gross darf der Bogen a genommen werden, wenn beim Messen des Bogens l durch Umschlagen der Sehne von a der Fehler nicht grösser als d sein soll.

Die Differenz zwischen Bogen und Sehne ist, wenn wir $2r \sin. \frac{a}{2r}$, wo r den Radius des Bogens bezeichnet, durch eine Reihe ausdrücken und vom Bogen a abziehen

$$\frac{a^3}{4 \cdot 6 r^2} - \frac{a^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 r^4} + \cdots$$

Der Fehler d wird nun gleich $\frac{l}{a}$ mal dieser Differenz sein, weil der Bogen a, $\frac{l}{a}$ mal in l umgeschlagen werden muss, wir haben also:

$$d = \frac{l}{a} \cdot \frac{a^3}{24 r^2} = \frac{a^2 l}{24 r^2},$$

indem der Bogen a immer so klein angenommen werden muss, dass das zweite Glied der Differenz gegen das erste vernachlässigt werden kann. Hieraus folgt nun

1 $$a = r \sqrt{\frac{24 d}{l}}.$$

Für gewöhnliches Reissrechnen wird wohl $^1/_{100}$ oder der Abrundung wegen $^1/_{96}$ Centimeter eine genügende Genauigkeit sein, substituirt man diesen Werth für d, so erhält man

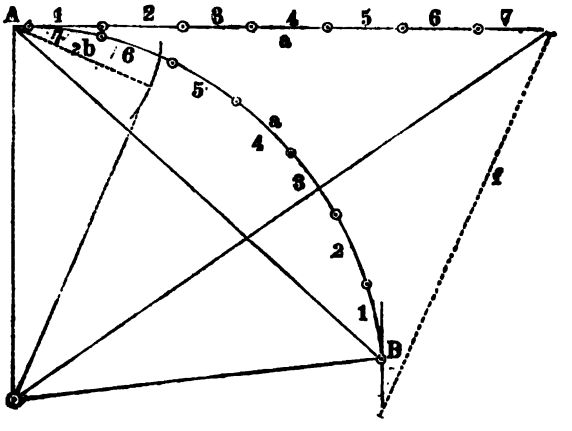
2 $$a = \frac{r}{2\sqrt{l}},$$

wo l in Centimetern ausgedrückt werden muss. Ist z. B. der zu messende Bogen 4 Ctm. lang, so muss $a = {}^1/_4 r$, ist er dagegen 25 Ctm. lang, so muss $a = {}^1/_{10} r$ genommen werden.

Wir empfehlen a nie kleiner als diese Formeln es erheischen anzunehmen, weil man durch zu häufiges Umschlagen einer Sehne an Genauigkeit wieder einbüsst, was man durch die kleinere Sehnen- und Bogendifferenz zu gewinnen hoffte.

Bei dem Strecken eines Bogens AB (Fig. 58) auf der Tan-

Fig. 58.



gente ist es zweckmässig, bei dem dem Berührungspunkte A entgegengesetzten Ende B mit Umschlagen der Länge a, die hier etwa $^1/_5$ des Radius r angenommen wurde, zu beginnen und um-

zuschlagen, bis A in eine Strecke von a fällt, von dem dann A nächstliegenden Endpunkt von a schlägt man dann dieses ebensoviele (hier 7) Male auf der Tangente hinaus, als man es auf dem Bogen herumgeschlagen hatte. Aus leicht begreiflichen Gründen ist diess viel genauer, als das Strecken durch Eintheilen des Bogens in eine gewisse Zahl gleicher Theile bewirken zu wollen.

Wir halten dies für praktischer als wie das Construiren der Länge, um welche die halbe Sehne eines Bogens vergrössert werden muss. So schlägt z. B. Herr *Raim. Hanacek* in der Zeitschrift des österreichischen Ing.- u. Arch.-Vereins 1871 vor, den Bogen nach der Formel:

$$s = 2\sqrt{l^2 + f^2} + \frac{f^2}{3l}$$

zu construiren. $\sqrt{l^2 + f^2}$ ist gleich der Sehne des halben Bogens und $\frac{f^2}{3l}$ ist der Abschnitt des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Höhe $= f$ und dessen anderer Abschnitt $= 3l$ ist. Setzt man $\frac{f}{l} = z$ und entwickelt man s, so findet man:

$$s = 2l(1 + \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{16}z^6 - \cdots);$$

während es nach S. 108 sein sollte:

$$s = 2l(1 + \frac{2}{3}z^2 - \frac{2}{15}z^4 + \frac{2}{35}z^6 - \cdots).$$

Der Fehler ist also kleiner als $\frac{z^4}{120}$ der Länge. Bei einem Halbkreis von ,05 met. Durchmesser erhält man den unzulässigen Fehler von ,001.

Es ist also richtiger und praktischer, die Länge a, womit man die Bogen messen will, so klein anzunehmen, dass sie keiner Correction bedarf, als wie den Bogen mit seiner halben Länge zu messen, dieses Maass aber vorher zu corrigiren.

Will man aber bei sehr kleinen z die Bogenlänge rechnen, so thut man am besten, sich der richtigen Formeln von S. 108 zu bedienen.

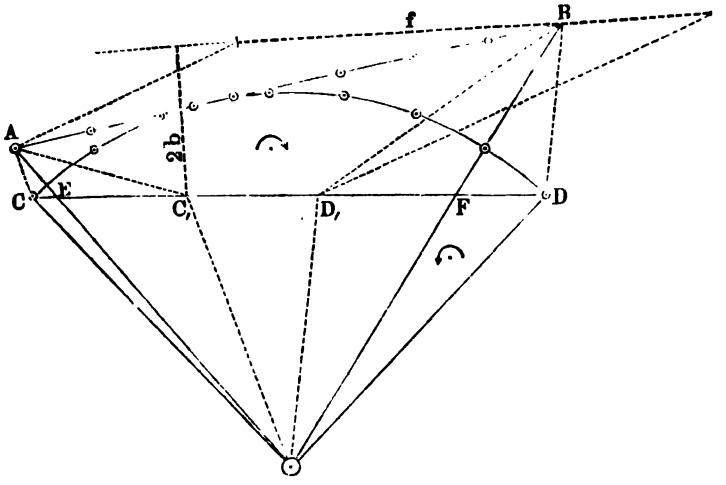
Der Inhalt des Sectors ist gleich dem des Dreiecks AOC, das nach irgend einer der früheren Regeln auf jede beliebige Doppelbasis reducirt werden kann.

Der Inhalt des Segmentes AB ist gleich der Flächendifferenz $OAC - OAB$ oder gleich dem des verschlungenen Vierecks $ACOB$, dessen Inhalt nach Nr. 16 S. 89 durch $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot f$ dargestellt werden kann.

Es ist nicht gerade nothwendig, dass die Tangente durch den Anfangspunkt des Bogens gehe, sondern sie kann an jedem beliebigen Punkt, wie in Fig. 59, den Bogen berühren, es wird dann, wie es in der Figur angedeutet ist, CT nach AT und DT nach

BT gestreckt (T Berührungspunkt der Tangente). Der Inhalt des Sectors ist dann gleich OAB und der des Segments gleich $AOB - OCD$ oder gleich dem Inhalt der Figur $OABODCO$, in der das Viereck $ABFE$ in einem, die Dreiecke OEC und ODF im entgegengesetzten Sinn, das innere Dreieck OEF aber gar nicht mehr, umfahren erscheint. Die Verwandlung in ein Viereck $ABD,C,$ wird wohl am leichtesten dadurch bewirkt werden, dass man durch Ziehen von $OC,$ parallel zu CA und $OD,$ parallel zu DB die negativen Dreiecke AOC und BDO nach AC,C und

Fig. 59.



$BDD,$ bringt. Der Inhalt dieses Vierecks $ABD,C,$ oder der des Segments wird dann durch $\frac{1}{2} 2b \cdot f$ gemessen.

22. Verwandlung eines Gewölbbogens.

Es ist der Flächeninhalt des Gewölbbogens (Taf. 3_6) auf die Doppelbasis $2b$ zu reduciren.

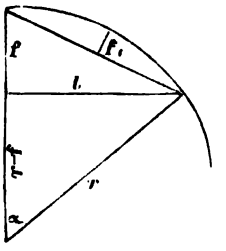
Durch Streckung der beiden das Gewölbe begrenzenden Bogen auf die Anfangstangente AB und 2 3 erhält man den Inhalt des äusseren Sectors $= OAB$ und des Innern 1 3 2. Der Inhalt des Gewölbes ist nun gleich dem Inhalt des äusseren Sectors OAB weniger dem Inhalt der beiden Dreiecke $OA1C$ und 3 2 1, also

weniger der Figur $OA321CO$. Wenn man sie abzieht, so erhält man die Figur $ABOC123A$, in welcher die vom Dreieck OAB übrig gebliebenen Flächen schraffirt und in gleichem Sinn umfahren sind. Die über dieses Dreieck hinausfallenden Theile der abzuziehenden Flächen sind punktirt und im entgegengesetzten Sinne umfahren. Am einfachsten verwandelt man diese Figur in ein Viereck, indem man nach Nr. 17 S. 91 den Zug $C123A$ analog Taf. 3_2 in die Linie C,A verwandelt; man erhält dann das verschlungene Viereck $ABOC,$, dessen Inhalt durch das halbe Product der Linien $2b$ und f dargestellt wird.

Die Figur sieht etwas einfacher aus, ist es aber nicht viel, wenn man nur die eine Hälfte des Gewölbbogens vornimmt und verwandelt. Ganz auf dieselbe Weise wie oben verfahrend, erhält man als Flächeninhalt des halben Gewölbes (Taf. 3_7) die Figur $ABCO321A$, die eben so viele Seiten als Taf. 3_6 hat. Verwandelt man dann den Zug $A123O$, ähnlich Fig. 51 S. 90, in die Linie $AC,$, so erhält man als Flächeninhalt des halben Gewölbes das durch die Linien $2b$ und f dargestellte Viereck $ABCC,$.

Sehr häufig sind in Fällen wie in den eben behandelten die Kreisbogen durch ihre Spannweite und ihren Pfeil gegeben, und es sollen dann aus diesen die Bogenlängen und die Inhalte des Sectors und des Segments berechnet werden. Bezeichnet man, siehe Fig. 60, den Pfeil mit f, die halbe Spannweite mit l, den halben Centriwinkel mit α, so berechnet man zunächst α aus:

Fig. 60.



$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \tau = \frac{f}{l},$$

und:

$$r = \frac{1}{2}f + \frac{l^2}{2f} = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{\tau^2} + 1\right) = \frac{1}{2}l\left(\frac{1}{\tau} + \tau\right),$$

$$r - f = \frac{l^2}{2f} - \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{\tau^2} - 1\right).$$

Woraus sich die halbe Bogenlänge s, der Inhalt des halben Sectors S_t und der des halben Segments S_g wie folgt ergiebt:

$$s = \alpha r,$$

$$S_t = \frac{1}{2}\alpha r^2,$$

$$S_g = \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{2}l(r - f).$$

Ist das Verhältniss $\frac{f}{l} = \varepsilon$ sehr klein, so ist es zweckmässig, diese Ausdrücke in Reihen von ε zu entwickeln. Man erhält:

$$\frac{1}{2}\alpha = \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{5}\varepsilon^5 - \frac{1}{7}\varepsilon^7 + \cdots$$

$$s = \alpha r \quad = l\left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{1.3} - \frac{2\varepsilon^4}{3.5} + \frac{2\varepsilon^6}{5.7} - \frac{2\varepsilon^8}{7.9} \cdots\right)$$

$$S_l = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{4} lf\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{5}{1.3} + \frac{8\varepsilon^2}{1.3.5} - \frac{8\varepsilon^4}{3.5.7} + \frac{8\varepsilon^6}{5.7.9} + \cdots\right)$$

$$S_g = S_l - \frac{1}{4} lf\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) = 2\, lf\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3.5} - \frac{\varepsilon^4}{3.5.7} + \frac{\varepsilon^6}{5.7.9} - \cdots\right)$$

Soll der Pfeil aus Spannweite und Radius berechnet werden, so hat man:

$$f = r - \sqrt{r^2 - l^2} = \frac{l^2}{2r}\alpha + \frac{l^4}{2.4r^3} + \frac{1.3\,l^6}{2.4.6\,r^5} + \cdots$$

Drückt man den Pfeil des halben Bogens f_1 durch f und r aus, so erhält man:

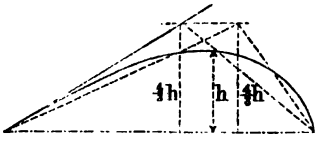
$$f_1 = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}rf} = \frac{1}{4}f + \frac{f^2}{4.8r} + \frac{1.3f^3}{4.8.12r^2} + \frac{1.3.5f^4}{4.8.12.16r^3} + \cdots$$

Sobald also $\frac{f}{r}$ sehr klein ist, kann der Pfeil des halben Bogens gleich dem $\frac{1}{4}$ des Pfeiles des ganzen Bogens gesetzt werden. Auf diesem Verhältniss beruht die Zimmermannsregel des Einviertelns, welche in sehr vielen Fällen, z. B. bei der Bestimmung von Curvenpunkten zwischen den vorhandenen Curvenpfählen sehr gute Dienste leistet.

23. Verwandlung von Flächen, die von beliebigen krummen Linien begrenzt sind.

Bei diesen Verwandlungen betrachtet man kürzere Strecken des krummen Umfanges als Parabelbogen.

Fig. 61.

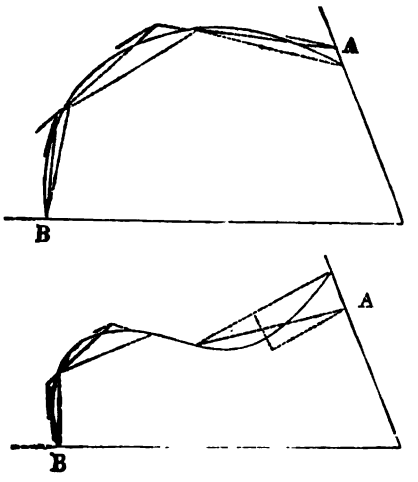


Der Flächeninhalt eines Parabelsegments (Fig. 61) ist gleich der Sehne, multiplicirt mit $\frac{2}{3}$ des Pfeils, also gleich dem Inhalt eines Dreiecks, das die Sehne zur Basis und $\frac{4}{3}f$, wo f die Länge des Pfeiles orthogonal gemessen bezeichnet, zur Höhe hat.

Sind viele derartige Verwandlungen vorzunehmen, so wird die Multiplication von f mit $\frac{4}{3}$ am leichtesten mittelst eines festen Proportionalzirkels vorgenommen.

Man theile nun eine krumme Linie (Fig. 62) in so viele kleine Theile, dass jeder einzelne Bogentheil als Parabelbogen betrachtet werden kann, und verwandle die Parabelsegmente über den, zwei aufeinanderfolgende Punkte verbindenden Sehnen so in Dreiecke, dass die Spitze eines jeden neuen Dreiecks auf der Verwandlungslinie des vorausgegangenen Segmentes liegt. So erhält man statt des Bogens ein Polygon, das gerade so viele Seiten hat als Segmente angenommen wurden, und das denselben Flächeninhalt als der Bogen einschliesst. Das Verfahren wird durch einen Blick auf Fig. 62 klar werden, wo von A gegen B hin verwandelt wurde. Das Polygon kann dann nach den vorausgegangenen Regeln reducirt werden.

Fig. 62.



Ueber die Grösse, die man den Segmenten geben darf, um sie noch als Parabelsegmente betrachten zu dürfen, kann natürlich nichts gesagt werden, so lange die Natur der Curve unbekannt ist, die verwandelt werden soll. Wir beschränken uns daher hier darauf zu untersuchen, wie gross der Fehler wäre, den man beginge, wenn man auf diese Weise den Inhalt eines Kreissegments bestimmte.

Der Inhalt eines ganzen Kreissegments, ausgedrückt durch den Pfeil f und die Sehne $2l$ ist laut voriger Nummer:

$$F = 4lf\left(1/3 + \frac{1}{1.3.5}\left(\frac{f}{l}\right)^2 - \frac{1}{3.5.7}\left(\frac{f}{l}\right)^4 + \frac{1}{5.7.9}\left(\frac{f}{l}\right)^6 - \ldots\right).$$

Nimmt man also diesen Inhalt als Parabelsegment $= 4/3 fl$ an, so

wird ein Fehler begangen, der kleiner ist, als $^4/_3\, lh\, ^1/_5 \left(\frac{f}{l}\right)^2$ oder kleiner als $\left(\frac{f}{2\,l}\right)^2$ mal den Flächeninhalt; ein Verhältniss, das sich leicht dem Gedächtniss einprägt. Ist also der Pfeil $^1/_{10}$ der Sehne, so ist der Fehler kleiner, als $^1/_{100}$ des Segmentinhalts.

Um übrigens noch etwas Bestimmtes vor Augen zu führen, wollen wir uns denken, es werde alles auf eine Basis von 1 Centimeter oder Doppelbasis von 2 Centimetern reducirt, und es sei $^1/_{100}$ Centimeter die Genauigkeit, mit der die Höhen abgegriffen werden können, so wird ein Quadratmillimeter die erzielte Genauigkeit sein. Setzt man also

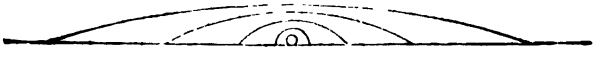
$$1 = {}^4/_3\, lh \,.\, {}^1/_5 \left(\frac{f}{l}\right)^2,$$

so erhält man, wenn nach einander gesetzt wird:

$f =$	1,	2,	3,	4,	5,	Millim.
$2\,l = \frac{8}{15} f^3$	0,54	4,3	14,4	34,1	66,7	Millim.
$\frac{2\,l}{f} = \frac{8}{15} f^2$	0,54	2,1	4,8	8,5	13,3	
$r = \frac{32}{900} f^5 + {}^1/_2 f =$	0,54	2,1	10,1	38,4	113,6	Millim.
Centriwinkel	150°,8′	86°,26	45°,14	26°,23′	11°,25′	

Trägt man diese Segmente auf, so erhält man die Fig. 63, wo bei allen Segmenten 1 Quadratmillim. gefehlt wird, wenn man den Flächeninhalt durch Multiplication der Basis mit $^2/_3$ der

Fig. 63.



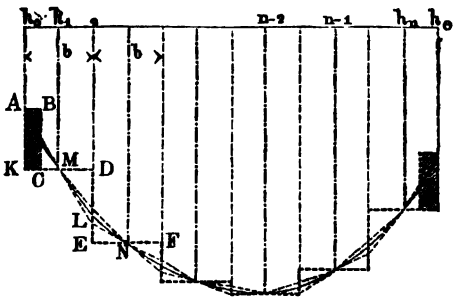
Höhe bestimmt. Bei gewöhnlichen graphischen Constructionen wird man wohl die drei letzten Segmentformen nachahmen dürfen. Diese dem Gedächtniss sich einprägend, bildet man bei Eintheilung eines Bogens in Stücke ähnliche Segmente nach dem Gefühl.

24. Bestimmung des Inhalts einer von beliebigen Curven begrenzten Fläche durch Addition der Ordinaten.

Eine sehr einfache und häufig in der Praxis, z. B. bei Messung von Flussprofilen, Anwendung findende Methode besteht darin, dass man die in gleichen Entfernungen gemessenen Ordinaten summirt, und die Summe mit ihrer constanten Entfernung b multiplicirt; wobei man natürlich die Ordinate in der Mitte einer Strecke b zu messen oder gemessen sich zu denken hat. Da diese Methode äusserst einfach ist, und da auch wir sie häufig anwenden werden, so wollen wir untersuchen, wie gross der Fehler ist, den man so verfahrend begeht.

Der also bestimmte Flächeninhalt ist gleich dem Inhalt des mittelst Tangenten an den Endpunkten der Ordinaten $h_1\, h_2 \ldots h_{n-1}$ h_n (Fig. 64, wo der Index 2 auf der Mitte von b stehen sollte) der

Fig. 64.



Curve umschriebenen Polygons, wobei vorausgesetzt wird, dass zwei aufeinanderfolgende Tangenten sich auf der Ordinate ihrer Mitte schneiden, was auch annähernd der Fall ist. Wegen der Gleichheit der über diesen Tangenten AL und der über den Linien KD, welche zur Abscissenaxe parallel laufen, liegenden Flächen, kann man die Fläche, zu der man gelangt, durch die staffelförmig gebrochene Linie $KDEF$ etc. sich begrenzt denken. Der Inhalt dieser Fläche ist grösser als der, den die Curve einschliesst. Kleiner als dieser Inhalt ist der durch die Sehnen AMN eingeschlossene. Dieser Inhalt ist aber gleich der von der staffelförmig gebrochenen Linie $ABCDDF$ eingeschlossenen

Fläche. Die Differenz zwischen dem Inhalt des eingeschriebenen Sehnen- und dem umschriebenen Tangenten-Polygons, summirt sich also in den am Anfange und am Ende des Profils schraffirten Rechtecken und ihr Inhalt ist $= {}^1/_4\, b\, (h_1 - h_o + h_n - h_e)$.

Hat man die Ordinaten so nahe aufeinanderfolgend gemessen, dass die zwischenliegenden Bogenstücke als Parabelbogen betrachtet werden können, so wird die Curve alle Dreiecke zwischen den Sehnen und Tangenten so theilen, dass die Fläche zwischen Sehne und Curve doppelt so gross als die zwischen Curve und Tangente ist. Die umschriebene Tangentenfläche ist also um ${}^1/_3$ des Inhalts der beiden Rechtecke zu gross. Man hat also den Inhalt des Profils

$$F = b\left(\Sigma h - {}^1/_{12}\ (h_1 - h_o + h_n - h_e)\right)$$

Wohl in den meisten Fällen wird man den hier bestimmten Fehler ganz vernachlässigen können, wird er aber berücksichtigt, so ist diese *Poncelet*'sche Quadratur (siehe *Parmentier, Nouvelles annales de mathématiques Oct.* 1855) genauer als die alte *Simpson*'sche, wie der folgende Vergleich mit der *Simpson*'schen Formel zeigt: diese setzt zwischen den einzelnen Parabeltrapezen durchaus keinen Zusammenhang voraus, sondern es wird der Flächeninhalt zwischen zwei geraden Ordinaten gleich dem durch deren Endpunkte bestimmten Trapez $= {}^1/_2\,(h_{2i} + h_{2i+2})\, b$ und dem darüberstehenden Parabelsegment $= {}^2/_3\,\left(h_{2i+1} - \frac{h_{2i} + h_{2i+2}}{2}\, b\right)$, also im Ganzen gleich $= {}^1/_6\,(h_{2i} + 4\,h_{2i+1} + h_{2i+2})\, b$ gesetzt; werden jetzt alle diese Trapeze summirt, so kommen die erste und die letzte Ordinate h_o und h_e nur ein Mal, alle zwischen liegenden geraden Ordinaten aber zwei Mal, ein Mal für das vorausgehende, ein Mal für das folgende Trapez vor. Die ungeraden Ordinaten behalten ihren Coefficienten 4, die Summenformel lautet dann so:

$$F = {}^1/_6\left(h_o + 4\,h_1 + 2\,h_2 + 4\,h_3 + \cdots 4\,h_n + h_e\right) b.$$

Will man diese Formel mit der obigen vergleichen, so muss man specielle Formen annehmen. Gesetzt, es handle sich um die Flächenbestimmung eines Parabelbogens, dann werden beide Formeln das gleiche und richtige Resultat liefern.

Wir wollen jetzt einmal voraussetzen, alle geraden Ordinaten seien gleich gross, ebenso die ungeraden, die letzteren aber um eine bestimmte constante Länge grösser als jene; dann giebt die *Simpson*'sche Formel eine Folge von unten mit Bogen begrenzten Lamellen, welche bei den geraden Ordinaten der Fläche Spitzen zukehren, während sie bei den ungeraden abgerundet sind.

Parmentiers Formel aber giebt eine Fläche, die bei den geraden und bei den ungeraden Ordinaten vom Parabelbogen begrenzt ist, die zwischen je zwei Ordinaten eine gemeinschaftliche Tangente besitzen und zwischen den Endpunkten der Ordinaten unduliren. Das Letztere aber ist in der Regel die vorhandene Begrenzung der Fläche, die bestimmt werden soll. Also wird in allen Fällen, in denen die Bogen mit ihren bei den Enden einspringenden Ecken nicht markirt sind, die *Simpson*'sche Formel ungenauere Resultate geben. Noch viel grösser wäre der Fehler, wenn die Ecken wirklich markirt wären, aber sich bei den ungeraden Ordinaten befänden. Denn dann müssen die geraden Ordinaten vierfach eingeführt werden, die Formel müsste lauten:

$$1/6\left(\cdots 2h_{2i-1} + 4h_{2i} + 4h_{2i+1} + \cdots\right)b,$$

und der Fehler, den sie begeht, wäre:

$$1/6\left(\cdots 2h_{2i-1} - 2h_{2i} + 2h_{2i+1} - \cdots\right)b,$$

also sehr bedeutend.

An dieser Schlussfolgerung ändert sich nichts, wenn die Ordinaten nicht abwechselnd grösser und kleiner sind, sondern ein Mal unter und ein Mal über einer grösseren durchlaufenden Parabel, wie sie zuerst angenommen wurde, liegen. Immer wird die *Simpson*'sche Formel als Begrenzungslinien halb so viel Parabeln als Ordinaten geben, welche bei den geraden Ordinaten Ecken geben, während die obige Summenformel eben so viele Parabeln als Ordinaten giebt, die in der Mitte zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten eine gemeinschaftliche Tangente haben. Die Begrenzungslinie, die sie voraussetzt, schmiegt sich daher einem wellenförmigen Gelände oder einer krummen Verbindungslinie der einzelnen Punkte viel inniger, als die *Simpson*'sche an.

Ueberhaupt ist durchaus kein Grund vorhanden, in diese Formel die ungeraden Ordinaten mit dem doppelten Gewicht als wie die geraden einzuführen.

Wollte man aber einmal die geraden und einmal die ungeraden verdoppeln und aus beiden Resultaten das Mittel nehmen, so würde die Formel in die obige übergehen, die also auf einfachere Weise ein genaueres Resultat giebt.

25. Maximalflächen bei gegebenem Umfang.

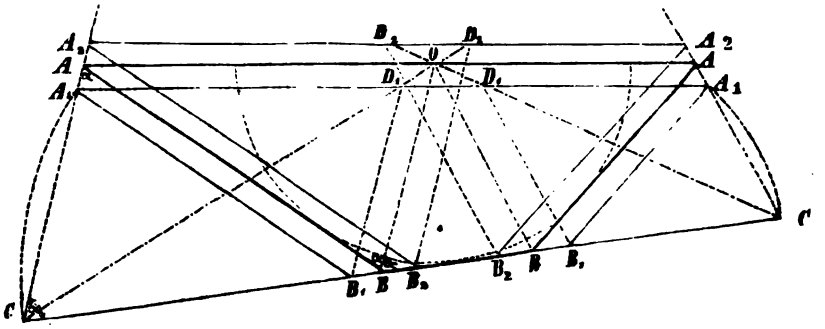
In der Hydraulik begegnet man häufig der Aufgabe, ein Profil von gegebenem Flächeninhalt so zu construiren, dass das Verhältniss der Fläche zum benetzten Umfang, d. h. der Profilradius ein Maximum sei. Gegeben sind in der Regel die Böschungen oder die Richtungen der Polygonseiten.

In allen Lehrbüchern der Geometrie wird der Fall, in welchem die Längen der einzelnen Seiten statt deren Richtungen gegeben sind, behandelt und bewiesen, es müssen alle Eckpunkte des Profils auf einem Halbkreis liegen, während der Fall, in welchem die Richtungen gegeben sind, ignorirt wird. Dass nun in diesem reciproken Fall die Seiten des Polygons einen Halbkreis berühren müssen, dessen Mittelpunkt in der Oberfläche des Wassers liegt, hat *Steiner* vollständig in *Crelles Journal Bd. XXIV* bewiesen; da es jedoch schwer ist, diesen Beweis zu verstehen, ohne die vorausgehenden 31 Seiten durchzustudiren, da ferner diese Sätze nur sehr wenig bekannt zu sein scheinen, so wollen wir es versuchen, in Folgendem den Satz direct zu beweisen.

Es sei $A_1 B_1 B_1 A_1$ ein beliebiges Profil mit drei Seiten und der Wasseroberfläche, dessen Seiten parallel mit den gegebenen Richtungen laufen; forschen wir nach, ob nicht mit den gleichen Seitenrichtungen und demselben Umfang ein anderes Profil construirt werden könnte, dessen Querschnittsfläche grösser wäre. Wir schlagen die Seiten $A_1 B_1$ nach CB_1 herunter so, dass CC gleich dem benetzten Umfang ist. Wir führen durch B_1 die Parallelen $B_1 D_1$ zu CA_1, verbinden C mit D_1. Dann ist nach Grundsätzen der Flächenverwandlung der Inhalt des 4Seits $A_1 B_1 B_1 A_1$ gleich dem des 4Seits $CD_1 D_1 C$, mithin um $OD_1 D_1$ kleiner als das Dreieck COC. Wir führen jetzt die Horizontale AA durch die Spitze O des Dreiecks COC, ziehen AB in der gegebenen Richtung, dann ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C$ auch $AB = CB$ und der benetzte Umfang des Vier-

ecks $ABBA = CC =$ dem des Vierecks $A_1 B_1 B_1 A_1$. Verwandelt man dieses Vierseit wie oben, indem man Parallelen zu CA durch B zieht, so gehen diese Parallelen durch den Punkt O. Denn wegen des Parallelismus aller Seiten sind die Dreiecke $A_1 D_1 B_1$ und AOB ähnlich, mithin auch die ganzen Vierecke $A_1 CB_1 D_1 \sim ACBO$. Da die Vierseite aber zudem noch perspectivisch liegen, so liegen auch die Punkte $CD_1 O$ in einer geraden Linie. Das Resultat der Verwandlung ist also Vierseit $ABBA$ gleich Dreieck COC. Das Vierseit, dessen horizontale Seite durch O geht, ist also um das Dreieck $OD_1 D_1$ grösser, als wie das Vierseit $A_1 B_1 B_1 A_1$.

Fig. 65.



Man vergleiche weiter $ABBA$ mit einem Vierseit $A_2 B_2 B_2 A_2$, dessen Horizontale über O liegt. Die Parallelen $A_2 B_2$ und $B_2 D_2$ führen zu einem Punkt D_2, der wieder in der Geraden CO liegt, und das Resultat der Verwandlung ist das verschlungene Viereck $CD_2 D_2 C$. Der Inhalt desselben ist gleich $COC - D_2 O D_2$, mithin ist es um $D_2 O D_2$ kleiner als wie $ABBA$.

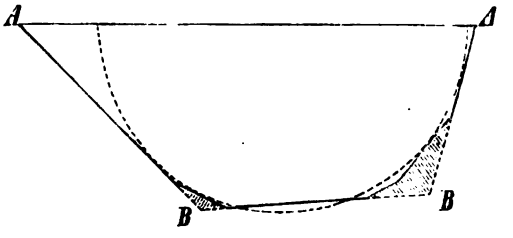
Dieses unterscheidet sich von den beiden übrigen 4 Seiten dadurch, dass es einem Halbkreis umschrieben ist, denn die vier Winkel α sind gleich gross, weil die zwei Winkel bei B correspondirende und Wechselwinkel der gleichen Winkel des gleichschenkeligen Dreiecks ABC sind. Alle Punkte der Linien BO sind demnach gleich weit von den in B sich schneidenden Seiten, O also gleich weit von den B Seiten $ABBA$ entfernt.

Sind die beiden Wasseroberflächen $A_1 A_1$ und $A_2 A_2$ gleich weit von O entfernt, so haben die beiden Vierseite $A_1 B_1 B_1 A_1$ und $A_2 B_2 B_2 A_2$ gleichen Flächeninhalt, denn beide weichen um die

gleich grossen Dreiecke $D_1 O D_1$ und $D_2 O D_2$ von $ABBA$ ab. Das jetzt von dem, dem Halbkreis umschriebenen Vierseit Bewiesene, lässt sich unmittelbar auf das dem vollen Kreis mit bestimmten Richtungen umschriebenen Vierseit ausdehnen; denn theilt man das Vierseit durch eine Linie, welche den Winkel zweier gegenüberliegenden Seiten halbirt, in zwei Vierseite, so kann laut des oben Bewiesenen, keines der beiden Vierseite mehr vergrössert werden, wenn die vier Seiten einen Kreis umschreiben, dessen Mittelpunkt in der obigen Theilungslinie liegt. Ist dieses aber nicht der Fall, so können beide vergrössert werden durch eine kleine Verlängerung oder Verkürzung des Segmentes der Trennungslinie der beiden Profile zwischen den zwei gegenüberliegenden Seiten in der Art, dass man die jedem Profil entsprechenden Punkte O der Fig. 65 der Trennungslinie mehr nähert.

Alles oben von Vierseiten, die dem Halbkreis oder dem vollen Kreis umschrieben sind Bewiesene, lässt sich ohne Weiteres auf Vielseite von beliebiger Seitenzahl ausdehnen. Ist BB (Fig. 66) die Seite eines Vielseits, welches den Kreis, dessen Mittelpunkt in der Wasseroberfläche liegt und der die zwei äussersten Seiten berührt, nicht berührt: so kann das Vierseit $ABBA$, gebildet aus BB der Wasser - Oberfläche und den bis zu diesen Seiten verlängerten den Kreis berührenden Seiten, laut oben Bewiesenem mit Beibehaltung des Perimeters und der Seitenrichtungen so verwandelt werden, dass der Flächeninhalt grösser wird. Schneidet man dann von den Ecken B des verwandelten Vierseits die schraffirten Eckfiguren ab, so erhält man ein neues Vielseit, dessen Umfang gerade so gross, als wie der des ursprünglichen ist, dessen Flächeninhalt aber sich diesem gegenüber um die Differenz der beiden Vierseite vergrössert hat. Eine solche Vergrösserung ist nicht möglich, wenn alle Seiten einem Halbkreis oder Kreis umschrieben sind. Also:

Fig. 66.

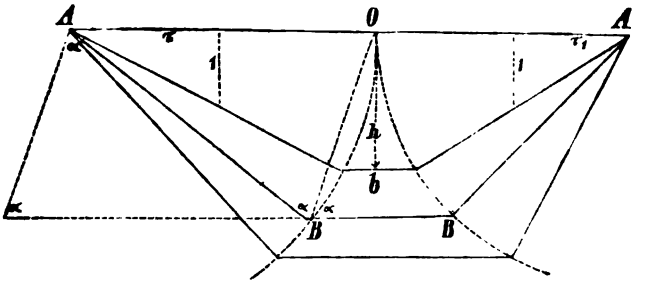


Das Verhältniss der Querschnittsfläche $\left(\frac{F}{p}\right)$ zum benetzten Umfang ist in den Vielseiten, die mit Seiten gegebener Richtung gebildet werden, ein Maximum, wenn sie einem Kreis umschrieben sind.

Wird, wie es bei Canalprofilen der Fall ist, die Wasseroberfläche nicht mit zum benetzten Umfang gezählt, so müssen die übrigen Seiten dem Halbkreis umschrieben sein, dessen Mittelpunkt in der Wasseroberfläche liegt, damit $\frac{F}{p}$ ein Maximum sei.

Besteht ein Canalprofil nur aus einer horizontalen, mit der Wasseroberfläche parallel laufenden Sohle (Fig. 67) und zwei

Fig. 67.



beiderseitigen Böschungen, so ist bei dem Maximum von $\frac{F}{p}$ die Summe der Böschungslängen gleich der Länge der Wasserseite. Denn der Winkel AOB ist wegen des Parallelismus der Seiten AA und BB gleich dem Winkel α, also ist das Dreieck BAO gleichschenkelig und AB gleich AO, woraus der Satz folgt:

Ueberhaupt ist $\frac{F}{p}$ ein Maximum für alle Vierseite, in welchen zwei gegenüberliegende Seiten die Radien zweier sich berührenden Kreise sind, deren Endpunkte auf Horizontalen liegen, und deren eine die Sohle, die andere die Wasseroberfläche ist.

Bezeichnen τ τ_1 die cotg. der Böschungswinkel (die Böschungszahlen), h die Tiefe, b die Sohlenbreite, so ist die obere Breite der Wasserfläche gleich:

$$h\left(\sqrt{1+\tau^2}+\sqrt{1+\tau_1^2}\right)=b+h\,(\tau+\tau_1)\,,$$

woraus

$$\frac{b}{h}=\sqrt{+\tau^2}-\tau+\sqrt{1+\tau_1^2}-\tau_1\,,$$

$$\frac{2F}{h^2}=\frac{p}{h}=2\left(\sqrt{1+\tau^2}+\sqrt{1+\tau_1^2}\right)-(\tau+\tau_1)=\theta$$

und

$$\frac{F}{p}={}^1/_2 h,$$

folgt. Da h auch gleich dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises ist, so sieht man, was sich übrigens auch von selbst versteht, dass der Profilradius gleich der Hälfte dieses Halbmessers ist.

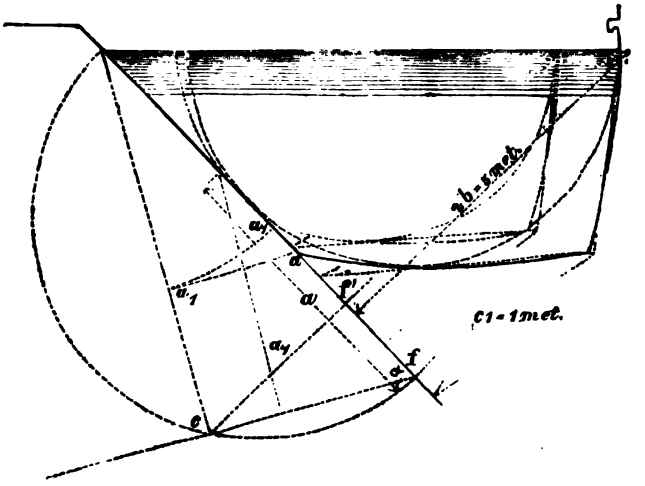
In der Praxis werden in der Regel die Querschnittsfläche und die Böschungen angenommen; aus diesen letzteren kann man dann θ rechnen, und erhält dann unmittelbar:

$$h=\frac{2F}{p}=\sqrt{\frac{2F}{\theta}}\,,$$

wodurch die Querschnittsfläche und der Profilradius, die bei gewöhnlichem Verfahren allein in die Formeln eintreten, gegeben sind.

Die Construction Fig. 68 wird wohl immer einfacher und praktischer, als wie die Rechnung sein. Es sei ein Profil von 15 □Met. Querschnittsfläche zu construiren, das einem gegebenen einem Halbkreis umschriebenen Profil ähnlich sei. Wir construiren auf Gerathewohl das punktirte den gegebenen Bedingungen entsprechende Profil, reduciren es auf die Basis $2b = 5m$, so dass das Endresultat f' auf eine der geradlinigen Begrenzungsseiten des Profils fällt. Der Inhalt des Profils soll aber gleich $bf = 6$ Met. statt bf' sein. Es müssen also alle Seiten a_1 im Verhältniss von $\sqrt{bf} : \sqrt{bf'} = \sqrt{f} : \sqrt{f'}$ verändert werden. Ueber dem grösseren der f (hier f) beschreiben wir einen Halbkreis, errichten im Endpunkt von f die Ordinaten und verbinden ihren

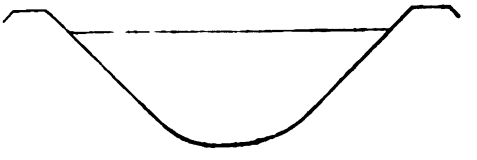
Fig. 68.



Endpunkt durch die Linie c mit dem Anfangspunkt von f' und f''. Wir haben dann $c^2 = f'f''$ oder $\frac{c}{f} = \frac{\sqrt{f''}}{\sqrt{f'}}$. Wird also a_1 im Verhältniss von $\frac{c}{f}$ zu a vergrössert, wie die Figur es andeutet, so ist a die a_1 entsprechende Seite des gesuchten Profils. Die zur Construction dieses Profils nothwendigen Hülfslinien sind eingezeichnet.

In jeder Geometrie wird bewiesen, dass das Verhältniss $\frac{F}{p}$ bei regelmässigen Vielseiten mit der Zahl der Seiten wachse, um bei unendlich vielen Seiten, dem Kreis den Grenzwerth $\frac{1}{2}r$ zu erreichen. Wir dürfen hieraus schliessen, dass bei nicht ähnlichen Profilen dasjenige den grösseren Profilradius habe, das sich dem Halbkreis am meisten nähert; und dass überhaupt der Halbkreis selbst den grössten Profilradius habe. Sollten daher bei Canälen die Böschungen eine gewisse Neigung nicht überschreiten, so wäre Fig. 69 die kreisförmige Sohle mit tangirenden Böschun-

Fig. 69.



gen, wie es z. B. bei Wildbächen mit Erfolg angewendet worden ist, dasjenige, welches den kleinsten Profilradius hat.

26. Die Theorie des Planimeters.

Wird eine Rolle in der Art auf der Mitte eines Stabes befestigt, dass sie sich nur in einer senkrecht auf dem Stab stehenden Ebene drehen kann, so werden die Umdrehungen der Rolle bei einem Fortgleiten des Stabes auf einer Ebene den Weg messen, den die Mitte des Stabes senkrecht zu seiner Richtung zurückgelegt hat. Dieser Weg multiplicirt mit der Länge b des Stabes giebt jederzeit den Inhalt der vom Stab bestrichenen Fläche. Es ist klar für den Fall, wenn der Stab sich selbst parallel bleibt und eine Figur wie Fig. 70 beschreibt. Die Umdrehungen der Rolle messen in diesem Fall die senkrechte Entfernung l zwischen den Endlagen des Stabes, welche, mit der Länge b des Stabes multiplicirt, den Flächeninhalt der Figur giebt. Dasselbe gilt aber auch noch, wenn der Stab nicht parallel bleibt. Es stelle AB und A_1B_1 (Fig. 71) zwei aufeinanderfolgende Lagen des Stabes dar; der Inhalt des Vierecks AA_1B_1B kann dann einfach durch $b\,(p+p_1)$ dargestellt werden, wo p und p_1 die Perpendikel von der Mitte der Verbindungslinie der beiden Stabmitten M und M_1 auf die beiden Seiten AB und A_1B_1 bezeichnen. Das Viereck kann in die Dreiecke $AM_1B + AA_1M_1 + BM_1B_1$ zerlegt werden; die Summe der beiden letzten Dreiecke aber ist gleich dem Dreiecke MA_1B_1, denn da M in der Mitte zwischen A und B liegt, so ist der Inhalt eines jeden der beiden Dreiecke MA_1M_1

Fig. 70.

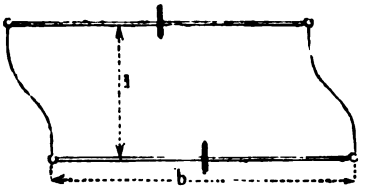
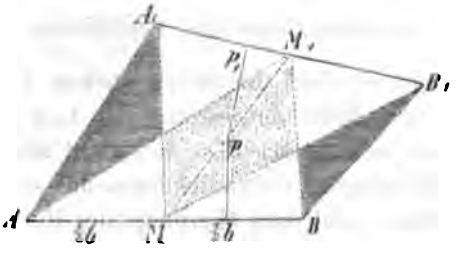


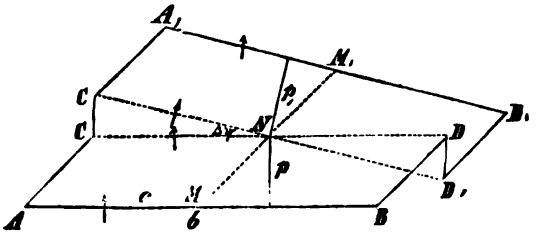
Fig. 71.



und MM_1B_1 gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Inhalte AA_1M_1 und BM_1B_1, demnach auch ihre Summe gleich der Summe jener oder gleich MA_1B_1. Der Inhalt des Vierecks ist also auch gleich $AM_1B + MA_1B_1 = b(p + p_1)$, weil p und p_1 die halben Höhen der Dreiecke sind. Da diese beiden Dreiecke die schraffirte Fläche gar nicht, die punktirte aber doppelt belegen, so folgt auch noch nebenbei, dass die punktirte Fläche der schraffirten gleich sei.

Um den Weg l zu erhalten, den die Rolle zurücklegt, denken wir uns, der Stab bewege sich anfangs und zuletzt immer parallel mit sich selbst, während seine Mitte die Linie MM_1 einhält, und drehe sich nur einmal in der Mitte N, ohne dabei fortzuschreiten. Er wird auf diese Weise die Fläche Fig. 72 beschreiben, deren

Fig. 72.



Inhalt gleich der Summe der beiden Parallelogramme $ACDB$ und $A_1B_1D_1C_1$, d. h. $= b(p + p_1)$, also gleich dem der Figur ist, indem die beiden gleichen Sectoren NCC_1 und NDD_1 nicht zu zählen sind, weil der eine sich addirt und der andere sich subtrahirt. Während der Stab das erste Parallelogramm bestreicht, legt die Rolle den Weg p zurück; während er die beiden Kreissectoren NCC_1 und NDD_1 bestreicht, legt sie den Weg $c\Delta\psi$ zurück, wenn mit c der Abstand der Rolle von der Mitte und mit $\Delta\psi$ der Winkel bezeichnet wird, den die beiden äussersten Stablagen AB und A_1B_1 mit einander bilden; wobei c positiv zu nehmen ist, wenn bei einer positiven Drehung des Stabes auch die Rolle sich positiv dreht; endlich legt sie den Weg p_1 zurück, während das zweite Parallelogramm bestrichen wird.

Der ganze Weg Δl, den die Rolle zurücklegt, ist demnach:

$$\Delta l = p + p_1 + c\Delta\psi,$$

woraus

$$p + p_1 = \Delta l - c\Delta\psi,$$

und der Flächeninhalt des Vierecks

$$\Delta F = b\,(\Delta l - c\Delta\psi)$$

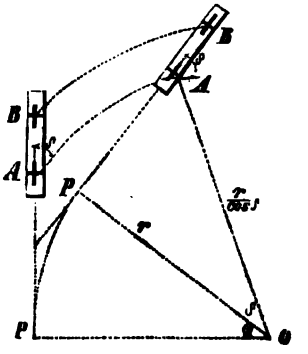
folgt.

Denken wir uns schliesslich die beiden äussersten Stablagen nur unendlich wenig von einander entfernt, so fallen die beiden Flächenelemente Fig. 71 und Fig. 72, deren Inhalte ohnedies nicht differiren, zusammen; summirt man endlich alle Flächenelemente zur ganzen bestrichenen Fläche, so erhält man den Inhalt derselben:

$$F = b\,(l - c\psi).$$

In allen bisher benutzten Figuren war die Rolle so gezeichnet, als ob ihre Axe mit der Richtung des Stabes zusammenfalle. Dies ist jedoch keine nothwendige Bedingung, sondern es genügt, wenn die Rolle fest mit dem Stabe so verbunden ist, dass ihre Axe parallel mit dem Stabe bleiben muss, und sich nicht der Länge nach bewegen kann.

Fig. 73.



Denn zwei Rollen, die durch einen Rahmen, Fig. 73, so miteinander verbunden sind, dass sie sich in einer und derselben Ebene bewegen müssen, legen den gleichen Weg zurück, wie auch der Rahmen im Ganzen bewegt werden möge. Wir beweisen dies zuerst für den Fall, in welchem der Rahmen um einen Punkt O, Fig. 73, so gedreht wird, dass alle seine Punkte Kreisbogen AA, BB, um diesen Mittelpunkt beschreiben. Ist φ der Drehungswinkel, so ist gemäss der durch die Figur angedeuteten Bezeichnung $\frac{r}{\cos\vartheta} \cdot \varphi$ die Strecke, über die sie sich wegbewegt, der Weg, den sie dabei zurücklegt, ist gleich $\frac{r}{\cos\vartheta} \cdot \varphi \cdot \cos\vartheta = r\varphi$, weil ϑ der Winkel ist, den ihre Ebene beständig mit dem Wege bildet. $r\varphi$ ist aber auch der Weg, den eine Rolle am Fuss P des Perpendikels OP zurücklegen würde. Der Weg, den die Rolle zurücklegt, ist demnach von ihrer Lage im Rahmen unabhängig.

Da es nun möglich ist, den Rahmen AB durch Drehung um einen Punkt O in jede beliebige andere Lage zu bringen, — man erhält die Fusspunkte P der Perpendikel, in deren Schnitt O liegt, einfach dadurch, dass man $CP = CP$ gleich der halben Differenz der beiden Strecken CA macht, — da man ferner jede unendlich kurze Wegstrecke als einen Kreisbogen obiger Art beschrieben um einen Drehungsmittelpunkt O betrachten kann, so folgt, dass der Weg der Rolle überhaupt von ihrer Lage im Rahmen unabhängig sei, also alle Rollen im Rahmen den gleichen Weg zurücklegen.

Wird der Rahmen parallel mit sich selbst verschoben, so liegt der Punkt O im unendlich Fernen. Wird er um einen Punkt der eigenen Mittellinie gedreht, so ist der Weg der Rollen $= 0$, wie sich das von selbst versteht.

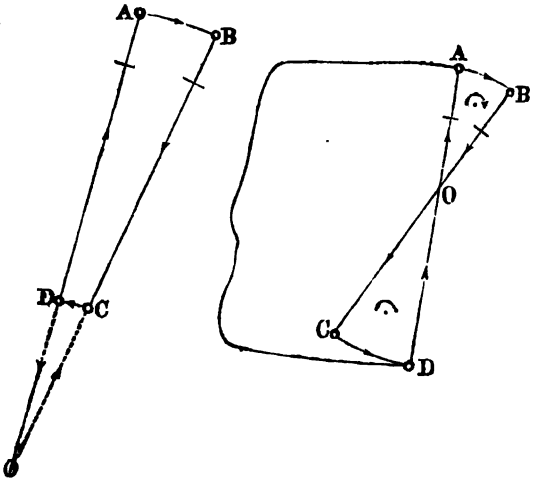
Die Rolle kann sich in verschiedenem Sinne drehen, und wenn Flächen rückläufig bestrichen werden, so wird sie sich auch rückwärts drehen. Der Stab kann auch öfters eine Fläche bestreichen, geschieht es jedesmal in demselben Sinne, so wird die Rolle sich auch jedesmal in demselben Sinne drehen, und $b(l - c\psi)$ wird die öfters bestrichene Fläche so oft enthalten, als sie bestrichen wurde. Würde endlich die Fläche zweimal, aber in entgegengesetztem Sinn bestrichen, so würde ihr Einfluss auf den von der Rolle zurückgelegten Weg $= 0$ sein.

Wichtig ist es nun in jedem einzelnen Fall zu wissen, in welchem Sinne bei dem Bestreichen einer Fläche die Rolle sich drehe. Da der Stab selbst keine Spuren auf der Fläche zurücklässt, so muss der Sinn, in welchem der Umfang einer Figur von den Enden des Stabes beschrieben wurde, genügen, diesen Sinn zu bestimmen; und in der That gelten alle in der Geometrie über den Zusammenhang des Zeichens des Inhaltes einer Figur mit dem Sinn, in welchem sie umfahren wurde, aufgestellten Sätze, auch von den Enden des Stabes, wenn man dem einen Ende den entgegengesetzten Sinn des andern beilegt, d. h. wird die Richtung, in welcher das eine Ende des Stabes sich bewegt, durch einen Pfeil bezeichnet, so muss am andern Ende die Richtung, von der es herkam, durch den Pfeil bezeichnet werden.

Man kann nämlich ein Flächenelement $ABCD$ (Fig. 74, siehe Seite 124) als die Differenz der beiden Dreiecke OAB und ODC betrachten, die die Leitstrahlen des einen Stiftes OA, und des

andern Stiftes *OC*, vom Durchschnittspunkt *O* der beiden auf einanderfolgenden Stablagen aus beschreiben. Soll das Zeichen der Fläche durch den Sinn angedeutet werden, in welchem *AB* und *DC*

Fig. 74. Fig. 75.



beschrieben werden, so müssen die beiden Wege *AB* und *DC* entgegengesetzte Zeichen erhalten. Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn der Drehungspunkt *O* auf dem Stab selbst, wie in Fig. 75 liegt; die Totalfläche hat sich in dieser Figur um *OAB* vergrössert, um *OCD* verkleinert, *ODC* ist demnach wieder wie in Figur 74 negativ.

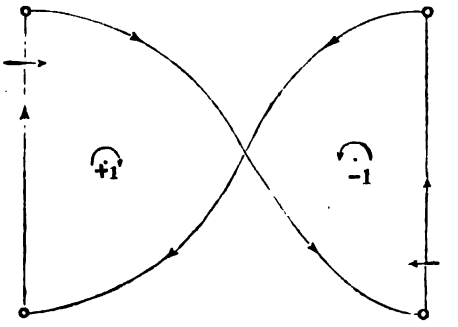
Setzt man also auf den Weg des einen Stiftes einen Pfeil in die Richtung des Fortschritts, auf den des andern in die Richtung des Rückschrittes, und denkt man sich diese Richtungen durch die Stäbe fortgesetzt, so werden die positiven Elemente *ABCD* (Fig. 74) und *OAB* (Fig. 75), in einem Sinne, und die negativen Elemente, wie *ODC* (Fig. 75) im andern Sinn umfahren erscheinen. Berücksichtigt man nun, dass durch ein Anreihen eines Elementes an das andere obiges Verhältniss nicht geändert wird, so kann man sagen, dass wie die Elemente, so auch die Totalflächen in gleichem oder entgegengesetztem Sinn vom Stab bestrichen wurden, je nachdem sie von den auf ihren Umfang gesetzten Pfeilen in gleichem oder entgegengesetztem Sinn umfahren erscheinen.

Hiermit wäre die volle Uebereinstimmung, mit dem in der

Geometrie bezüglich des Zeichens der in verschiedenem Sinn umfahrenen Flächen Gesagten, dargethan.

Die folgenden Beispiele mögen die Anwendung des Obigen zeigen. Die beiden Hälften der Fig. 76 sind von den Pfeilen in

Fig. 76.



entgegengesetztem Sinn umfahren, und auch in entgegengesetztem Sinn bestrichen, wie die Pfeile auf den Rollen es andeuten.

Ebenso klar ist es auch, dass in Figur 77 die Flächen — 1 und + 1 in entgegengesetztem Sinn bestrichen wurden, und dass die Flächen *o* es einmal in einem und einmal im entgegengesetzten Sinn wurden, so dass diese Flächen keinen Einfluss auf den Weg der Rolle ausüben können.

In Fig. 77 und 78 ist der Weg der Rolle der Differenz der mit + 1 und — 1 bezeichneten Flächen proportional.

Da die Wege der beiden Stifte in Verbindung mit den äussersten Lagen des Stabes immer eine geschlossene Figur bilden, so

Fig. 77.

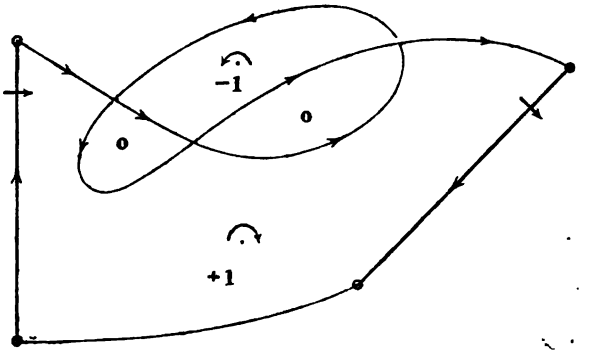
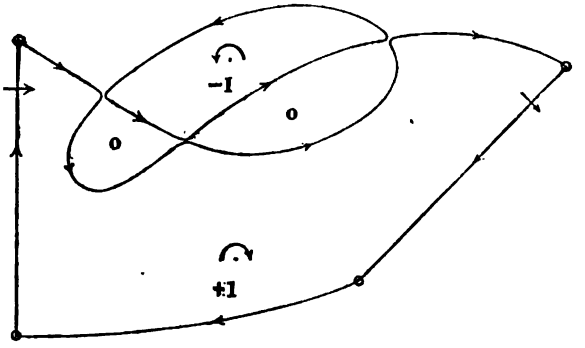


Fig. 78.



kann man bei Verschlingungen jederzeit die ganze Figur in mehrere geschlossene, unverschlungene Figuren zerlegt denken, wie Fig. 78, wo die Ecken dieser einzelnen Figuren, von Fig. 77, abgerundet wurden, zeigt. Wurde bei einer Verschlingung eine Fläche, wie in Fig. 79, mehrere Mal bestrichen und rundet man dann die Ecken ebenfalls ab, wie in Fig. 80, so wird jede öfters

Fig. 79.

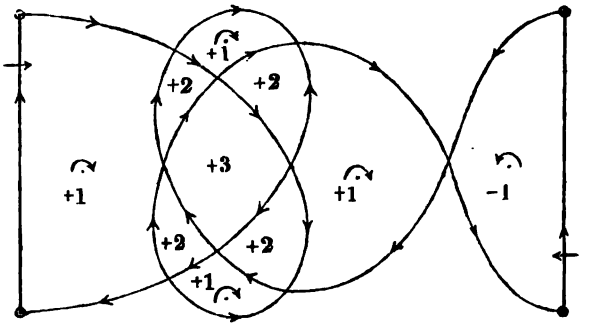
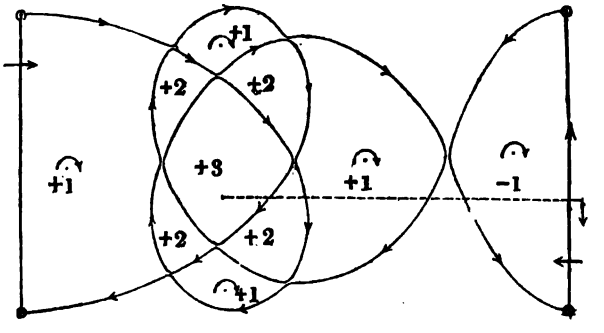


Fig. 80.



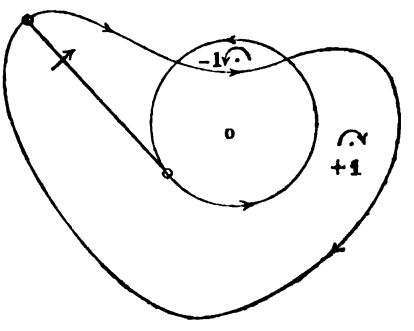
bestrichene Fläche ganz in der einmal weniger bestrichenen liegen, und die im entgegengesetzten Sinne bestrichenen werden ganz abgesonderte Gruppen bilden. Natürlich wird in einer solchen Figur der Weg der Rolle dem Flächeninhalt von $1.(+1) + 2.(+2) + 3.(+3) - 1.(-1)$ entsprechen, wo $(\pm n)$ nur zur Bezeichnung der Fläche dient.

Aus Obigem geht auch hervor, dass man unmittelbar sehen kann, wie oft eine Fläche bestrichen wurde, wenn man auf einer von ihr nach aussen gezogenen Linie die durchschnittenen Umfänge mit Berücksichtigung ihres Sinnes zählt. Z. B. die von $+3$ nach aussen gezogene Linie wird von 1 nach oben und 4 nach unten gerichteten Linien geschnitten, mithin wird sie $+3$ mal im Sinn umfahren, der am Ende der punktirten Linie angedeutet ist.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass wenn öfters eine und dieselbe Linie befahren wird, dieselbe auch ebenso oft gezählt werden muss, und dass sie als eine Fläche $= o$ einschliessend ausfallen kann, wenn sie gleich oft hin und her befahren wird.

Kommt der Stab wieder genau in seine ursprüngliche Lage zurück, so haben seine beiden Enden jedes für sich eine geschlossene Figur beschrieben, und es ist nun ganz einerlei, ob die beiden Figuren zu einer einzigen miteinander combinirt werden, oder ob man jede für sich allein behandelt. Es ist also einerlei, ob man sagt, der Weg der Rolle entspricht in Fig. 81 der Differenz der Flächen $(+1)$ und (-1) oder der Differenz des Flächeninhaltes des Herzens und des Kreises.

Fig. 81.

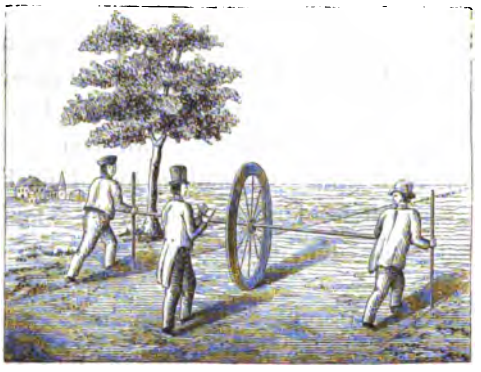


27. Flächenmessung mittelst des Planimeters.

In der einfachen bis jetzt betrachteten Form ist das Planimeter nicht angewendet worden, doch können wir uns wohl denken, dass ein solches Instrument gute Dienste leisten würde,

sobald es in so grossen Dimensionen ausgeführt werden müsste, dass es von einer einzigen Person nicht mehr regiert werden könnte. Wäre z. B. (Fig. 82) auf der Mitte einer Stange, etwas länger als die grösste Breite eines zu messenden Feldes, eine Art Wagenrad befestigt, so wären zwei Arbeiter im Stande den Apparat so schnell, die Enden der Stange immer über den Grenzen haltend, über ein Feld wegzurollen, dass der Geometer kaum folgen könnte; und nichts weiter zu thun hätte, als hintendrein zu spazieren, und am Ende des Feldes dessen Flächeninhalt am Zählapparat des Rades abzulesen.

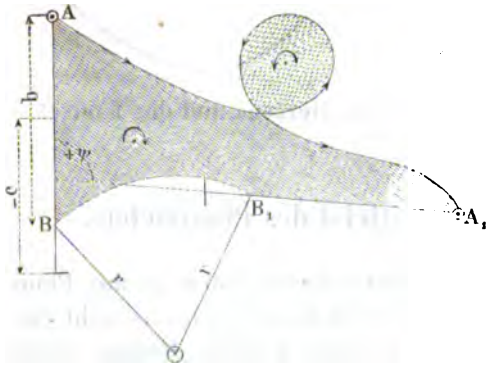
Fig. 82.



Sobald jedoch das Planimeter in Reisszeugdimensionen ausgeführt werden soll, und als Hülfsinstrument einer einzigen Person dienen soll, ist es nothwendig, die Aufmerksamkeit des Zeichnenden auf einen einzigen am Endpunkt des Stabes angebrachten Stift zu beschränken, und das andere Ende Figuren bekannten Flächeninhaltes zu beschreiben zwingen.

Das praktischste aller derartigen Instrumente ist wohl das Amsler'sche Planimeter. Es liegt nicht im Zweck dieser Abhandlung, die mechanische Einrichtung dieses Instrumentes zu beschreiben, wir verweisen deshalb auf die vielen Aufsätze, die in verschiedenen Zeitschriften erschienen sind, und beschränken uns auf die Aussage des Prinzips. Der Stab $AB = b$ (Fig. 83) hat nur an einem

Fig. 83.

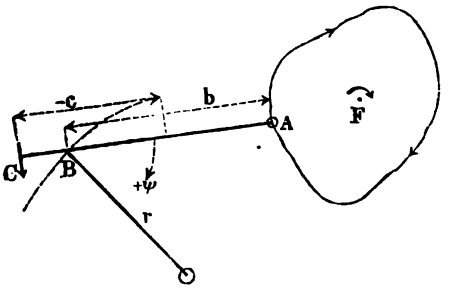


Ende A einen Fahrstift, das andere Ende B ist scharnierartig an eine andere Stange OB befestigt, die bei O durch einen Stift festgehalten werden kann. Beschreibt man nun mit dem Fahrstift dieses Instrumentes eine beliebige Curve AA_1 (Fig. 83), so wird man nach 26 (S. 122) die Flächendifferenz zwischen (+ 1) und (— 1) gleich

$$F = b\,(l + c\psi)$$

erhalten, weil c negativ ist. Da es nun selten Figuren giebt, die gerade von einem Kreis des Halbmessers r zwischen 2 Linien von der Länge des Stabes $AB = b$ begrenzt sind, so ist es Regel, die zu messenden Flächen F (Fig. 84) ganz zu umfahren; kommen dann beide Enden wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück, so haben sie geschlossene Figuren beschrieben, von denen die des einen Endes $B = 0$ ist, weil sie mit dem Kreisbogen des Radius r zusammenfällt. Ebenso ist der vom Stab AB beschriebene Winkel $\psi = 0$, und man hat einfach den Flächeninhalt der von A umfahrenen Figur $F = bl$.

Fig. 84.



In dieser Form ist also das Planimeter ein Instrument, das auf die constante Basis b reducirt.

Liegt O im Innern der Figur, so wird während des Umfahrens derselben der Endpunkt B mit dem Halbmesser r einen Kreisbogen beschreiben, der zur Fig. F z. B. die in Fig. 81 S. 127 angedeutete Lage hat. Setzt man die Pfeile ein wie dort, und bezeichnet man die ganze vom Stift B beschriebene Fläche mit F, so erhält man,

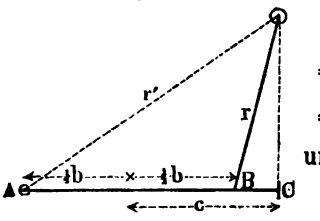
$$\text{weil } \psi = 2\pi \text{ ist,}$$

als Ausdruck der vom Stab bestrichenen Fläche:

$$F - r^2\pi = b\,(l + 2c\pi),$$

woraus $F = bl + (r^2 + 2bc)\pi$ folgt. $r^2 + 2rbc$ ist aber gleich r_1^2 wo r_1 die Länge des Leitstrahls OA (Fig. 85, s. S. 130) bezeichnet, wenn die Ebene der Rolle C durch den Pol O geht, denn man hat dann

Fig. 85.



$$r_1^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2$$
$$= (c + {}^1/_2 b)^2 + \left[r^2 - (c - {}^1/_2 b)^2\right]$$
$$= r^2 + 2bc$$

und es wird einfach

$$F = bl + r_1^2 \pi.$$

Wird mit dem Radius r_1 ein Kreis beschrieben, so dreht sich offenbar die Rolle nicht, man hat $l = o$ und dann $F = r_1^2 \pi$, wie es sein soll.

Viertes Kapitel.

Verwandlung der Körper.

28. Darstellung der Cubikinhalte durch Linien.

Ganz analog dem, was bei Verwandlung der Flächen gesagt wurde, verstehen wir hier unter Verwandlung der Körper die Bestimmung der Höhe eines Prisma's, dessen Grundfläche gegeben ist und dessen Cubikinhalt dem des vorliegenden Körpers gleich sein soll.

Indem man sich nun den Cubikinhalt eines jeden Körpers als das Product einer Fläche F mit einer Länge oder Höhe k denkt, verwandelt man zuerst nach den Regeln des vorigen Kapitels die Fläche auf eine Basis b, so dass $bl = F$ ist, und dann, weil der Cubikinhalt $\mathfrak{J} = Fh = blk$ ist, das Product lk, das nun ebenfalls als eine Fläche betrachtet werden kann, auf eine zweite Basis a, so dass $ah = lk$ ist, und erhält

$$\mathfrak{J} = Fk = abh.$$

betrachtet man hier ab als Flächeneinheit, so ist h das Maass des Körpers.

Es ist demnach diese Verwandlung nichts anderes als eine wiederholte Flächenverwandlung, und da diese aus dem vorigen

Abschnitt bekannt ist, so haben wir uns hier nicht mit den Verwandlungen selbst, sondern nur mehr mit der Wahl der zu verwandelnden Dimensionen, und den Modificationen derselben bei unregelmässig begrenzten Körpern zu beschäftigen, wobei wir die Verwandlung der einfachen geometrischen Körper als Parallelepipeden, Prismen, Pyramiden etc. übergehen.

Bei weitem die meisten unregelmässigen Körper, deren Cubikinhalt zu bestimmen ist, sind durch eine Reihe paralleler Querschnitte gegeben, die in mehr oder weniger grossen Abständen aufeinander folgen. Unter diesen Körpern sind die der Strassen und Eisenbahndämme ihres häufigen Vorkommens wegen die wichtigsten, und wir werden uns daher hier vorerst mit diesen beschäftigen.

29. Inhalt regelmässiger Auf- und Abtragskörper.

Die Auf- und Abtragskörper geradlinigter Bahnkörper (Taf. 5_1) sind durch auf einander folgende Querprofile

$$F = (ABCE) \text{ und } F_1 = (A_1B_1C_1E_1)$$

gegeben, deren Entfernungen $l = AA_1 = EE_1$ so klein angenommen werden sollen, dass die Begrenzungslinien BB_1 und CC_1 noch als gerade Linien betrachtet werden können; nimmt man dann auch noch die Begrenzungslinien der Endprofile BC und B_1C_1 und eines jeden Zwischenprofils $B_n C_n$ geradlinig an, so ist die Begrenzungsfläche des Geländes ein Paraboloid, dessen Leitlinien BB_1 und CC_1 sind und dessen Erzeugungslinien immer in einem der sich parallel bleibenden Querprofile liegen. Diese Paraboloidfläche hälftet das Tetraeder $BC\,B_1C_1$, denn jedes zwischenliegende Querprofil bei $B_n C_n$ z. B. schneidet das Tetraeder in einem Parallelogramm (siehe die Fig. Taf. 5_1) das von der Erzeugungslinie $B_n C_n$ als Diagonale gehälftet wird. Es werden also von der Paraboloidfläche alle Elemente des Tetraeders, mithin auch das Tetraeder selbst gehälftet. Die Summe der Inhalte der beiden unter den zwei Tetraederflächen BCC_1 und BB_1C_1 liegenden Prismen, ist daher um ebensoviel unter, als die der beiden Prismen unter CB_1C_1 und CB_1B, über dem wahren Inhalt des Körpers ist.

Dieser ist also gleich dem arithmetischen Mittel dieser beiden Summen weniger dem der abgestutzten Pyramide unter den Böschungen oder

$$\mathfrak{J} = {}^1/_2 \left\{ \begin{matrix} A\,D\,A_1 \\ B\,C\,B_1 \end{matrix} + \begin{matrix} A\,D\,D_1 \\ B\,C\,C_1 \end{matrix} + \begin{matrix} A_1\,D_1\,A \\ B_1\,C_1\,B \end{matrix} + \begin{matrix} A_1\,D_1\,D \\ B_1\,C_1\,C \end{matrix} \right\} - \begin{matrix} C\,D\,E \\ C_1\,D_1\,E_1 \end{matrix}$$

wobei der Inhalt des Bahngrabens, der ein Prisma ist, vorerst vernachlässigt wurde. Bezeichnet man nun noch die Breite des Erdkörpers in der Bahnplanie mit $b = AE = A_1E_1$ und den verticalen Abstand zwischen dem Gelände und der Bahnplanie in der Mittellinie mit h und h_1, an den Böschungen mit h' und h'_1, endlich die Tangente des Böschungswinkels mit τ wie alles in der Fig. angedeutet ist, so wird

$$ED = \frac{h'}{\tau};\ E_1D_1 = \frac{h'_1}{\tau};\ AD = b + \frac{h'}{\tau} \text{ und } A_1D_1 = b + \frac{h'_1}{\tau}$$

und man erhält den Inhalt

$$\mathfrak{J} = {}^1/_2 \left\{ \begin{matrix} {}^1/_2\,l\,(b + \frac{h'}{\tau}) \left[{}^1/_3\,(h + h' + h_1) + {}^1/_3\,(h + h' + h'_1) \right] + \\ {}^1/_2\,l\,(b + \frac{h'_1}{\tau}) \left[{}^1/_3\,(h_1 + h'_1 + h) + {}^1/_3\,(h_1 + h'_1 + h') \right] \end{matrix} \right\} - {}^1/_6\,l \left(\frac{h'^2}{\tau} + \frac{h'^2_1}{\tau} + \frac{h'h'_1}{\tau} \right),$$

der sich wie folgt reducirt

$$\mathfrak{J} = {}^1/_4\,l\,b\,(h + h' + h_1 + h'_1) + {}^1/_4\,\frac{l}{\tau}(hh' + h_1h'_1) - {}^1/_{12}\,l\,(h - h_1)\,\frac{(h' - h'_1)}{\tau}.$$

Nun ist aber der Inhalt des Querprofils laut Nr. 20 S. 102

$$F = {}^1/_2\,b\,(h + h') + \frac{hh'}{2\tau}$$

und ebenso

$$F_1 = {}^1/_2\,b\,(h_1 + h'_1) + \frac{h_1h'_1}{2\tau}$$

woraus durch Substitution:

$$\mathfrak{J} = l \cdot \frac{F + F_1}{2} - {}^1/_{12}\, l\,(h - h_1)\,\frac{h' - h'_1}{\tau}$$

folgt.

Diese Formel kann auch auf die folgende Weise analytisch abgeleitet werden. Unter der Voraussetzung, dass die h sich proportional der Entfernung x vom ersten Profil ändern, hat man für alle Höhen:

$$y = h + (h_1 - h)\,\frac{x}{l},$$

$$y' = h' + (h'_1 - h')\,\frac{x}{l}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck der Fläche, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F_{(x)} = a + bx + cx^2.$$

Es ist demnach die Anfangsfläche $F = a$ und die Endfläche

$$F_1 = F + bl + cl^2.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{J} = \int_0^l F_{(x)}\,dx = F_0 l + {}^1/_2 b l^2 + {}^1/_3 c l^3.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen auch noch b, so erhält man

$$\mathfrak{J} = {}^1/_2 l(a + F_1) - {}^1/_6 c l^3.$$

Nun ist aber $a = F$ und $c = \frac{(h_1 - h)\,(h'_1 - h')}{2\tau \cdot l^2}$, also

$$\mathfrak{J} = {}^1/_2 l\,(F + F_1) - {}^1/_{12}\, l\,(h_1 - h)\,\frac{(h'_1 - h')}{\tau}.$$

$$\frac{F + F_1}{2}$$

ist die mittlere Fläche der beiden Endprofile, welche noch die Querschnitte aller prismatischen Abtragskörper als Graben-Fahrbahnkasten etc. enthalten dürfen. Es ist also nicht ganz richtig, wenn bei Berechnung solcher Erdkörper einfach die Länge mit der mittleren Fläche multiplicirt wird, sondern es muss diese noch vorher um die Fläche des Inhaltes

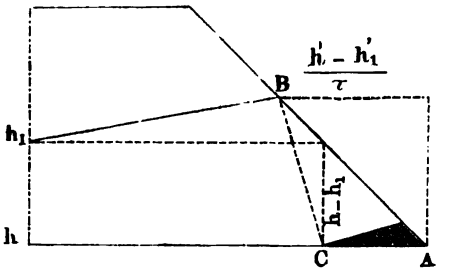
$${}^1/_{12}\,(h - h_1)\,\frac{h' - h'_1}{\tau}$$

vermindert werden. Da

$$\frac{h'}{\tau} \text{ und } \frac{h'_1}{\tau}$$

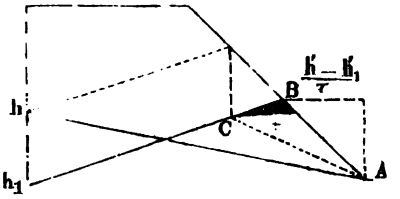
die Projectionen ED und $E_1 D_1$ (Taf. 5_1) der Böschungen sind, so

Fig. 86.



ist diese Fläche (siehe Fig. 86) gleich dem $^1/_6$ des Inhaltes des Dreiecks *ABC*, dessen Eckpunkt *C* vermöge der in der Figur ausgeführten Construction um $h - h_1$ vertical unter der Böschung liegt, und das die Böschungsdifferenz *AB* zur Basis hat, oder gleich dem schraffirten Dreieck, das $^1/_6$ *AB* zur Basis hat. Kreuzt sich das Gelände innerhalb des Profils (Fig. 87), so sind $h - h_1$ und $h' - h'_1$ entgegengesetzten Zeichens und der genau ebenso construirte Fehler ist zur mittlern Fläche zu addiren.

Fig. 87.



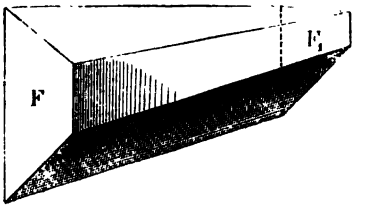
Mittelst dieser einfachen Construction kann also in jedem speciellen Fall leicht untersucht werden, ob es hinlänglich genau ist, den Inhalt des Erdkörpers durch Multiplication der Länge mit der mittleren Fläche zu bestimmen, und wenn dies nicht der Fall ist, so kann die Correction mittelst derselben ausgeführt werden, indem man bei Verwandlung des einen Querprofils das doppelte Fehlerdreieck gleich mit verwandelt.

Wird die Böschung vertical, so ist natürlich ihre Projection

$$\frac{h'_1 - h'}{\tau} = 0$$

und mithin auch ihr Fehler = 0.

Fig. 88.

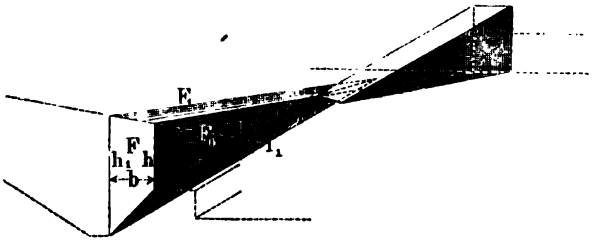


Der Inhalt von zwischen zwei parallelen verticalen Flächen eingeschlossenen Körpern (wie Fig. 88) ist also immer genau gleich dem Product der Länge mit der mittlern Fläche.

Bei dem Uebergang von Auftrag in Abtrag kommen häufig

Körper, wie Fig. 89, sogenannte Keile vor. Auf solche Körper sind die oben entwickelten Formeln ganz anwendbar. Die vor-

Fig. 89.



dern und hintern Flächen F_0 und F_1 sind vertical und parallel und ihre Entfernung ist gleich der Dicke b des Keiles.

Vergleicht man nun den Körper Fig. 89 mit dem Abtragsprofil Taf. 5_1, und betrachtet man dort die Breite b als die Entfernung der beiden Endflächen F_0 und F_1, der in Taf. 5_1 die Länge l des Abtrags entspricht, so wird, wenn man von dem Graben abstrahirt, dieser Abtrag in den Körper Fig. 89 übergehen, wenn man in den Formeln $\mathfrak{Z}$ des Inhalts, S. 133, b statt l, und l und l_1 statt $b + \frac{h'}{\tau}$ und $b + \frac{h_1'}{\tau}$ und an allen übrigen Stellen H und H_1 gleich 0 setzt. Der Inhalt wird dann:

$$\mathfrak{Z} = {}^1/_{12}\, b\, (2\,h\,l + 2\,h_1\,l_1 + h\,l_1 + h_1\,l).$$

Bei Massenberechnungen hat man nie die Flächen F_0 und F_1, sondern immer nur die im Querprofil enthaltene Fläche F vor sich, und es ist üblich, um $\mathfrak{Z}$ zu erhalten, dieselbe mit der halben mittleren Länge ${}^1/_2\, \frac{l + l_1}{2}$ des Keiles zu multipliciren, d. h. statt $\mathfrak{Z}$ zu setzen:

$$F.\frac{l + l_1}{4} = {}^1/_8\, b\,(h + h_1)\,(l + l_1) = {}^1/_8\, b\,(h\,l + h_1 l_1 + h\,l_1 + h_1 l)$$

Der Fehler, den man auf diese Weise begeht, ergiebt sich aus:

$$\mathfrak{Z} = F\,.\,\frac{l + l_1}{4} + {}^1/_{24}\, b\,(h_1 - h)\,(l_1 - l).$$

Um das letzte Glied berücksichtigen zu können, betrachte man es als Correction, die an F vorzunehmen ist, nehme

$$\frac{l_1 + l}{4}$$

als Faktor heraus, und bringe den Inhalt in folgende Form

$$\mathfrak{J} = \frac{l_1 + l}{4}\left[F + {}^1/_2\, b\,(h_1 - h)\,.\,\frac{{}^1/_3\,(l_1 - l)}{l_1 + l}\right]$$

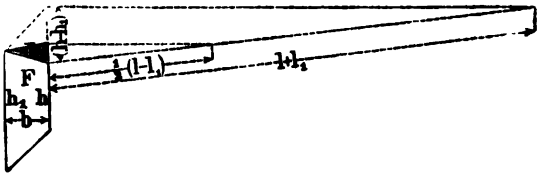
Man erhält daher den wahren Inhalt, wenn man F um ein Dreieck vergrössert, dessen Basis $= b$ und dessen Höhe gleich

$$(h_1 - h)\,.\,\frac{{}^1/_3\,(l_1 - l)}{l_1 + l}$$

ist und dann mit der halben mittleren Länge des Keiles multiplicirt.

Fig. 90 zeigt die Construction dieses in der Figur schraffirten Dreiecks, sie bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung. ${}^1/_3\,(l_1 - l)$

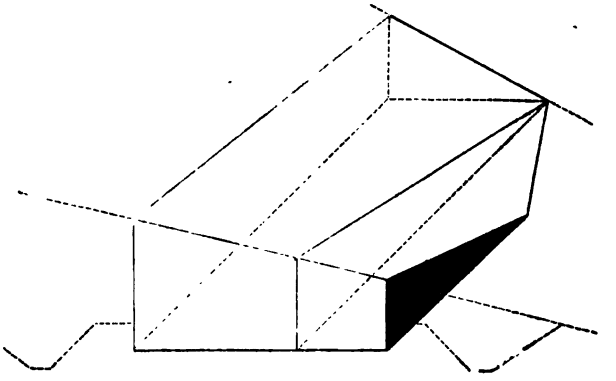
Fig. 90.



und $l_1 + l$ können dabei in beliebigem Maassstab aufgetragen sein. Die Correction wird negativ, wenn die Werthe $h_1 h$ und $l_1 l$ sich kreuzen, d. h. wenn dem kleineren h das grössere l entspricht und umgekehrt.

Körper wie Fig. 91 sind nicht mehr als continuirlich erzeugt zu betrachten und müssen so getheilt werden, wie es die Figur

Fig. 91.

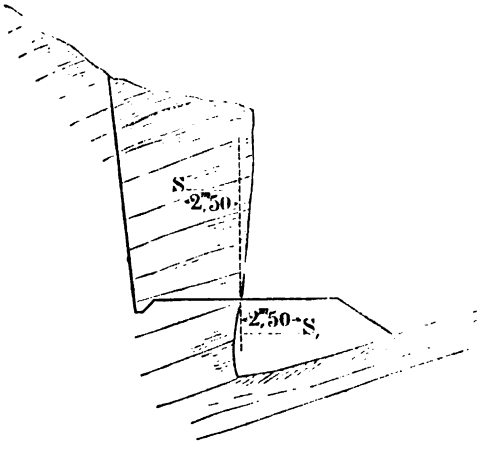


andeutet. Der eine ist wie ein gewöhnlicher Erdkörper aus der mittlern Fläche zu berechnen, und der zweite ist der oben behandelte Keil.

30. Bestimmung des Inhalts unregelmässiger Erdkörper nach Guldins Regel.

Nicht immer ist die Bahn oder der Strassenkörper geradlinig, und namentlich bei letzterem kommen häufig Krümmungen von sehr kleinem Halbmesser vor. Es ist allgemein üblich, in solchen Fällen die Krümmung ganz zu vernachlässigen, und die immer zu der Bahnaxe senkrecht aufgenommenen Querprofile mit den in derselben gemessenen Bogenlängen zu multipliciren. Dieses kann wohl in den meisten Fällen so gestattet sein, doch kann es auch vorkommen, dass auf diese Weise ein sehr merklicher Fehler begangen würde. Denken wir uns das Felsen-Profil (Fig. 92) einer

Fig. 92.



Strasse winde sich in einem Bogen von 20 M. Halbmesser um einen Felsenkopf herum, und es liegen die Schwerpunkte S und S_1 der Auf- und Abtragsflächen nur 2,50 M. ausserhalb der Bahnaxe: so würde man, bei Messung der Längen in der Bahnaxe den Abtrag um ein volles $^1/_8$ zu gross und den Auftrag um ebensoviel zu klein annehmen. Denn nach Guldins Regel ist der Cubikinhalt

eines durch Bewegung eines Profils erzeugten Körpers gleich dem Inhalt des Profils multiplicirt mit dem Weg, den dessen Schwerpunkt *S* zurücklegt, vorausgesetzt, dass das Profil immer senkrecht auf der Bahn des Schwerpunktes stehe. Im oben erwähnten Fall aber hat diese Schwerpunktsbahn nur 17,5 nicht 20 M. Radius, und die in der Bahnaxe gemessenen Längen müssen um

$$\frac{2{,}5}{20} = {}^1/_8$$

reducirt werden.

Diese Guldinsche Regel ist überhaupt sehr nützlich, um bei den vielen unregelmässigen Körpern, die der Ingenieur zu berechnen hat, die richtige Länge derselben zu bestimmen, wenn einmal Profile in irgend einer Richtung aufgenommen oder construirt sind. Wir glauben dies nicht besser als durch Anwendung auf die Bestimmung des Inhaltes eines Wegübergangs (Taf. 5_{23}) erläutern zu können. Es würde zwar auch hier das gewöhnliche Verfahren, mehrere Profile bei *a*, *b*, *c*, *d* zu den gegebenen Endprofilen zu construiren und den Inhalt durch Multiplication ihrer mittleren Flächen mit ihren Längen zu bestimmen, wo dann die Genauigkeit von der Zahl und der Wahl der Profile abhängt, angewendet werden können; allein, gesetzt es handle sich darum, diesen Inhalt ganz genau zu bestimmen, so könnte man auf die folgende Weise verfahren. Wir würden den Körper (durch die Verticalebene *ABC*, die durch den Fuss der Böschung geht, und durch die Cylinderfläche *DEB* mit verticalen Erzeugungslinien die die obere Wegkante projicirt) in 3 Theile theilen.

Der erste liegt über den Böschungen des Bahndammes, der Inhalt seiner Erdflächen ist dem Aufriss Taf. 5_3 zu entnehmen, wo sich die eine als krummlinigtes Dreieck *BCH*, die andere als Trapez mit der Diagonale *AD* projicirt und ihr Mittel ist mit der senkrechten Entfernung des Schwerpunktes *S* der Endfläche von dem Profil *a* zu multipliciren. Der zweite ist ein Cylinder mit der Grundfläche *ABEDA* (Taf. 5_2), dessen Höhe im Schwerpunkt derselben bei *S* zu construiren ist (siehe den Aufriss).

Der dritte bildet die Böschungen des Wegdammes; dieser ist erzeugt durch die Bewegung des veränderlichen Profils 1, 2, 3. 1 ist da construirt, wo die Wegkante ihre Richtung ändert, 2 wo die Böschung am breitesten ist und 3 am Ende. Das Mittel je zweier dieser Profile ist mit dem — · — · — ten von ihrem Schwer-

punkt zurückgelegten Weg zu multipliciren. Der Inhalt von 3 aber mit dem Weg $3F$. Bei allen derartigen Böschungen liegt natürlich die Schwerpunktslinie im $^1/_3$ der Böschungsbreite. Das letzte Stück zwischen den Profilen 3 und BC könnte auch als Kegel berechnet werden, indem man die horizontale Projection seiner Grundfläche mit dem $^1/_3$ des verticalen Abstands des Schwerpunkts derselben von der Spitze des Kegels multiplicirt; diess ist ganz genau dasselbe, als ob man $^1/_3$ der Grundfläche des Kegels mit dem von der Spitze auf sie gefällten Perpendikel multiplicirte.

Dem eben Gesagten entsprechend ist also auch die Höhe der Viertelskegel zu bestimmen, welche beim Anschluss an hohe Viaducte mitunter auf sehr steilen Thalabhängen liegen; hier muss auch $^1/_3$ des verticalen Abstandes des Schwerpunktes der Grundfläche von der Spitze des Kegels mit der horizontalen Projection der Grundfläche multiplicirt werden.

Ist das Gelände gebrochen, so gilt das eben Gesagte auch von jedem einzelnen Theil des Kegels, dessen Grundfläche als eben angenommen werden darf.

Bei Rotationskörpern ist nach dieser *Guldin*'schen Regel der in Rechnung zu bringende Weg gleich $2\mathfrak{M}\pi : F$, wenn man mit F den Flächeninhalt der rotirenden Fläche, und mit $\mathfrak{M}$ das statische Moment derselben in Bezug auf die Rotationsaxe bezeichnet. Der Cubikinhalt des Rotationskörpers ist demnach gleich 2π mal dem statischen Moment.

Eine Anwendung von diesem Satz werden wir nach Behandlung der statischen Momente bringen.

31. Bestimmung des Cubikinhaltes aus Horizontalcurven.

Die Parallelebenen, durch welche oben die Cubikinhalte bestimmt wurden, standen alle vertical, allein häufig werden auch horizontale Parallelebenen, die Horizontalcurven, zur Bestimmung des Inhalts ganz unregelmässiger Körper benutzt.

Der Abstand der Horizontalcurven wird gewöhnlich so bestimmt, dass der Schnitt des Geländes mit einer normal auf den Curven stehenden verticalen Ebene als geradlinig angenommen werden darf. Nimmt man dann weiter an, zwei aufeinander-

folgende Curven seien ähnlich, so ist der Erdkörper zwischen denselben als ein abgestutzter Kegel zu betrachten, und sein Inhalt

$$\mathfrak{I} = {}^1/_3 h\,(F + F_1 + \sqrt{FF_1}),$$

wo h den verticalen Abstand zweier Curven und F und F_1 ihren Flächeninhalt bezeichnet.

In der Praxis begnügt man sich jedoch gewöhnlich damit, die mittlere Fläche mit h zu multipliciren, also

$$\mathfrak{I} = {}^1/_2 h\,(F + F_1)$$

zu setzen, was um

$${}^1/_6 h\,(\sqrt{F} - \sqrt{F_1})^2$$

zu gross ist. Da alle ähnlichen Dimensionen der beiden Flächen sich wie

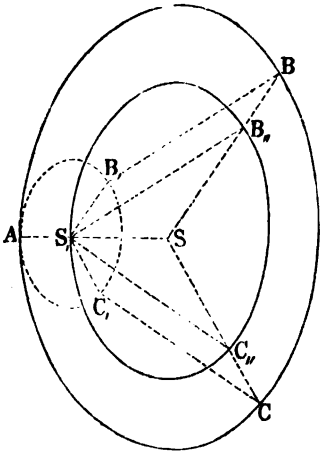
$$\sqrt{F} : \sqrt{F_1}$$

verhalten, so erhält man diesen Fehler, wenn man (siehe Fig. 93) auf einer Differenz S,A zweier ähnlicher Strahlen SA und SS, wo S das perspectivische Projectionscentrum ist, eine ähnliche Curve $AB,C,$ construirt, und ihren Flächeninhalt mit ${}^1/_6$ des verticalen Abstandes der Curven multiplicirt. Bei dem in der Regel sehr kleinen Verhältniss von

$$\frac{AS,}{AS}$$

ist dieser Fehler meistens so klein, dass er füglich vernachlässigt werden kann; in Folge der Kleinheit desselben Verhältnisses ist der aus der möglichen Unähnlichkeit solcher Figuren entspringende Fehler nothwendigerweise noch viel kleiner, indem er nur eine kleine Aenderung in der Länge der Projectionsstrahlen $S,$ $(AB,C,)$ bewirkt. Diesen zweiten Fehler kann man nur für eine bestimmte Form der Curven ermitteln, und da eine jede bestimmte Form in der Natur wohl nur einmal vorkommt, so wollen wir diesem Fehler zweiter Ordnung hier nicht mehr weiter nachspüren.

Fig. 93.



Bei der Bestimmung des Cubikinhaltes mancher Körper, z. B. Hügelkuppen, kommt es vor, dass diese nicht gerade von einer zu den Horizontalcurven parallelen Ebene begrenzt sind, sondern noch etwas über die letzte Curve hinausragen. In diesem Fall wird man, wenn die Kuppe abgerundet ist oder eine Keilform hat, den Flächeninhalt der letzten Curve mit $^1/_2$ der überragenden Höhe, dagegen mit $^1/_3$ derselben multipliciren, wenn die Kuppe mehr kegelförmig gebildet ist. Ueberhaupt wird man dann, je nach der Aehnlichkeit der Kuppe mit der einen oder andern Form, diesen Coefficienten zwischen 0,33 und 0,5 wählen. Ist sie aber durch ein Plateau begrenzt, das nicht ganz parallel zu den Horizontalcurven läuft, so wird man die verticale Höhe des Schwerpunktes des Plateaus über der Ebene der Curve mit der Mittelfläche dieser und der Horizontalprojection des Plateaus multipliciren.

Das bequemste, um nicht zu sagen einzige praktische Mittel den Flächeninhalt, den die Curven einschliessen, zu berechnen, besteht darin, sie mit dem Planimeter zu umfahren. Sind, wie es sein sollte, die verticalen Abstände der Horizontalcurven alle gleich gross, so hat man einfach die um das Mittel der obersten und untersten Endfläche verminderte Flächensumme aller Curven mit h zu multipliciren, um den ganzen Cubikinhalt zwischen diesen Endflächen zu erhalten. Eine allenfallsige Kuppe über oder unter einer der Endflächen wäre natürlich hier noch nicht mit inbegriffen, und wäre besonders zu addiren.

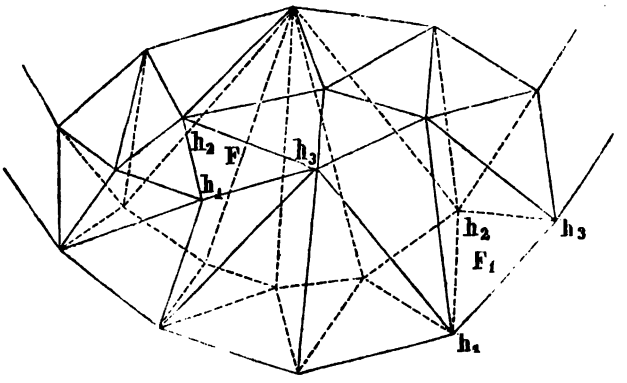
32. Bestimmung des Cubikinhaltes aus cotirten Plänen.

Der Cubikinhalt von Körpern keiner sehr grossen und keiner bestimmten Längen-Ausdehnung, bei denen es also nicht der Mühe werth ist, besonders Horizontalcurven aufzunehmen, wird wohl am zweckmässigsten aus einem cotirten Plan bestimmt. Es werden so viele Punkte aufgenommen und nivellirt, dass man die Dreiecke, die sie einschliessen, wenn sie durch gerade Linien mit einander verbunden werden, als eben betrachten kann. Denkt man sich dann alle diese Dreiecke als Endflächen von Prismen, welche die horizontale Projection des Dreiecks zur Basis haben, und multiplicirt man den Inhalt dieser Basis mit dem $^1/_3$ der

Cotensumme ihrer drei Ecken, so erhält man den Cubikinhalt des durch dieses Dreieck projicirten Theiles des Körpers, wenn als Cotenhorizont eine Begrenzungsfläche des Körpers angenommen worden war; war letzteres jedoch nicht möglich, so ist von diesem Inhalt noch der des Raumes zwischen dem Cotenhorizont und der zweiten Begrenzungsfläche des Körpers abzuziehen.

Wäre z. B. der in Fig. 94 dargestellte Inhalt einer ausgeho-

Fig. 94.



benen Füllgrube zu bestimmen, deren ursprüngliche Geländeumrisse durch punktirte Linien angedeutet sind, so hätte man

$$\mathfrak{Z} = \Sigma\,{}^1/_3\,(h_1 + h_2 + h_3)\,F - \Sigma\,{}^1/_3\,(h'_1 + h'_2 + h'_3)\,F_1,$$

wo F die Flächeninhalte der untern dreiseitigen Begrenzungsflächen nach ausgehobener Erde, und F_1 die der obern ursprünglichen Flächen bezeichnet, h und h' sind die auf einen über dem Gelände liegenden Horizont bezogenen Coten.

Genau auf die eben hier angedeutete Weise müsste auch verfahren werden, wenn der Cubikinhalt eines Körpers aus seiner orthogonalen Projection zu bestimmen wäre.

33. Das Massennivellement.

Unter Massennivellement verstehen wir jene graphische Darstellung der auf einer Bahnstrecke (Körper von vorwiegender Längenausdehnung) vorkommenden Auf- und Abtragsmassen, aus der am deutlichsten die Verwendungsart dieser Massen, die

Längen und Grenzen der verschiedenen Transportsektionen ersehen, aus der sogar die Transportkosten graphisch bestimmt werden können, wenn das Massennivellement in hinlänglich grossem Maassstab aufgetragen wurde; und aus der am leichtesten alle jene bei Anordnung der Erd-Transporte zu beobachtenden Gesetze und Regeln abgeleitet werden können. Das Massennivellement wurde von dem leider zu früh (1847) verstorbenen bayrischen Sektionsingenieur *Bruckner* aus Neustadt an der Hardt ersonnen, und wurde auf den bayerischen Staatseisenbahnen als nothwendige Beilage aller Massenberechnungen betrachtet, um deren specielle Verwendung anschaulich zu machen.

Das Massennivellement unterscheidet sich vom gewöhnlichen Längenprofil dadurch, dass statt der Coten des Geländes die algebraische Summe aller bis zum treffenden Profil vorkommenden Auf- und Abtragsmassen, die beide mit entgegengesetzten Zeichen in Addition zu bringen sind, aufgetragen werden. Diese Summen sind also nichts anderes als die Zahlen der in vielen Massenberechnungen eingeführten Abgleichungscolonne, in der die Differenz der Abgleichungszahlen zweier beliebigen nicht aufeinander folgenden Profile unmittelbar den zwischen ihnen vorkommenden Ueberschuss an Auf- oder Abtrag giebt.

Ohne uns weiter in die Bildung dieser Zahlen einzulassen, wollen wir hier sogleich das auf Taf. 6_2 unter dem eigentlichen Nivellement Taf. 6_1 aufgetragene Massennivellement erklären. In demselben wurden die Aufträge aufwärts, die Abträge abwärts aufgetragen; bei der ersten Verticalen von *O* aus beginnend, wurde also der zweite Punkt des Massennivellements in der Verticalen III^a so aufgetragen, dass seine verticale Höhe über *O*, also *O*1 in irgend einen Maassstab die Auftragsmasse vor III^a darstellt. Ebenso sind die Höhendifferenzen 1 2 und 2*B* gleich den Auftragsmassen zwischen III^a und ^{b}, und zwischen ^{b} und ^{c}, die ganze Verticale $O_1 B$ ist also gleich dem ganzen Auftrag bis III^c.

Bei III^c beginnt der Abtrag, er wird als negative Zahl in Addition gebracht, die Zahlen der Abgleichungstabelle, d. h. die Coten des Massennivellements nehmen ab, und die Massen des Abtrags nach III^c muss man sich von *B* aus abwärts aufgetragen denken, und so fort.

Eine unmittelbare Folge dieser Anordnung ist:

1) Die gebrochene Linie, welche die einzelnen Punkte des Massennivellements mit einander verbindet, ist aufsteigend im Auftrag, abfallend im Abtrag; im vorliegenden Massennivellement wurden erstere ausgezogen, letztere punktirt.
2) Die Uebergänge von Auf- in Abtrag sind Maxima der Berge, die von Ab- in Auftrag Minima der Thäler in dieser Linie.
3) Der Linienzug des Massennivellements ist desto steiler, je grösser der Auf- oder Abtrag zwischen zwei aufeinanderfolgenden Profilen ist, also je grösser das Querprofil der Bahn ist; überhaupt
4) ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen der Zug des Massennivellements mit der Horizontalen bildet, dem Querprofil der Bahn proportional. Sie ist also positiv, aufwärts gerichtet, im Auftrag, negativ, abwärts gerichtet, im Abtrag, sie ist $= 0$ bei dem Uebergang von einem in den Andern, und zwar bezeichnet sie dann ein Maximum, wenn sie in Abtrag übergeht, negativ wird; ein Minimum, wenn sie in Auftrag übergeht, positiv wird.
5) Bei constantem Querprofil des Auf- oder Abtrags bildet die Linie des Massennivellements eine gerade Linie.
6) Im Allgemeinen werden also gewöhnlich anfangs zu- dann abnehmende Auf- oder Abträge die Form eines $\wp$ haben.

Aus dem eben Gesagten geht hervor, dass ein solches Massennivellement einen bessern Ueberblick der Auf- und Abtragsverhältnisse als das Längenprofil selbst giebt, weil die zu bewegenden Massen, die nicht einmal den Auf- und Abtragsflächen desselben proportional sind, hier als verticale Abstände, als lineäre Grössen ins Auge fallen, allein der grösste Vorzug desselben besteht darin, dass:

7) Zwischen allen Profilen, deren Endpunkte auf einer Horizontalen liegen, Ausgleichung des Auf- und Abtrags stattfindet; dass
8) Der Flächeninhalt der Berge und Thäler über und unter dieser Horizontalen dem variabeln, von der Entfernung abhängigen Theil der Transportkosten proportional ist, und dass
9) Diese Berge und Thäler die einzelnen Transportsektionen bezeichnen, und zwar die über der horizontalen Abgleichungslinie liegenden Berge die Sektionen in denen rückwärts, und

die unter derselben liegenden Thäler die Sektionen, in denen vorwärts transportirt wird.

Da die Ordinaten durch Addition der Auf- und Abtragsmassen gebildet werden, so ist es ad 7) klar, dass wenn die Ordinate des Endpunktes eines beliebigen Stückes des Massennivellements gerade so gross wie die des Anfangspunktes ist, zur erstern ebensoviel Auf- als Abtrag addirt werden musste, dass beide sich demnach innerhalb dieser Profile ausgleichen, und dass eine oder mehrere ganze Transportsektionen zwischen denselben gebildet werden können.

Nimmt man, wie gewöhnlich bei Anfertigung der Tabellen für Transportkosten, an, es bestehe der Preis für den Transport der Cubikeinheit auf eine variable Entfernung aus einer Constanten mehr einer einfach dieser Entfernung proportionalen Variabeln, so wird das sub 8) Gesagte für diesen variabeln Theil der Transportkosten gelten, wobei man sich den constanten Theil einfach den Förderungskosten zugeschlagen denken kann. Es sind nämlich dann die Transportkosten des Massenelementes ΔM (Taf. 6_2) z. B. das in der Transportsektion III von III^a aus rückwärts zu transportiren ist, bis zum Uebergang von Auftrag in Abtrag dem Product $e \Delta M$ oder dem in Sektion III schraffirten Flächenelement proportional. Die Gesammttransportkosten des in der III. Sektion zu transportirenden Abtrags M bis zum Uebergang von Ab- in Auftrag sind $\Sigma e \Delta M$ oder der Fläche ABD proportional. Auf dieselbe Weise wird bewiesen, dass die Transportkosten derselben Erdmasse M vom Uebergang von Auf- in Abtrag an bis zu den Orten, den diese Massen im Auftrag einzunehmen haben, der Fläche BCD proportional sind. Die Gesammtkosten sind also dem Flächeninhalt ABC proportional.

Da bei diesem Beweis die gegenseitige Lage der Auf- und Abtragselemente gar nicht in Betracht kam, so ist es bezüglich der Kosten ganz einerlei, wohin die einzelnen Abtragselemente im Auftrag transportirt werden, vorausgesetzt nur, dass bei diesem Transport die Grenzen der Sektion nicht überschritten, nicht rückwärts, dagegen parallel oder doch annähernd parallel zur Bahnaxe transportirt werde.

Nur nebenbei wollen wir hier bemerken, dass die Fläche ABD oder die $\Sigma e \Delta M$ dem statischen Moment der Masse in Bezug auf den Uebergang von Auf- in Abtrag, also dem Product

der Abtragsmasse M mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von diesem Uebergang proportional ist, weil $\Sigma e \Delta M$ der Ausdruck dieses statischen Momentes ist.

Da dasselbe auch bezüglich des Transportes derselben Masse vom Uebergang an zum Ort des Auftrages gilt, so sind die totalen Transportkosten einer beliebigen Erdmasse, dem Product dieser Masse mit der Entfernung ihrer Schwerpunkte im Ab- und Auftrag proportional, wie es seiner Zeit schon Gauthey bewiesen hat.

Ein Blick auf Taf. 6_1 und 6_2 genügt, um die Richtigkeit des sub 9) Gesagten einzusehen. Da immer vom Abtrag der abwärts laufenden punktirten, zum Auftrag der aufsteigenden, ausgezogenen Linie forttransportirt werden muss, und jene nothwendigerweise vor jedem Thal und hinter jedem Berg liegt, so folgt, dass Berge Sektionen bezeichnen, in denen rückwärts, und Thäler solche, in welchen vorwärts transportirt wird.

Alles bisher Gesagte ist eine unmittelbare Folge dessen, dass die Zahlen der Abgleichungscolonnen aufgetragen werden. Willkürlich aber ist die Art und Weise, wie die seitwärts liegenden Füllgruben und Ablagerungsplätze aufgetragen werden können. Auf Taf. 6_2 sind sie auf die folgende Weise dargestellt.

Es sei (Taf. 6_3) die Ansicht der Bahn von oben und die schraffirte Fläche in derselben die Füllgrube. Dann tragen wir von jedem Punkt C aus auf einer Horizontalen die Entfernung $CE = C_1E_1$ (Taf. $6_{2\,3}$) dieses Punktes von der Füllgrube, mit Berücksichtigung des Transportsinnes auf. Die Entfernung eines auf der andern Seite der Füllgrube liegenden Punktes ($L L_1$) wird also in entgegengesetztem Sinn so aufgetragen, dass $LM = L_1 J_1 K_1$ ist, wobei vorausgesetzt wird, dass, wie es manchmal der Fall ist, alle Transportwagen nur über einen bestimmten Punkt J_1 weg von der Füllgrube zur Bahn gelangen können; in diesem Fall wird dann der Ort aller Endpunkte dieser Entfernungen eine Verticale MK sein, weil die Entfernung der Punkte der Bahn genau mit der Länge der Bahnstrecken wächst. Längs der Füllgrube zwischen (JF, J_1F_1) ist die Entfernung eines jeden Punktes der Bahn von der Füllgrube gleich gross, also $JK = FG = J_1K_1 = F_1E_1$; nimmt man endlich die Mitte der Füllgrube H als den Ort an, wo die Transportrichtung wechselt, so erhält man als Ort aller Entfernungen der Füllgrube die gebrochene Linie $EGHKM$. Man sieht hiernach, dass die von der Füllgrube bediente Bahnstrecke

in zwei Sektionen I und II (Taf. 6_1) zerfällt, in deren letztern II vorwärts und in deren erstern I rückwärts transportirt wird. Die Transportkosten in der erstern sind dem Flächeninhalt *EGHCE*, und die der zweiten dem Flächeninhalt *MKHLM* proportional. Auch sieht man, dass die an die Abgleichungslinie *CP* stossende Sektion II dieser gegenüber sich gerade wie ein Thal, in dem vorwärts transportirt wird, verhält.

Genau auf dieselbe Weise, wie hier angedeutet, wurden auch die beiden Ablagerungsplätze, welche die letzten Sektionen VIII, IX, X und XI umfassen, aufgetragen und Alles hier von den Füllgruben Gesagte gilt auch von den Ablagerungsplätzen.

Zwischen zwei Füllgruben oder Ablagerungsplätzen ist durch das Massennivellement allein die Eintheilung der Transportsektionen durchaus noch nicht bestimmt, und es hängt z. B. ganz von unserm Belieben ab, durch Hinaufrücken der Abgleichungslinie *CP* mehr aus der Füllgrube Sektion II zu entnehmen, mehr auf dem Ablagerungsplatz Sektion VIII abzulagern, und gleichzeitig alle Thal-Sektionen, in denen vorwärts transportirt wird, zu vergrössern, und alle Berg-Sektionen, in denen rückwärts transportirt wird, zu verkleinern, oder auch das Umgekehrte durch Hinabrücken der Abgleichungslinie zu thun.

Da frägt es sich nun, wie müssen die Transportsektionen eingerichtet werden, damit die Transportkosten ein Minimum werden, oder was ganz dasselbe ist, wie muss die Abgleichungslinie *CP* gelegt werden, damit die Summe der Flächeninhalte der von dieser Linie abgeschnittenen Berge und Thäler ein Minimum werde.

Untersuchen wir die Aenderung, die wir durch ein ∞ kl. Hinaufrücken der Abgleichungslinie *CP* um Δh (Taf. 6_2) an der Summe der durch diese Inhalte dargestellten Transportkosten bewirken. Ist die Basis eines Bogens $= b$ und der variable Theil der Transportkosten der Masseneinheit auf die Längeneinheit für diesen Berg $= k$, so wird die durch das Hinaufrücken bewirkte Kostenminderung für diesen Berg dem Product $b k \Delta h$ proportional sein und die Minderung für alle Berge $= \Delta h \Sigma_B b k$, weil wir das für alle Berge gleiche Δh als Faktor herausnehmen können. Während die Transportkosten für die Berge sich mindern, mehren sich die für die Thäler und zwar um die ganz auf die gleiche Weise gebildete Summe $\Delta h \Sigma_T b k$. Die totale Kostenminderung ist daher nur:

$$(\Sigma_B b k - \Sigma_T b k)\, \Delta h.$$

Soll nun durch ein unendlich kleines Hinaufrücken der Abgleichungslinie um Δh keine weitere Kostenminderung mehr bewirkt werden können, so muss diese Minderung, d. h. die Grösse unter der Klammer gleich 0 sein. Es muss also die Summe der mit den jeweiligen Transportkosten multiplicirten Bergbasen gleich der Summe der mit den entsprechenden Kosten multiplicirten Thallängen sein. Uebersetzen wir diesen Satz in die Sprache der Wirklichkeit, so gelangen wir zu der wichtigen Regel:

Die Transportsektionen eines aus mehren Sektionen bestehenden Erdbaues sollen so angeordnet werden, dass die Summe der mit den jeweiligen Kosten multiplicirten Längen aller Sektionen, in denen vorwärts transportirt wird, gleich der ebenso gebildeten Summe für alle Sektionen, in denen rückwärts transportirt wird, sei.

Bei Bildung dieser Summen müssen natürlich die Längen der äussersten Füllgruben- und Ablagerungssektionen (wie die Fig, Taf. 6_2 zeigt) mit inbegriffen sein.

Herr Prof. *Eikemeyer* hat in seinem „Massennivellement" diesen Satz weiter entwickelt für den Fall, dass die Transportkosten der Quadratwurzel der Transportlänge proportional seien; da dies jedoch nur für die kleinsten Transportlängen der Fall ist, und bei grösseren Transporten diese Kosten viel mehr von den zu transportirenden Massen, die durchaus nicht ausser Acht gelassen werden dürfen, abhängen, so wollen wir in dieser Richtung nicht weiter gehen, sondern voraussetzen, es werden die Kosten pro Längeneinheit speciell für jede einzelne Transportsektion, mit Berücksichtigung der Sektions-(Bahn-)Länge und der zu transportirenden Massen ermittelt. Wir reduciren dann graphisch alle Sektionslängen auf den höchsten Transportpreis, indem wir von dem Endpunkt des auf einer Horizontalen in irgend einem Maassstab aufgetragenen grössten Preises Kreise mit den kleinern Preisen an diese vom andern Endpunkt des grössten Preises Tangenten ziehen, und dadurch die zur Reduction dienenden Sinusverhältnisse erhalten. Die hier reducirten Bergeslängen werden im positiven die Thallängen im negativen Sinne aneinander gereiht. Das Resultat soll für die zweckmässigste Abgleichungslinie $= 0$ sein, ist das für eine zuerst angenommene nicht der Fall, so

kann mittelst einer Fehlercurve, wie wir sogleich zeigen werden, die Abgleichungslinie, für die diese Summe = 0 ist, leicht gefunden werden.

Es ist das auf Taf. 6_2 unter der Voraussetzung geschehen, dass die Transportkosten für alle Sektionen gleich gross seien. Zur Ermittlung der zweckmässigsten Lage von CP ist dann die Reduction überflüssig; durch regelmässiges Umschlagen des Zirkels auf dieser Linie erhält man sehr bald die Differenz zwischen den Bergbasen und Thalbreiten; findet man z. B. für eine durch P_1 gehende Abgleichungslinie die Thalbreiten grösser als die Bergbasen, so trage man diesen Ueberschuss auf der Abgleichungslinie selbst in beliebiger Richtung, z. B. nach $P_1 Q_1$ auf; findet man dann für eine durch P_n gehende Abgleichungslinie die Bergbasen grösser, so trage man diesen Ueberschuss $P_n Q_n$ in entgegengesetzter Richtung auf; verbindet man schliesslich Q_1 und Q_n durch eine Fehlerlinie, so schneidet diese in P die richtige Lage der Abgleichungslinie CP ab. Diese Linie $Q_1 Q_n$ wird im vorliegenden Falle eine Gerade sein, weil keine Brechungspunkte des Zuges des Massennivellements zwischen die durch P_1 und P_n geführten Horizontalen fallen. Im Allgemeinen aber wird diese Linie eine Curve sein, die wir mit dem Namen Fehlercurve bezeichnen wollen.

Dieses Verfahren, das ganz der arithmetischen Regula falsi entspricht, werden wir noch öfters anzuwenden Gelegenheit haben. Es besteht also im Allgemeinen darin, die Fehler $+P_1 Q_1$, $-P_n Q_n$, die bei gewissen Annahmen gemacht werden, mit Berücksichtigung ihres Sinnes, in irgend einer Richtung, in irgend einem Maassstab, von irgend einer Abscissenaxe $P_1 P_n$ aus so aufzutragen, dass die Abscissen in irgend einer Beziehung zu den gemachten Annahmen stehen, (hier bestimmt der Fuss der Ordinate $P_1 P_n$ selbst die Lage der Abgleichungslinie), dann bestimmt die Fehlercurve, die man erhält, wenn die Endpunkte aller dieser Fehlerordinaten mit einander verbunden werden, durch ihren Schnitt P mit der Abscissenaxe die Annahme, die den Fehler 0 giebt; im vorliegenden Fall geht die Abgleichungslinie selbst durch diesen Punkt P.

Durch die zweckmässigste Lage der Abgleichungslinie ist also diejenige Länge aller Transportsektionen bestimmt, welche die Transportkosten zum Minimum macht.

Früher wurde auf den bayerischen Bahnen das Massenprofil nur zu dieser graphischen Bestimmung der Transportsektionen benutzt, in der letzten Zeit aber wurde es auch auf den schweizerischen Bahnen zur Ermittlung der Transportkosten selbst, durch Umfahren der Berge und Thäler mit dem Planimeter, gebraucht.

Häufig wird behauptet, die Genauigkeit mit der Kosten auf diese Weise ermittelt werden können sei nicht gross genug, um bei Anfertigung der Anschläge gebraucht werden zu können. Um einen Begriff von dieser Genauigkeit zu erhalten, nehme man an, es sei für die Längen der Maassstab von 1 : 2000 tel und für die Massen der von 1 Millimeter gleich 1000 Cubikmeter gewählt worden, wobei ein sehr grosser Abtrag von 150000 cm. einen Berg von 15 ctm. Höhe geben würde. Da die Ordinatenlängen das Resultat einer rechnerischen Abgleichung sind, so können sie mathematisch genau aufgetragen werden, und es kommt nur der Fehler in Betracht, den das Planimeter macht. Nehmen wir ferner an, es werde auf eine Fläche von etwa 250 □ctm. $^1/_2$ □ctm. gefehlt; so ist dieser Fehler $^1/_{500}$ tel der Kosten dieses Abtrages und stellt den Transport von 10000 cm. auf 10 m. Länge, oder von 200 cm. auf eine Durchschnittslänge von 500 m. dar. Bei einem so grossen Erdtransport kann diese Arbeitsmenge gewiss nicht mehr in Betracht kommen. Die Preise für die Erdarbeiten können überhaupt nicht auf eine Genauigkeit von $^1/_{500}$ tel Anspruch machen.

Kommen verschiedene Transportarten vor, so versteht es sich, dass jede einen Transport darstellende Fläche besonders umfahren werden muss, um mit dem entsprechenden Preis multiplicirt zu werden.

34. Die graphische Massenberechnung.

Wir schliessen diesen Abschnitt, indem wir als Anwendung des Bisherigen zeigen, wie alle bei einem Erdbau vorkommenden Rechnungen graphisch ausgeführt werden können; wir haben hierzu nur (Taf. 6) eine Zusammenstellung von Operationen, die alle schon einzeln behandelt worden sind, kurz zu erklären.

Taf. 6_1 stellt ein Längenprofil vor. Wären die einzelnen Querprofile gegeben, so könnte man noch diese einzelnen Querprofile mittelst der Flächentafel (Taf. 4) auf die Basis von 10 Ctm. verwandeln. Der Einfachheit wegen haben wir vorausgesetzt, das Querprofil habe die einfache Form ABC (Taf. 6_4) im Auf- und $A_1 B_1 C$ im Abtrag. Auf die Doppel-Basis $OH = 2b$ verwandelnd, erhält man dann (laut Nr. 19 S. 98) die Parabel $OO, O_{,,}$ zur Verhandlungscurve, und $O, X,$ und $O_{,,} X_{,,}$ als Abscissenaxen für den Auf- und Abtrag, wo jeder Profilhöhe oder Tiefe die Ordinate y der Parabel als Flächeninhalt so entspricht, dass derselbe $= by$ ist.

Werden alle diese y im Längenprofil (Taf. 6_1) vom Bahnniveau aus je auf dem entsprechenden Profil aufgetragen, so erhält man das — — — — te Profil. Der Flächeninhalt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten desselben ist gleich der mittlern Ordinate, multiplicirt mit der Entfernung der Profile, oder, weil die mittlere Ordinate auch der mittlern Querschnittsfläche proportional ist, dem Cubikinhalt der Masse zwischen den Profilen proportional, den man selbst erhält, wenn dieser Flächeninhalt mit b multiplicirt wird. Will man bei dieser Reduction den Fehler berücksichtigen, den man bei Multiplication der mittleren Fläche mit der Entfernung begeht, so kann das Fehlerdreieck von den zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten abgezogen werden.

Verwandelt man alle diese Flächen in Dreiecke der constanten Höhe h, so sind die Basen den Massen proportional, z. B. bei dem Abtrag nach V^d, die Länge $O_{,,\,1,\,1\,2,\,2\,3}$ etc. den Abträgen zwischen $V^d — {}^e$; ${}^e — VI^a$; ${}^a — {}^b$ etc. so proportional, dass man diese Abträge durch Multiplication der entsprechenden Linien mit der constanten Fläche bh erhält. Wegen der Grösse des letzten Abtrags wurde dieser auf die Höhe $2h$ verwandelt, dafür müssen aber auch dessen Basen dann überall doppelt gerechnet werden. Greift man die Totallänge $O_{,,\,8}$ mit einem Maassstab ab, dessen Eintheilungen mit bh mal dem Preis der Förderungskosten mehr dem Preis der constanten Transportkosten bezeichnet sind, so erhält man unmittelbar diesen Theil der Kosten für den Abtrag nach V^d. Dass man mit gehöriger Ausscheidung hierbei auch noch verschiedene Erd- und Transportarten, d. h. verschiedene Förderungs- und Transportkosten berücksichtigen kann, braucht wohl nicht erst auseinandergesetzt zu werden.

Dieselben Längen auf der Verticalen (V^d in Taf. 6_2) aufgetragen, geben im Massennivellement die Höhendifferenzen der einzelnen Profilpunkte, und die Flächen desselben, den variablen Theil der Transportkosten, den man durch Umfahren mit dem Planimeter und durch Multiplication der erhaltenen Fläche mit $b\,h$ mal dem Preis dieser Kosten ermitteln kann.

35. Zusammenhang der Linien mit Flächen, Körpern, Momenten.

Wir haben an diesem Beispiel gezeigt, wie nach Verwandlung der Flächen auf eine bestimmte Basis die Flächen gewissen Linien proportional sind, die mit andern Linien verbunden werden können und Flächen geben, die Körpern proportional sind; wie dann die letztern Flächen wiederum auf eine Basis reducirt werden können und Linien geben, die Körpern proportional sind; und die, mit andern Linien zusammengesetzt, Flächen geben, die statischen Momenten oder Producten von Linien mit Körpern proportional sind, deren entsprechende Flächen wiederum verwandelt werden könnten u. s. f.

Also schon auf diese Weise könnten statische Momente, und weiter gehend auch Trägheitsmomente etc. graphisch bestimmt werden, doch giebt es Formen, die sich hiezu besser eignen und die wir in den nächsten Abschnitten behandeln werden.

ZWEITER ABSCHNITT.

DIE ZUSAMMENSETZUNG DER KRAEFTE.

Erstes Kapitel.

36. Kräfte im Allgemeinen.

Herr Prof. *Alb. Mousson* sagt in seiner „*Physik auf Grundlage der Erfahrung*, Zürich 1858. I. B. S. 26 27" über Kräfte:

„Das Dasein und die Natur der Kräfte kennen wir nicht anders als aus den beobachteten Wirkungen, und müssen daher in diesen die Merkmale jener suchen. Eine Kraft wird genau definirt, wenn man 1) ihren Angriffspunkt angibt, das Körpertheilchen, auf welches sie unmittelbar wirkt; 2) ihre Richtung oder die Linie, längs welcher sie allein und ungestört wirkend, dasselbe bewegen würde; endlich 3) die Grösse oder Stärke derselben, bezogen auf eine bekannte Krafteinheit.

Wenn eine Kraft ungestört und allein auf einen Körper wirkt, so offenbart sie sich durch Mittheilung von Bewegung oder Erzeugung einer gewissen Bewegungsmenge. Die erzeugte Bewegungsmenge stellt dann die Stärke der bewegenden Kraft dar, unter der Einschränkung jedoch, dass die zu vergleichenden Kräfte eine gleiche Zeit durch unverändert fortgewirkt haben. Verschiedene Kräfte P, P' verhalten sich dann wie die von ihnen erzeugten Bewegungsmengen, also, wenn m und m' die bewegten Massen, $g\,g'$ die in der Zeiteinheit mitgetheilten Beschleunigungen bezeichnen:

$$P : P' = m g : m' g';$$

und auf den gleichen Körper wirkend wie $g : g'$.

Als Einheit wird diejenige Kraftgrösse gelten, welche der Masseneinheit in der Zeiteinheit*) eine Beschleunigung gleich der Längeneinheit mitzutheilen vermag. Wird ein Körper, auf den eine Kraft wirkt, durch Hindernisse abgehalten die Bewegung anzunehmen, so äussert sich die Kraft als Druck. Die Schwere z. B. kann einerseits das Fallen des Steines, andererseits den Druck hervorbringen, den er, auf der Hand ruhend, gegen dieselbe ausübt, und den man sein Gewicht nennt. Zur Messung aller drückenden Kräfte dient der Druck der Gewichtseinheit.

Die beiden Arten, die Stärke einer Kraft anzugeben, nach Einheiten der in der Zeiteinheit mitgetheilten Bewegungsmenge und nach Gewichtseinheiten, stehen nicht im Widerspruch, denn das lehrt die Erfahrung, dass der Druck zweier fortwirkenden Kräfte stets den Bewegungsmengen, deren sie fähig sind, proportional ist. Ueberdies kann man jeden in Gewichtseinheiten angegebenen Druck P als eine durch gleiche Gegenwirkung aufgehobene Bewegungsmenge betrachten, oder als Aequivalent derjenigen Bewegungsmenge, welche die Schwere auf die Masse jenes Gewichtes, eine Zeiteinheit durch fortwirkend, erzeugen könnte. Bezeichnet also m diese Masse, g die Beschleunigung aus der Schwere, so hätte man

$$P = mg;$$

und man muss, um Einklang in die Ausdrücke zu bringen, für die eine bekannte Masse:

$$m = \frac{P}{g}.$$

setzen.

Da Kräfte ungestört wirkend nicht anders als durch hervorgebrachte Bewegungen sich aussprechen, so lässt sich auf Kräfte alles anwenden, was früher über Zusammensetzung, Aufhebung und Zerlegung mehrerer Kräfte gesagt worden ist.

Um die Resultirende (wir sagen Mittelkraft) mehrerer auf ein gleiches Theilchen wirkenden unabhängigen Kräfte zu bestimmen, diejenige Kraft nämlich, die allein gedacht eine gleiche

*) In dieser Citation haben wir die Anwendungen auf die verschiedenen Maasssysteme weggelassen und statt Sekunde, Gramm und Meter Zeit-, Gewichts- und Längeneinheit gesetzt.

Wirkung ausübt, stellt man die Kräfte ihrer Stärke proportional durch Linien dar, und behandelt sie als gegebene Bewegungen. Die durch das Parallelogramm oder das Polygon gefundene resultirende Bewegung wird der Richtung und Grösse nach die resultirende Kraft darstellen."

Wir glaubten nicht nothwendig zu haben, das von Hrn. Prof. *Mousson* auf Seite 22 seines Werkes über die Zusammensetzung der Bewegungen Gesagte wiederholen zu müssen; der Leser wird sich das Fehlende leicht selbst ergänzen können, und sehen, dass diese Auffassung der physikalischen Eigenschaften der Kräfte zu folgendem Satz führt:

Stellt man die Richtung und die Intensität (Grösse) der Kräfte durch die Richtung und Länge von Linien dar, so ist die Zusammensetzung der Kräfte nichts anderes als die Nr. 1 S. 4 erwähnte Addition der Linien, von der das Parallelogramm der Kräfte nur ein Specialfall ist.

Indem wir an diese physikalisch dynamische Erklärung der Kräfte anknüpfen, bemerken wir, dass sich die Statik nur mit den von den Kräften erzeugten Drücken, Gewichten und gar nicht mit der von ihnen erzeugten Bewegung beschäftigt, welche letztere die Dynamik behandelt. Es ist daher in der Statik ganz allgemein üblich, das Wort Kraft statt Druck und Gewicht zu setzen, trotzdem dass hierin eigentlich eine Verwechselung von Ursache und Wirkung liegt.

37. Das Parallelogramm der Kräfte.

Da die Statik sich gar nicht mit der Bewegung beschäftigt, welche durch Kräfte verursacht werden könnte, sondern letztere diese nur im Zustand des Gleichgewichts betrachtet, so muss man es begreiflich finden, dass man sich in allen Lehrbüchern der reinen Statik bemüht hat, die Dynamik zu umgehen und einen Beweis zu finden, der von der Bewegung nicht ausgeht.

Mit dem Gleichgewicht von 3 Kräften beginnend, suchte man den Beweis für das Parallelogramm direct zu führen.

Diese Beweise ohne Hilfe der Dynamik scheinen unmöglich zu sein, denn sie enthalten meistens die 3 folgenden Voraus-

setzungen; wenn 3 Kräfte A, B, C, deren Azimuthe α, β, γ sind, im Gleichgewicht sind:

1. So gehen alle 3 durch einen Punkt und liegen in einer Ebene, und die Richtung irgend einer derselben, z. B. γ, ist eine Function des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ der beiden andern, und ändert sich nicht, wenn jede derselben verhältnissmässig vergrössert, z. B. doppelt genommen wird.

2. Wenn die Richtungslinien von A, B, also α und β constant angenommen werden, so giebt es für jedes Verhältniss $\frac{A}{B}$ eine und auch nur eine, immer reelle Richtung der dritten Kraft C, oder mit andern Worten das Verhältniss $\frac{A}{B}$ und die Richtung γ von C_1 sind projectivisch.

3. Wenn eine der 3 Kräfte gleich 0 wird, so sind die beiden andern entgegengesetzt gleich; wenn 2 Kräfte gleich gross sind, so halbirt die Richtung der dritten den Winkel, den sie mit einander bilden, für $A = 0$, also $\gamma = \beta - 180^0$,

„ $B = 0$, „ $\gamma = \alpha - 180^0$,

„ $A = B$, „ $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 180^0$.

Den ersten Satz sucht man bisweilen dadurch zu beweisen, dass man sagt, es ändere sich offenbar nichts, wenn man A und B in verschiedenen Gewichtseinheiten ausdrückt, mithin muss γ eine Function des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ sein. In allen Beweisen werden die Sätze Nr. 3 als selbstverständliche Axiome stillschweigend angenommen. Nr. 2 ist aber in der analytischen Form der meisten Beweise enthalten.

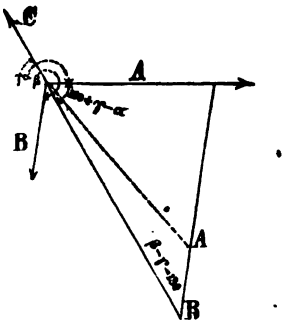
Werden aber diese Sätze als richtig angenommen, so gelangt man unmittelbar auf die folgende Weise zum Kräftedreieck (halben Parallelogramm), welches das Gleichgewicht von den 3 Kräften darstellt.

Da nach Nr. 2 die Richtungslinie der dritten Kraft C nur von dem Verhältniss von $\frac{A}{B}$ abhängt, so können wir die eine dieser beiden Kräfte, A z. B. constant annehmen, und nur die andere B

variiren, ohne deshalb die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Am Endpunkt von A, Fig. 95, tragen wir B in Richtung und Grösse auf.

Wird nun $B = 0$ gesetzt, so fällt die Richtungslinie von C mit der von A zusammen, und geht demnach durch den entsprechenden Endpunkt von B.

Fig. 95.



Wird $A = 0$ oder das Verhältniss $\frac{B}{A} = \infty$ gesetzt, so fällt die Richtungslinie von C mit der von B zusammen, und geht durch den unendlich fernen Punkt der Parallelen zu B, also wiederum durch den entsprechenden Endpunkt von B.

Macht man endlich $B = A$, so halbirt die Linie m, welche den Endpunkt von B projicirt, den Winkel $\hat{AB} = \beta - \alpha$, und fällt daher laut 3 ebenfalls für dieses Verhältniss von $\frac{B}{A} = 1$, mit C zusammen. Es gehen also 3 Strahlen des Büschels C, welches dem Verhältniss $\frac{B}{A}$ d. h. für $A = 1$ der Länge B projectivisch ist, durch die entsprechenden Endpunkte von B. Es liegt daher dieser Strahlenbüschel perspectivisch zu dem vom Endpunkt von A aus aufgetragenen B, und es gehen die Richtungslinien aller C durch den ihnen entsprechenden Endpunkt von C.

Hieraus folgt unmittelbar, siehe Fig. 95:

$$\frac{A}{\sin(\gamma - \beta)} = \frac{B}{\sin(\alpha - \gamma)}.$$

Bestimmt man auf dieselbe Weise die Richtungslinie von A aus dem Verhältniss $\frac{B}{C}$, so erhält man genau auf die gleiche Weise:

$$\frac{B}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{C}{\sin(\beta - \alpha)};$$

also allgemein:

$$\frac{A}{\sin(\gamma - \beta)} = \frac{B}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{C}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Drei auf einen Punkt wirkenden Kräfte, die im Gleichgewicht sind, verhalten sich in Richtung und Grösse wie die Seiten eines Dreiecks, welche mit den Kräften parallel laufen und diesen proportional sind.

Analytisch gelangt man auf folgendem Wege zu denselben Resultaten, wenn das Verhältniss $\frac{A}{B}$ und der Strahlenbüschel C projectivisch sein sollen, so müssen $\frac{A}{B}$ und $\operatorname{tg}\gamma$ einer Gleichung ersten Grades genügen. Die Gleichung muss daher von der Form sein:

$$a\frac{A}{B}\operatorname{tg}\gamma + b\,.\,\operatorname{tg}\gamma + c\,.\,\frac{A}{B} + d = 0,$$

oder

$$aA\operatorname{tg}\gamma + bB\operatorname{tg}\gamma + cA + dB = 0.$$

Zur Bestimmung der unbestimmten Coefficienten $a\,b\,c\,d$ geben die Substitutionen der sub 3) oben aufgeführten entsprechenden Werthe die 3 Gleichungen:

$$(a+b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + c + d = 0,$$

$$\begin{aligned} a\ \operatorname{tg}\alpha \qquad\quad + c \quad &= 0, \\ b\ \operatorname{tg}\beta \qquad\quad + d &= 0; \end{aligned}$$

aus denen man $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{-\sin\alpha} = \frac{d}{-\sin\beta}$ erhält.

Die Substitution dieser Werthe von $a\,b\,c\,d$ in obige allgemeine Gleichung giebt:

$$\frac{A}{\sin(\gamma-\beta)} = \frac{B}{\sin(\alpha-\gamma)}.$$

Genau auf dieselbe Weise kann auch gezeigt werden, dass jedes dieser beiden Verhältnisse $= \frac{C}{\sin(\beta-\alpha)}$ sei. Man hat also allgemein wie oben:

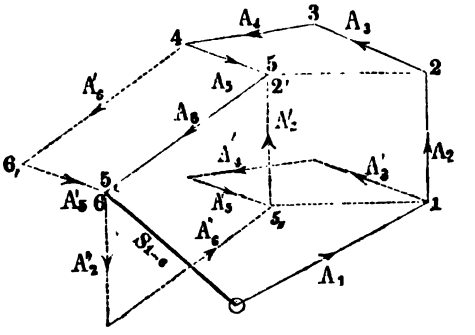
$$\frac{A}{\sin(\gamma-\beta)} = \frac{B}{\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{C}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

38. Zusammensetzung von Kräften, die auf einen Punkt wirken.

Wenn 3 Kräfte $A_1\,A_2\,C$, die auf einen Punkt wirken, im Gleichgewicht sind, so ist offenbar die Kraft C der Mittelkraft $A_1\,A_2$ entgegengesetzt gleich; werden daher die Kräfte A_1 und A_2 von einem Punkt O ausgehend in Richtung und Grösse auf-

getragen, d. h. die 2 die Kräfte $A_1 A_2$ darstellenden Linien im Sinne von Nr. 1 S. 4 addirt, so ist in Fig. 96 die Summe $S_{1\,2}$ dieser beiden Kräfte in Richtung und Grösse durch die Linie dargestellt, welche den Ursprung O mit dem Endpunkt des summirenden Zuges $A_1 + A_2$ verbindet. Behandelt man das von O ausgehende $S_{1\,2}$ gerade so wie A_1 und fügt an seinen Endpunkt, d. h. an das Ende des Linienzuges $A_1 + A_2$ die Kraft A_3, so erhält man offenbar die Summe der 3 Kräfte $S_{1\ldots3} = A_1 + A_2 + A_3$, u. s. f. bis zur letzten A_6. Die Kraft $O6$ ist dann in Grösse und Richtung die Summe $S_{1\ldots6}$ der gegebenen 6 Kräfte A. Hierbei können die Kräfte A beliebige Richtungen im Raum haben, und Fig. 96 kann als eine Parallelprojection derselben betrachtet werden. Soll eine solche Zusammensetzung von Kräften wirklich ausgeführt werden, so sind zur Bestimmung der Lage und Grösse der A zwei solcher Projectionen nothwendig, und man wird die Linien ganz nach den Regeln der darstellenden Geometrie projiciren.

Fig. 96.



Die Bestimmung der Mittelkraft ist daher, wie wir schon oben bemerkten, identisch mit der Addition der Linien, als deren Resultat oder Summe man natürlich den Endpunkt des Linienzuges zu betrachten hat. Also nur dann, wenn alle Linien oder Kräfte gleiche Richtung haben, wird die Entfernung dieses Endpunktes der Summe oder Differenz aller Linien oder Kräfte gleich sein; und ebensowenig als man aus der Summe mehrerer Zahlen die Grösse der einzelnen Summanden entnehmen kann, kann man hier aus der Lage des Endpunktes allein die der einzelnen Ecken des Linienzuges entnehmen.

Fig. 96 giebt nicht allein die Summen der Kräfte A_{1-6}, sondern auch die Partialsumme jeder beliebigen Zahl aufeinander folgenden Kräfte. So z. B. ist die Kraft $2-5$ die Summe der Kräfte $A_{3\,4\,5}$.

Aus dem Parallelogramm der 4 Kräfte $A_5 A_6 A'_5$ und A'_6, wo

A_5 und A'_5 ebenso wie A_6 und A'_6 in Richtung und Grösse gleich sind, geht hervor, dass man zu demselben Endpunkt 6, also auch zu derselben Summe S_{1-6} gelangt, wenn man in der Ordnung der Addition die beiden Kräfte A_5 und A_6 miteinander vertauscht. Dasselbe gilt auch von je zwei beliebigen andern Kräften, z. B. auch von der Summe $2-5 = 1-5_{\prime\prime}$ der Kräfte A_{345} und $A_2 = A'_2$, indem $1255_{\prime\prime}$ ein Parallelogramm ist. Auf $1-5_{\prime\prime}$ kann man nun einen Zug A'_{345} vorzeichnen, dessen einzelne Strecken in Richtung und Grösse gleich denen des Zuges 2345 sind, woraus hervorgeht, dass man von dem Punkt 1 aus zu demselben Punkt $5 = 2'$ gelangt, man mag die Kräfte in der Reihenfolge A_{2345} oder in der Reihenfolge A'_{3452} addiren. An der Richtung und Grösse von $S_{1\ldots6}$ wird also nichts geändert, wenn die Linie A_2 zwischen A_5 und A_6 statt zwischen A_1 und A_3 eingeschaltet wird. Auf dieselbe Weise kann jede andere Linie an jede beliebige andere Stelle versetzt werden. Bei Additionen dieser Art ist also die Summe unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die einzelnen Kräfte zusammengesetzt werden.

Unter Subtraction der Kräfte müssen wir dem über Subtraction der Linien Nr. 1 S. 7 Gesagten entsprechend das Einfügen der Kräfte mit entgegengesetztem Sinn in den Linienzug verstehen. In Fig. 96 sind von $S_{1\ldots6}$ die Kräfte A_2 und A_6 abgezogen worden, d. h. es ist die Summe von $S_{1\ldots6} - A''_2 - A''_6$ gebildet worden, wo $A''_2 = A_2$ und $A''_6 = A_6$ ist. Es ist klar, dass das Resultat gleich $05_{\prime\prime}$ der Summe von A_{1345} sein muss. Denn wir haben eben gezeigt, dass das Endresultat unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die Linien zusammengesetzt werden, mithin wird man auch dieselbe Summe $05_{\prime\prime}$ erhalten, wenn man wie folgt addirt:

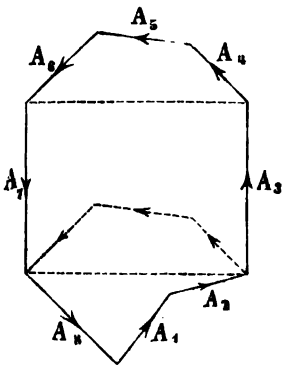
$$A_1 + A_2 - A''_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 - A''_6.$$

Nun wird aber bei der Bildung von $A_2 - A'_2$ in der Richtung dieser Linien hinaus und in der entgegengesetzten gleich weit wieder zurückgefahren, so dass also $A_2 - A'_2$ und ebenso $A_6 - A''_6$ ganz ausfallen, mithin muss das Endresultat $05_{\prime\prime}$ gleich der Summe der A_{1345} sein.

Hieraus folgt also, dass wenn in einem Zug gleiche Kräfte entgegengesetzten Sinnes vorkommen, sich dieselben gegenseitig

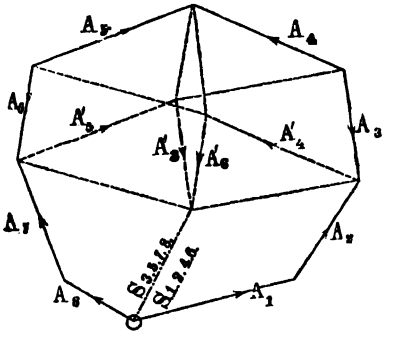
aufheben. Dass man genau die gleiche Summe erhalte, wenn man 2 gleiche entgegengesetzte Kräfte ganz weglässt, wurde Fig. 97 noch besonders gezeigt; die Kräfte A_3 und A_7 sind zwei solche gleiche entgegengesetzte Kräfte, es kann nun der ganze Zug A_{456} zwischen diesen Kräften parallel mit sich selbst an den andern Endpunkt von A_3 und A_7 versetzt werden, und die Gleichgewichtsverhältnisse der übrigen Kräfte bleiben dieselben wie früher. Diese beiden Kräfte heben sich demnach auf, ohne die Gleichgewichtsverhältnisse der übrigen zu stören. Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man die beiden Kräfte A_3 und A_7 unmittelbar aufeinander folgen lässt.

Fig. 97.



Befinden sich in einem geschlossenen Kräftezug Kräfte mit verschiedenem Sinn, so sind die Summen aller Kräfte von demselben Sinn einander gleich. Man überzeugt sich leicht hievon durch Zusammenstellung aller Kräfte von gleichem Sinne. Im Kräftezug 1 2 ... 8 (Fig. 98) wurden die Kräfte 1 2 4 6 und die Kräfte 3 5 7 8 gleichen Sinnes angenommen; eine Zusammensetzung in der Ordnung 1 2 . 4 . 6 . 3 . 5 . 7 8 zeigt, dass 1 2 . 4 . 6. und 8 7 5 . 3. die gleiche Summe O (3. 6.) haben.

Fig. 98.



Bilden mehrere auf einen Punkt wirkende Kräfte einen geschlossenen Kräftezug und haben alle Pfeile dieselbe Richtung, so ist ihre Mittelkraft $= 0$ und alle Kräfte sind im Gleichgewicht.

Hat in einem geschlossenen Kräftezug ein Pfeil eine allen andern entgegengesetzte Richtung, so ist die Kraft, die ihn trägt, als Mittelkraft aller übrigen zu betrachten.

Sind $m + n$ Kräfte im Gleichgewicht, so dass also in einem geschlossenen Kräftepolygon alle Pfeile gleichen Sinn haben, so

ist die Mittelkraft der m Kräfte gleich und entgegengesetzt der der n Kräfte.

Das bisher Gesagte gilt ganz allgemein, welches auch die Lage der Linien im Raum sei; es gilt also auch, wenn bei der Zusammensetzung der ganze Linienzug in eine Ebene fällt (d. h. wenn alle Richtungen eine bestimmte ∞ ferne Gerade schneiden), und wir haben für diesen Fall nichts beizufügen.

Zu bemerken ist noch, dass die Winkel der Kräfte im Kräftepolygon, wie wir von jetzt an den Zug der Kräfte nennen wollen, die Supplemente der Winkel sind, die sie wirklich miteinander bilden.

Bezüglich der Bezeichnung der Grösse und des Sinnes der Kräfte gilt alles, was früher über die Bezeichnung der Linien gesagt worden ist. Ist insbesondere eine Kraft im Texte durch die Zeichen ihrer Endpunkte anzudeuten, so soll die Aufeinanderfolge der Zeichen die Richtung der Kraft in der Art ausdrücken, dass die Spitze des Pfeils gegen das letzte Zeichen gekehrt ist. Die Kraft $\overrightarrow{AB}$ ist also genau das Entgegengesetzte der Kraft $\overrightarrow{BA}$.

39. Analytische Zusammensetzung der Kräfte im Strahlenbündel.

Wir gehen von dem in Nr. 37 S. 160 bewiesenen Satz aus, dass 3 Kräfte im Gleichgewicht sich wie die Richtungen und Längen der drei Seiten eines Dreiecks, d. h. einer geschlossenen Figur verhalten.

Bezeichnet man in irgend einem schiefen oder rechtwinkeligen Coordinatensystem mit $X_i\ Y_i\ Z_i$ die Coordinaten des Endpunktes der in ihrer Richtung vom Ursprung aus, auf den sie wirkt, aufgetragenen Kraft A_i, so muss

$$0 = X_0 + X_1 + X_2,$$
$$0 = Y_0 + Y_1 + Y_2,$$
$$0 = Z_0 + Z_1 + Z_2 \text{ sein.}$$

Versteht man unter der Mittelkraft $S_{1\,2}$ der Kräfte A_1 und A_2 diejenige Kraft, welche in entgegengesetzter Richtung, d. h. negativ genommen, mit A_1 und A_2 im Gleichgewicht ist, so hat man offenbar:

$$X_{1\,2} = X_1 + X_2,$$
$$Y_{1\,2} = Y_1 + Y_2,$$
$$Z_{1\,2} = Z_1 + Z_2.$$

Setzt man nun die Mittelkraft $S_{1\,2}$ mit einer 3. Kraft A_3 zusammen, so erhält man:

$$X_{1.3} = X_{1\,2} + X_3 = X_1 + X_2 + X_3,$$

und ganz ähnliche Summen für $Y_{1..3}$ und $Z_{1..3}$. Auf die gleiche Weise fortfahrend, erhält man allgemein:

$$X_{1..n} = \Sigma X_i;\ Y_{1..n} = \Sigma Y_i;\ Z_{1..n} = \Sigma Z_i,$$

wo die Summenzeichen sich über alle zu addirenden Kräfte erstrecken.

Um diese 3 Summenformeln, die wir hier in der allgemein üblichen Form gegeben haben, in eine einzige zusammenzufassen, multipliciren wir alle X mit einer Variabeln ξ, alle Y mit einer andern η, alle Z mit einer dritten ζ, und fassen die 3 zu einer Kraft i gehörigen Ordinaten in dem Ausdruck:

$$\alpha_i' = X_i\xi + Y_i\eta + Z_i\zeta$$

zusammen; dann ist offenbar die entsprechende Gleichung $\sigma_{1..n}$ der Mittelkraft $S_{1..n}$:

$$\sigma_{1..n} = X_{1..n}\xi + Y_{1..n}\eta + Z_{1..n}\zeta = \sum_1^n \alpha_i'.$$

Damit diese Formen einen praktischen Werth erhalten, müssen sie irgend einem geometrischen Gebilde assimilirt werden können, das mit den treffenden Kräften im Zusammenhang steht, dann wird auch von diesen Summenformeln alles gelten, was von dem geometrischen Gebilde gilt.

Denkt man sich unter ξ, η, ζ Plücker'sche Coordinaten einer Ebene, d. h. die negativ reciproken Abschnitte der Coordinatenaxen zwischen dem Ursprung und einer variabeln Ebene, dann ist α_i' die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Kraft A_i, und $\alpha_i' + 1$ die Gleichung ihres Endpunktes.

In der Regel wird die Richtung der Kraft A_i durch die Gleichung:

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = 0$$

ihres unendlich fernen Punktes gegeben sein, und a_i, b_i, c_i werden nicht gerade gleich den Coordinaten X_i, Y_i, Z_i sein, sondern man wird nur haben:

$$\frac{X_i}{a_i} = \frac{Y_i}{b_i} = \frac{Z_i}{c_i} = \frac{A_i}{\left[e_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + 2b_ic_i\omega_1 + 2c_ia_i\omega_2 + 2a_ib_i\omega_3}\right]},$$

worin ω_1, ω_2, ω_3 die Cosinus der Coordinatenaxenwinkel sind. Aus diesen Verhältnissen folgt:

$$\alpha_i' = (a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta)\frac{A_i}{e_i}.$$

Wir wollen jetzt

$$\alpha_i = \frac{1}{e_i}(a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta),$$

die Normalform des unendlich fernen Punktes der Richtungslinie der Kraft A_i nennen. Sie ist nichts anderes als wie die um 1 verminderte Gleichung des Punktes in dieser Linie, dessen Entfernung vom Ursprung der Coordinaten gleich 1 ist.

Dann ist $\alpha_i' = A_i\alpha_i$, und die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft ist:

$$\sigma_{1..n} = \Sigma A_i\alpha_i = 0.$$

Die Gleichung des Endpunktes der Mittelkraft ist:

$$\sigma_{1..n} + 1 = \Sigma A_i \alpha_i + 1 = 0$$

und hieraus ergiebt sich die Grösse der Mittelkraft:

$$S_{1..n} = \sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\Sigma A_i \frac{a_i}{e_i}\right)^2 + \left(\Sigma A_i \frac{b_i}{e_i}\right)^2 + \left(\Sigma A_i \frac{c_i}{e_i}\right)^2 + \quad \cdot \\ + 2\left(\Sigma A_i \frac{b_i}{e_i}\right)\left(\Sigma A_i \frac{c_i}{e_i}\right)\omega_1 + 2\left(\Sigma A_i \frac{c_i}{e_i}\right)\left(\Sigma A_i \frac{a_i}{e_i}\right)\omega_2 + \\ + 2\left(\Sigma A_i \frac{a_i}{e_i}\right)\left(\Sigma A_i \frac{b_i}{e_i}\right)\omega_3 .\end{array}\right\}}$$

In allen obigen Formeln denken wir uns $S_{1..n}$ und alle A_i positiv, die Richtungslinie einer Kraft wird dann unzweideutig durch die Zeichen von $\frac{a_i}{e_i}, \frac{b_i}{e_i}, \frac{c_i}{e_i}$ und die Kraft durch die der entsprechenden Summen ausgedrückt.

Aus der Natur der Gleichung geht hervor, dass wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, auch die Mittelkraft in dieser Ebene liege. Werden in derselben die Axen der x und y angenommen, so erhält man die entsprechenden Formeln einfach dadurch, dass man in den oben entwickelten Formeln alle c und $Z = 0$ setzt.

Wir schreiben noch einmal die Formeln für die Ebene an:

Die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Kraft A_i sei:

$$a_i \xi + b_i \eta = 0,$$

$$e_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + 2 a_i b_i \omega},$$

wo ω den Cosinus des Winkels xy bezeichnet. Die Normalform des unendlich fernen Punktes ist:

$$\alpha_i = \frac{1}{e_i}(a_i \xi + b_i \eta) = 0.$$

Die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft:

$$\sigma_{1..n} = \Sigma A_i \alpha_i = 0,$$

und die Grösse der Mittelkraft:

$$S_{1..n} = \sqrt{\left(\Sigma A_i \frac{a_i}{e_i}\right)^2 + \left(\Sigma A_i \frac{b_i}{e_i}\right)^2 + 2\left(\Sigma A_i \frac{a_i}{e_i}\right)\left(\Sigma A_i \frac{b_i}{e_i}\right)\omega}.$$

Setzt man in $\sum_1^n A_i \alpha_i$ nach einander $n = 1, 2 \ldots n$, so bilden die n Punkte in der Reihenfolge der Zusammensetzung das Kräftepolygon, das graphisch direkt durch die Addition der die Kräfte darstellenden Linien erhalten wird (Nr. 38 S. 161). Also sehen wir, dass hier, dem in der Einleitung Gesagten entsprechend, die graphische und die analytische Zusammensetzung der Kräfte identische Operationen sind.

40. Gleichgewicht von vier Kräften im Strahlenbündel.

Gerade so wie in der Ebene das Verhältniss dreier Kräfte, die sich im Gleichgewicht befinden, bekannt ist, sobald ihre Richtungslinien gegeben sind: ebenso ist im Strahlenbündel das Verhältniss von vier Kräften im Gleichgewicht, durch ihre Richtungslinien bestimmt. Setzt man z. B. die vier auf den Punkt O wirkenden Kräfte $ABCD$, in dieser Reihenfolge mittelst eines räumlichen Linienzuges, der ein windschiefes Viereck bildet, zusammen, so muss der Endpunkt von B oder der Punkt (BC) sowohl in der Ebene (AB) als auch in der Ebene (CD), also in ihrer Schnittlinie liegen; da aber diese beiden Ebenen durch den Punkt O und die Richtungen zweier in ihnen liegenden Richtungslinien A und B einerseits, C und D andrerseits, vollständig bestimmt sind, so ist auch die Schnittlinie O (BC) vollständig gegeben.

Führt man also durch irgend einen Punkt dieser Schnittlinie Parallelen zu B und C, so werden diese die Richtungslinien von A und D schneiden. Würde man durch einen Punkt ausserhalb der Schnittlinie O (BC) Parallellinien zu B und C ziehen, so würden sie die Linien A und D nicht mehr schneiden. Verrückt man aber den angenommenen Punkt auf O (BC), so ändern sich die Längen des Linienzuges proportional.

Aendert man die Reihenfolge der vier Kräfte $ABCD$, so lässt sich laut Nr. 38 in der neuen Reihenfolge ein geschlossener Linienzug construiren, dessen einzelne Strecken gleich den Strecken eines der ersten Linienzüge sind. Da dies wiederum von jeder Reihenfolge in der Zusammensetzung gilt, so ist der Satz vollständig bewiesen, dass durch die Richtungslinien von vier Kräften im Strahlenbündel das Verhältniss derselben bestimmt ist.

Variirt man die Reihenfolge von ABC, während D am Ende bleibt, so erhält man die sämmtlichen Kanten eines schiefen Parallelepipedons mit D als Diagonale; dieses Parallelepipedon ist ein dem Parallelogramm der Kräfte ganz analoges geometrisches Gebilde. Wird auch D noch in der Reihenfolge variirt, so kann man 8 verschiedene Parallelepipedon erhalten; jede Kraft kommt zweimal als Diagonale vor, wenn sie zuletzt auftritt, und die 8 Parallelepipedon erfüllen den ganzen Raum um den Ursprung herum.

41. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in der Ebene.

Es sei die Mittelkraft der Kräfte $P_1\ P_2 \ldots . P_9$ zu bestimmen, die in Taf. 5_4 in Richtung und Lage durch die Linien P_1, $2\,2_1$, $3\,3_1$, $4\,4_1$ etc., wo die Zahlen als Indices von P betrachtet werden, gegeben sind.

Man verlängere P_1 bis zum Durchschnittspunkt 2 mit der Kraft P_2, setze dann nach den oben gegebenen Regeln P_1 mit P_2 zu $P_{1\,2}$ der Mittelkraft von P_1 und P_2 zusammen. Diese Mittelkraft $P_{1\,2}$ der beiden ersten Kräfte verlängere man bis zum Schnitt 3 mit P_3, setze von 3 ausgehend $P_{1\,2}$ mit P_3 zusammen, so erhält man die Mittelkraft $P_{1\,2\,3}$; diese kann wiederum bis P_4 verlängert werden und so fort, bis alle vorhandenen Kräfte zu einer Mittelkraft vereinigt sind.

Da es technisch sehr leicht ist, Parallele zu ziehen, so ist es zweckmässig, die Zusammensetzung der Kräfte selbst in einer besondern Figur (Taf. 5_5) vorzunehmen. Trägt man nämlich von einem beliebigen Punkt O aus in Richtung und Grösse die Kraft P_1 (1) auf und fügt zu dieser die Kraft P_2 (2), so ist das Dreieck, das von O aus die Kraft 2 projicirt, mit dem Dreieck $P_1\,P_2\,P_{1\,2}$ (Taf. 5_4) congruent; die Linie 2 3, die man durch 2 parallel zu O (2 3) der Taf. 5_5 zieht, ist daher die Lage der Mittelkraft, während die Linie O (2 3) (Taf. 5_5) die Richtung und Grösse der Mittelkraft ist. Fügt man (in Taf. 5_5) die Kraft 3 zu (1 2), so ist O (3 4) die Mittelkraft von 1 2 3, in Richtung und Grösse; die Parallele 3 4, die man in Taf. 5_4 zu ihr zieht, ist ihre Lage, und so fortfahrend erhält man der Reihe nach die Mittelkraft von (1 2) (1 2 3); (1 2 3 4) .... .. (1 2 3 ... 9) in Richtung und Grösse als Strahl der Taf. 5_5 und in Richtung und Lage als Seite des Zuges, der in Taf. 5_4 die einzelnen Kräfte mit einander verbindet. Da Fig. 5_5 identisch ist mit der Figur, die man erhalten würde, wenn alle Kräfte auf einen Punkt wirkten, so geht hieraus hervor, dass durch Aenderung der Lage der einzelnen Kräfte nichts an der Richtung und Grösse geändert werde und diese dieselben sind, als ob alle Kräfte auf einen Punkt wirkten.

42. Seilpolygon oder Drucklinie und Kräftepolygon.

Da in Folge der Anordnung der Taf. 5_4 alle Strecken des Zuges gespannt werden, so würde zur starren Verbindung der Kräfte 1 ... 10 ein Seil, auf das alle diese Kräfte wirkten, genügen. Es wird daher häufig dieser Zug der Mittellinien ein Seilpolygon genannt. In der Gewölbetheorie, wo alle Seiten des Polygons gepresst sind, heisst es mitunter auch die Drucklinie. Wir werden beide Ausdrücke gebrauchen, je nachdem die meisten Polygonseiten gespannt oder gepresst sind. Wir werden also auch den Zug $2\,3_1\,4_1 \ldots 10_1$ (Taf. 5_4) ein Seilpolygon nennen, trotzdem, dass die Seite $7_1\,8_1$ gedrückt ist. Um aber zu ermitteln, ob eine Polygonseite gepresst oder gespannt sei, zerlege man eine der nächstliegenden Kräfte in ihre Seitenkräfte nach der Richtung der Polygonseiten; ist nun die eine dieser Seitenkräfte gegen den folgenden Eckpunkt gekehrt, so ist die Polygonseite, die man sich zerschnitten denken kann, gedrückt, zieht sie dagegen vom folgenden Eckpunkt weg, so ist sie gespannt.

Auf Taf. 5_4 wurden zwischen 7 und 8 und 7_1 und 8_1 Schnitte angedeutet und Richtungen der Mittelkraft der auf jeder Seite wirkenden Kräfte durch einen Pfeil angegeben; man sieht, die Polygonseite 7 8 ist gespannt, die Seite $7_1\,8_1$ dagegen gedrückt.

Zum Unterschied des Seil- oder Druckpolygons werden wir die Hülfsfigur (Taf. 5_5), welche die Richtung und Grösse der Kräfte giebt, das Kräftepolygon nennen.

Um beide Polygone unmittelbar auf einander beziehen zu können, ist es wohl am zweckmässigsten, wie es in Taf. $5_{4\,5}$ geschehen ist, die Angriffspunkte der Kräfte im Seilpolygon, also dessen Ecken, und die Kräfte selbst im Kräftepolygon, also dessen Seiten, mit demselben Zeichen, hier dem Index der Kraft, zu versehen. Folgen dann mehrere parallele Kräfte, wie 4 5 6 7 aufeinander, deren Richtungen im Kräftepolygon also zusammenfallen, so kann je nach Umständen eine der Bezeichnungsarten (Fig. 5, 6 und 7, Seite 5) gewählt werden. Ist dann das Kräftepolygon vorerst aufgetragen und also bezeichnet worden, so kann das Seilpolygon ganz mechanisch nach demselben construirt werden, indem man dessen Seiten 2 3, 3 4, 4 5 .... zwischen den entsprechenden Kräften nach einander parallel zu den Strahlen *O* (2 3, 3 4, 4 5 ...) zieht.

43. Analytische Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene.

Da es möglich war, die Zusammensetzung der Kräfte im Strahlenbüschel auf die einfache Form $\Sigma A\alpha$ zu bringen, so muss es auch möglich sein, die reciproke Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene auf eine ähnliche einfache Form zu bringen; es kann auf folgende Weise geschehen.

Es sei die Gleichung der Linie, in der die Kraft A_i wirkt:

$$a_i x + b_i y + c_i = a_i' = 0.$$

Dann muss die Gleichung der Mittelkraft der Kräfte A_1 und A_2 von der Form

$$ma_1' + na_2' = 0$$

sein, weil sie durch den Schnitt von a_1' und a_2' gehen soll. Die Coefficienten m und n sind so zu wählen, dass diese Linie auch durch den unendlich fernen Punkt der Mittelkraft gehe, der nach Nr. 39 S. 166 wie folgt bestimmt werden kann.

Der Gleichung a_i' genügen die Werthe $x = + b_i \cdot \infty$, und $y = - a_i \infty$. Demnach ist die Gleichung ihres unendlich fernen Punktes:

$$b_i \xi - a_i \eta = 0;$$

die Normalform desselben:

$$\alpha_i = \frac{1}{e_i}(b_i \xi - a_i \eta),$$

worin:

$$e_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \omega} \text{ ist.}$$

Die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft von A_1 und A_2 ist demnach:

$$0 = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = \left(A_1 \frac{b_1}{e_1} + A_2 \frac{b_2}{e_2}\right)\xi - \left(A_1 \frac{a_1}{e_1} + A_2 \frac{a_2}{e_2}\right)\eta.$$

Soll $ma_1' + na_2'$ durch diesen unendlich fernen Punkt gehen, so muss nothwendiger Weise $m = \frac{A_1}{e_1}$ und $n = \frac{A_2}{e_2}$ sein; und wir erhalten die Gleichung der Mittelkraft:

$$A_1 \frac{a'_1}{e_1} + A_2 \frac{a'_2}{e_2} = 0.$$

Wird der Sinus des Winkels der Coordinatenaxen mit ω' bezeichnet, so ist $\alpha_i = \frac{a_i' \omega'}{e_i}$ nichts anderes als die Normalform der Gleichung a_i', d. h. der Richtungslinie der Kraft; so dass die Gleichung der Mittelkraft durch Multiplication mit ω_1' in die folgende Form:

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = 0$$

gebracht werden kann.

Bezeichnet man mit s_{12} die Normalform dieser Mittelkraft, so erhält man sie durch Entwickelung:

$$0 = s_{12} =$$

$$\frac{\left[\left(A_1\frac{a_1}{e_1}+A_2\frac{a_2}{e_2}\right)x+\left(A_1\frac{b_1}{e_1}+A_2\frac{b_2}{e_2}\right)y+\left(A_1\frac{c_1}{e_1}+A_2\frac{c_2}{e_2}\right)\right]\omega'}{\sqrt{\left(A_1\frac{a_1}{e_1}+A_2\frac{a_2}{e_2}\right)^2+\left(A_1\frac{b_1}{e_1}+A_2\frac{b_2}{e_2}\right)^2-2\left(A_1\frac{a_1}{e_1}+A_2\frac{a_2}{e_2}\right)\left(A_1\frac{b_1}{e_1}+A_2\frac{b_2}{e_2}\right)\omega}}.$$

In dieser Gleichung ist der Nenner nach Nr. 39 S. 166 die Mittelkraft S_{12} der Kräfte A_1 und A_2; die Verschiedenheit des Zeichens im Coefficienten von 2ω rührt daher, dass für a_i' die Gleichung $b_i\xi - a_i\eta$, statt $a_i\xi + b_i\eta$ angenommen worden ist.

Man hat also:

$$S_{12}s_{12} = A_1a_1 + A_2a_2.$$

Hierin ist S_{12} eine Kraft wie A_1, s_{12} eine Normalform wie a_1; es kann demnach S_{12} mit einer 3. Kraft A_3 gerade so zusammengesetzt werden als wie A_2 mit A_1. Es ist also:

$$S_{13}s_{13} = S_{12}s_{12} + A_3a_3 = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3,$$

und ganz allgemein:

$$Ss = \Sigma Aa.$$

Die Gleichung der Mittelkraftslinie einer beliebigen Zahl in einer Ebene wirkenden Kräfte ist gleich der Summe der mit der Kraft als Coefficienten multiplicirten Normalformen dieser Kräfte.

Die Mittelkraft selbst ist der Nenner, durch welchen die als Summe erscheinende Gleichung der Mittelkraft auf die Normalform gebracht werden kann.

Bei der Anwendung obiger Summenformeln kann e_i als Wurzelgrösse positiv oder negativ genommen werden. Man wird hinsichtlich dieses Zeichens nie im Zweifel sein, wenn man bemerkt, dass in Folge unserer Zeichenannahmen in der Gleichung $b_i\xi - a_i\eta$ des unendlich fernen Punktes der Linie $a_ix + b_iy + c_i$ die Coefficienten dieser Gleichung nach Nr. 39 S. 165 die folgende Bedeutung haben:

$\frac{b_i}{e_i}$ ist die **positive** Abscisse des in der Richtung der Kraft vom Ursprung der Coordinaten aus aufgetragenen **Halb**strahles 1.

$\frac{a_i}{e_i}$ ist die **negative** Ordinate desselben Punktes; diese Coordinaten müssen demnach auch dem Zeichen nach mit diesen Grössen übereinstimmen.

$\frac{c_i}{e_i} = 0$ ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden, es muss also das Zeichen von $A_i\frac{c_i\omega'}{e_i}$ (bei der unendlich fernen Seitenkraft kann die Kraft von

ihrem Moment nicht mehr getrennt werden) mit dem Drehungssinn der Kraft A_i um den Ursprung der Coordinaten zusammenhängen. Vergleicht man die Lage der Linien $(-a_i x + b_i y + c_i)\frac{A_i \omega'}{e_i}$ und $(-a_i x + b_i y - c_i)\frac{A_i \omega'}{e_i}$ mit dem Drehungssinn von A_i, so findet man: $\frac{A_i c_i \omega'}{e_i}$ ist positiv, wenn A_i im Sinn von $+x$ nach $+y$ dreht, und wir nennen daher diesen Drehungssinn den positiven. $\frac{A_i c_i \omega'}{e_i}$ ist dagegen negativ, wenn A_i in entgegengesetztem Sinne dreht.

Hienach können also die Zeichen von $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$ und $\frac{Ac}{e}$ bestimmt werden, wenn ein oder 2 Coefficienten fehlen, d. h. wenn A durch den Ursprung geht, oder mit einer der Axen parallel läuft, und wenn A mit einer der Axen zusammenfällt oder in der unendlich fernen Geraden liegt. Es lag in der Natur unserer Entwickelungen, das Zeichen von a, b, c von der Richtung der Kraft im Halbstrahlenbüschel abhängig zu machen, man kann aber diese Zeichen auch direkt wie folgt bestimmen: Werden die Zeichen der drei Coefficienten der Linie positiv angenommen, welche vom Fundamentaldreieck O, $+x\infty$, $+y\infty$ ausgeschlossen ist und im positiven Sinne um dasselbe herumdreht, so sind $\frac{c}{e}$, $\frac{a}{e}$ und $\frac{b}{e}$ positiv oder negativ, je nachdem die in der Linie $ax + by + c$ wirkende Kraft positiv oder negativ um die 3 Eckpunkte jenes Dreiecks dreht.

Der Inbegriff aller Linien, die man erhält, wenn in $s_{1..n}$, $n = 1, 2 \ldots n$ gesetzt wird, ist das Seilpolygon. Es ist das wichtigste Hülfsmittel der Construction in der graphischen Statik.

44. Die Mittelkraft mehrerer aufeinanderfolgender Kräfte.

Die Mittelkraft mehrerer aufeinanderfolgender Kräfte geht immer durch den Schnittpunkt ihrer äussersten Polygonseiten.

Die Mittelkraft der Kräfte 2 und 3 (Taf. 5_4) z. B. geht erstens durch den Schnittpunkt 3_1 derselben, und ist zweitens parallel zum Strahl O_1 (3 4), der im Kräftepolygon (Taf. 5_5) die Kräfte 2 und 3 unterspannt. Nun läuft aber die Diagonale 3_1 (3 4) (Taf. 5_4) parallel zur Richtung der Mittelkraft (2 3) (Taf. 5_5), weil beide als sechste Seiten der zwei Vierecke 2 (3 4) $3\,3_1$ (Taf. 5_4) und O (1 2) (2 3) (3 4), von denen schon je zwei Paar gegenüberliegende Seiten und die 5. Seiten parallel liegen, ebenfalls parallel sein müssen. Es sind nämlich in beiden Vierecken die Richtungen der zwei Kräfte 2 und 3, und die drei aufeinanderfolgenden Seilpolygonseiten 1 2 (3 4),

23, (34) 34 den drei Strahlen O (12, 23, 34) parallel. Mithin fällt die Linie 3_1 (34) des Seilpolygons mit der Lage der Mittelkraft 23 zusammen, und geht durch den Schnittpunkt (34) der Seilpolygonseiten 12 vor 2 und 34 nach 3.

Hieraus folgt auch, dass es ganz einerlei ist, ob man nach einander die Kräfte 2 und 3, oder ob man unmittelbar die Mittelkraft 23 mit 1 zusammensetzt.

Verlängert man (Taf. 5_4) die Kraft (23) bis zur Kraft 4 in 4_1, so geht die Mittelkraft von (23) und 4 oder die Kraft (234) durch diesen Punkt 4_1 und gerade so wie oben bewiesen wurde, dass die Mittelkraft (23) durch den Schnitt (34) der Polygonseiten vor 2 und nach 3 gehe, kann auch bewiesen werden, dass die Mittelkraft von (23) und 4 durch den Schnitt (45) der Polygonseite 1 (34) vor der Kraft (23) mit der Seite 45 nach 4 gehe. Mithin ist die Linie 4_1 (45) die Mittelkraft der Kräfte (234). Auf dieselbe Weise fortfahrend kann man beweisen, dass die Schnittpunkte (56) (67) (78) etc. der Polygonseite 12 vor der Kraft 2 mit den gleichbezeichneten Polygonseiten nach den Kräften 5, 6, 7, etc. Punkte der Mittelkraft der Kräfte (2...5), (2...6), (2...7) sind. Benutzt man diese Schnittpunkte in der bereits begonnenen Weise, zur Construction des mit der Kraft 2 beginnenden Polygons $23_1 4_1 5_1 ... 9_1$, so erhält man die Lage dieser Mittelkräfte, welche gleiche Richtungen mit den Strahlen O_1 (23, 34, 45...) (Taf. 5_5) des mit dem Endpunkt O_1 der Kraft 2 zusammenfallenden Büschels haben müssen.

Betrachtet man den Inbegriff aller Seilpolygonseiten als Strahlenbüschel, so können die zuletzt angedeuteten Beziehungen der einzelnen Figuren auch also geometrisch ausgedrückt werden:

Die Strahlenbüschel 1234 ... und $23_1 4_1$ .... haben den Strahl 12 entsprechend gemein.

Was übrigens nur ein Specialfall von Sätzen ist, die wir in Nr. 46 beweisen werden.

Ausserdem hat der erste Büschel, mit dem Büschel erster Ordnung O und der zweite mit dem Büschel erster Ordnung O_1 der Taf. 5_5 die ∞ ferne Gerade entsprechend gemein. Es ist also durch ein solches Seil- und Kräftepolygon die Mittelkraft beliebiger aufeinanderfolgender Kräfte vollständig bestimmt; der Schnitt der äusseren Polygonseiten giebt einen Punkt, und im Kräftepolygon die Linie, welche sie alle unterspannt, die Grösse und Richtung

der Mittelkraft. Da ferner jede solche Mittelkraft im Kräftepolygon mit dem Pol O (Taf. 5_5) ein Dreieck bildet, dessen beide Schenkel in Richtung und Grösse die Spannungen der äusseren Polygonseiten darstellen, so kann die Mittelkraft auch als Mittelkraft dieser Spannungen, mit gehöriger Berücksichtigung des Sinnes der Pfeile, betrachtet werden.

Analytisch gestaltet sich der Beweis gar einfach also:

S_n kann wie folgt zerlegt werden:

$$S_{1..n}\, s_{1..n} = S_{1..i}\, s_{1..i} + S_{i+1..n}\, s_{i+1..n}.$$

Da nun die Gleichungen dreier Linien, welche durch eine Gleichung ersten Grades mit einander verbunden werden können, durch einen Punkt gehen, so folgt aus dieser Gleichung der im Eingang aufgestellte Satz.

45. Aenderung der Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte.

Vertauscht man in der Zusammensetzung der Kräfte zwei aufeinanderfolgende einzelne Kräfte, z. B. 2 und 3, so hat dies keinen Einfluss auf die folgenden Mittelkräfte.

Dass dies keinen Einfluss auf die Richtung und Grösse ausübe, und dass im Kräftepolygon (Taf. 5_5) die beiden Züge 1 2 3 und 1 3_1 2_1 zu demselben Endpunkt und derselben Lage der Kraft 4 führen, ist schon früher (Nr. 38 S. 162) bewiesen worden. Allein auf die Lage 3 4 (Taf. 5_4), der Mittelkraft im Seilpolygon, welche mit $2_{,,}$ 4 identisch ist, kann diese Aenderung der Reihenfolge keinen Einfluss ausüben, weil diese Mittelkraft durch den Punkt (3 4) der durch den Schnitt der Polygonseite 1 2 mit der Mittelkraft (2 3) oder 3_1 (3 4) gegeben ist, gehen muss. Es führt also der Zug 1 $3_{,,}$ $2_{,,}$ 4 5 .... zu demselben Resultat, als der Zug 1 2 3 4 5 ... Auf dieselbe Weise könnte auch 2 nicht nur mit 3, sondern auch mit der Mittelkraft einer beliebigen Zahl folgender Kräfte vertauscht werden, ohne dass es auf das Endresultat einen Einfluss ausüben könnte.

Was aber von der Kraft 2 gilt, gilt auch von jeder andern Kraft. Wir können also durch Vertauschung, jede Kraft an jede beliebige Stelle in der Ordnung der Reihenfolge bringen, ohne dass dies auf das Endresultat: Grösse, Richtung und Lage der Mittelkraft, einen Einfluss ausüben kann.

Die Mittelkraft mehrerer Kräfte in der Ebene ist daher von der Ordnung ihrer Zusammensetzung ganz unabhängig.

Analytisch folgt dies unmittelbar aus:

$$Ss = \Sigma Aa,$$

weil die Reihenfolge, in der die einzelnen Aa zusammengesetzt werden, keinen Einfluss auf die Summe Ss ausüben kann.

46. Aenderung einer Kraft im Seilpolygon.

Wird in einem Seilpolygon, das also eine bestimmte Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte voraussetzt, irgend eine derselben mit einer andern Kraft vertauscht, so werden hierdurch keine der vorausgehenden, allein alle folgenden Mittelkräfte oder Seilpolygonseiten in der Weise verändert, dass sich je zwei entsprechende Polygonseiten auf der Mittelkraftslinie der beiden vertauschten Kräfte schneiden; von denen jedoch die eine in entgegengesetztem Sinne genommen werden muss.

Nehme man z. B. an (Taf. 5_6), es werde die zweite Kraft 2 mit 2_1 vertauscht, was ganz allgemein ist, weil man unter 1 die Mittelkraft aller vorausgegangenen Kräfte verstehen kann: so wird die Seite nach der $n$ten Kraft die Mittelkraft der Kräfte $(1\,2\,3 \ldots . n)$ und $(1\,2_1\,3 \ldots . n)$ in den beiden Polygonen sein. Will man nun direct von der erstern zur zweiten übergehen, so muss man offenbar $(1\,2\,3 \ldots n)$ mit $(-2+2_1)$ zusammensetzen, um $(1\,2_1\,3 \ldots n)$ zu erhalten. Diese drei Kräfte müssen sich daher in einem Punkte schneiden; da aber die Lage von $(-2+2_1)$ für alle Kräftecombinationen dieselbe bleibt, so schneiden sich alle entsprechenden Mittelkräfte auf der Linie, in der die Kraft $(-2+2_1)$ oder was dasselbe ist $(+2-2_1)$ wirkt.

Diese Kraft $(-2+2_1)$ geht natürlich immer durch den Schnitt A (Taf. 5_6) dieser beiden Kräfte und man erhält ihre Richtung mit Umgehung des Kräftepolygons, wenn man von diesem Punkt A aus beide in Richtung und Grösse aufträgt, in der Richtung der dritten Seite $(-2+2_1)$; denn in dem entstandenen kleinen Hülfsdreieck haben die Pfeile von 2 und 2_1 entgegengesetzte Zeichen. Die durch A zu $(-2+2_1)$ parallel laufende

Linie ist also diejenige, auf welcher sich je zwei entsprechende Polygonseiten schneiden.

Trägt man auch im Kräftepolygon (Taf. 5_7) die Kraft 2_1 von 23 an rückwärts die Summe der geänderten Kräfte auf, so ist es klar, dass alle vorausgehenden Eckpunkte und demnach auch die Pole O und O_1 in Länge und Richtung um $(-2+2_1)$ auseinander liegen.

Aus Obigem folgt auch, dass je zwei Seilpolygone, welche dieselbe Reihenfolge von Kräften verbinden, sich auf einer geraden Linie schneiden, welche die Mittelkraftslinie der beiden Kräfte ist, welche in den ersten Polygonseiten wirken, vorausgesetzt, dass die eine in entgegengesetzter Richtung genommen wurde. Man kann daher ganz allgemein sagen:

Je zwei Seilpolygone, welche dieselbe Reihenfolge von Kräften mit einander verbinden, haben eine gerade Linie entsprechend gemein. Man erhält die Richtung und Lage dieser Linie, wenn man alle vorausgehenden oder folgenden nicht gemeinschaftlichen Kräfte des einen Polygons in entgegengesetzter Richtung mit den nicht gemeinschaftlichen Kräften des andern Polygons zusammensetzt.

Dass die beiden Polygone (Taf. $5_{4\,5}$) ebenfalls in diesem Satz mit inbegriffen sind, bedarf wohl kaum der Erinnerung, denn die Kraft 1 ist dort die einzige nicht gemeinschaftliche Kraft der beiden Polygone, mithin müssen sich alle entsprechenden Seiten auf ihr schneiden.

Dieser Satz ist ausserordentlich nützlich; er setzt uns in den Stand, ohne auf das Kräftepolygon zurückzugreifen, ein neues Seilpolygon zu construiren.

Mit Hülfe des Kräftepolygons aber kann jede Polygonseite direct, ohne Bestimmung aller vorausgehenden Polygonseiten construirt werden.

Bei der Construction der Drucklinie eiserner und steinerner Bogen z. B. kann man daher, wenn nur einmal eine solche Linie construirt ist, den Horizontalschub in Grösse und Richtung beliebig ändern und unmittelbar, wie wir später sehen werden, die demselben entsprechende Aenderung der letzten Polygonseiten ermitteln.

Analytisch wollen wir nur den die Vertauschung der Kräfte betreffenden Satz ganz allgemein beweisen, aus diesem Beweis folgen dann die in dieser und der vorigen Nummer aufgestellten Specialsätze von selbst.

Sind $S_i s_i$ und $S_i' s_i'$ die von einander verschiedenen Mittelkräfte, welche den $i+1 \ldots n$ gleichen gemeinsamen Kräften vorausgehen, und

$$S_n s_n = S_i s_i + S_{i..n} s_{i..n},$$
$$S_n' s_n' = S_i' s_i' + S_{i..n} s_{i..n},$$

die Mittelkräfte der n ersten Kräfte, wenn das eine Mal für die i ersten $S_i s_i$ und das andere Mal $S_i' s_i'$ eingeführt wurde, so giebt die Subtraction:

$$S_n s_n - S_n' s_n' = S_i s_i - S_i' s_i'.$$

Da nun $S_i s_i - S_i' s_i'$ für alle n constant, und zwar gleich der Differenz der Mittelkräfte aller nicht gemeinsamen Kräfte ist, wenn dieselben für das eine System in positivem, für das andere in negativem Sinn genommen werden, so schneiden sich s_n und s_n' auf dieser Mittelkraft.

47. Analytische Zusammensetzung von Kräften im Raum, die durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen.

Bei der Zusammensetzung der Kräfte in den vorigen Nummern haben wir vorausgesetzt, dass entweder alle Kräfte durch den Ursprung der Coordinaten gehen, oder dass alle in der Ebene der xy liegen. Der spätern Zusammensetzung der Kräfte im Raum wegen wollen wir nun die erhaltenen Summenformeln so verwandeln, dass sie für jeden Bündel und jede Ebene des Raumes gelten.

Der Natur der Entwickelungen von Nr. 39 S. 164 entsprechend müssen wir annehmen, dass die Coordinaten $l_{41}\ l_{42}\ l_{43}\ 0 = -l_{14}, -l_{24}, -l_{34}, 0$, des unendlich fernen Punktes einer Kraft gegeben seien. Zur vollständigen Bestimmung der Linie bedürfen wir noch der Coordinaten $l_1\ l_2\ l_3\ 1$ eines zweiten Punktes (z. B. des Mittelpunktes des Strahlenbündels) und erhalten jetzt unmittelbar die Linien-Coordinaten (*Fiedler*, Darst. Geom. S. 545) der Kraft mit Berücksichtigung ihres Sinnes, der durch die Zeichen der l_{ik} ausgedrückt ist, nämlich:

$$l_{ik} = -l_{ki} = \begin{vmatrix} l_i & l_k \\ l_{4i} & l_{4k} \end{vmatrix}; \quad l_{ii} = 0.$$

Damit

ein Punkt $xyzu$ in dieser Linie liege,
eine Ebene $\xi\eta\zeta v$ durch diese Linie gehe,

müssen deren Coordinaten bekanntlich den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \quad l_{34}y + l_{42}z + l_{23}u, \quad \text{und} \quad 0 = \quad l_{12}\eta + l_{13}\zeta + l_{14}v, \\
0 &= l_{43}x \quad + l_{14}z + l_{31}u, \quad 0 = l_{21}\xi \quad + l_{23}\zeta + l_{24}v, \\
0 &= l_{24}x + l_{41}y \quad + l_{12}u, \quad 0 = l_{31}\xi + l_{32}\eta \quad + l_{34}v, \\
0 &= l_{32}x + l_{13}y + l_{21}z \quad , \quad 0 = l_{41}\xi + l_{42}\eta + l_{43}\zeta \quad ,
\end{aligned}$$

oder allgemein, wenn mit $ghik$ irgend eine Combination der 4 Zahlen 1 2 3 4 bezeichnet wird, den Gleichungen:

$$0 = l_{ik}x_h + l_{kh}x_i + l_{hi}x_k \qquad 0 = l_{gh}\xi_h + l_{gi}\xi_i + l_{gk}\xi_k$$

genügen, welches die Gleichungen der Projectionsebenen der Linie aus den Axenenden, und ihrer Schnittpunkte mit den Coordinatenebenen sind; damit aber dies möglich sei, muss:

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \end{vmatrix} = (l_{12}l_{34} + l_{13}l_{42} + l_{14}l_{23})^2 = 0.$$

sein.

In diesen Gleichungen haben wir statt der vierten Ordinaten 1, u und v gesetzt, um anzudeuten, dass die Gleichungen und Coordinaten mit beliebigen Coefficienten multiplicirt werden dürfen. Endlich sind die Coordinaten

$\xi'\ \eta'\ \zeta'\ v'$ der Ebene, welche
$x''\ y''\ z''\ u''$ des Punktes, in welchem } die Linie

aus dem festen Punkt $x'\ y'\ z'\ 1$ projicirt,
die feste Ebene $\xi''\ \eta''\ \zeta''\ 1$ schneidet, } durch die Gleichungen:

$$\xi'_g = l_{ik}x'_h + l_{kh}x'_i + l_{hi}x'_k \quad \text{und} \quad x''_g = l_{gh}\xi''_h + l_{gi}\xi''_i + l_{gk}\xi''_k,$$

gegeben. Denn erstens genügen die ξ' und die x'' den eben aufgestellten Gleichungen, was leicht erprobt werden kann, wenn man berücksichtigt, dass $\mathfrak{L} = 0$ ist, und zweitens ist für die Punkte und für die Ebenen:

$$\xi'x' + \eta'y' + \zeta'z' + v' = 0 \quad \text{und} \quad \xi''x'' + \eta''y'' + \zeta''z'' + u'' = 0.$$

Mittelst dieser Werthe ξ'_g und x''_g können schliesslich die Gleichungen der Ebene l' gebildet werden, welche die Linie l aus dem Punkt $(x'\ y'\ z'\ 1)$ projicirt, und des Punktes λ'', in welchem die Ebene $(\xi''\ \eta''\ \zeta''\ 1)$ von l geschnitten wird; nämlich:

$$l' = \xi'x + \eta'y + \zeta'z + v',$$

und

$$\lambda'' = x''\xi + y''\eta + z''\zeta + u''.$$

Dies vorausgeschickt, gehen wir nach Nr. 39 S. 165 zur Bestimmung der Mittelkraft über; die Gleichung des unendlich fernen Punktes der in l wirkenden Kraft A ist:

$$0 = l_{41}\xi + l_{42}\eta + l_{43}\zeta.$$

Der Factor, welcher sie auf die Normalform bringt:

$$e = \sqrt{l^2_{41} + l^2_{42} + l^2_{43} + 2l_{42}l_{43}w_1 + 2l_{43}l_{41}w_2 + 2l_{41}l_{42}w_3}.$$

Demnach die Normalform der Gleichung:

$$\lambda = (l_{41}\xi + l_{42}\eta + l_{43}\zeta)\ \frac{A}{e}.$$

Die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft:

$$\alpha = \Sigma\lambda A,$$

worin sich Σ über die Gleichungen aller zu summirenden Kräfte erstreckt.

Da in dieser Gleichung die l_{i4} nur in der ersten Potenz vorkommen, so sind die Coordinaten a_{i4} des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft:

$$a_{4i} = \Sigma\, l_{4i}\, \frac{A}{e}.$$

Bezeichnet man mit a_1, a_2, a_3 die Coordinaten des festen Mittelpunktes des Strahlenbündels, so hat man offenbar für die übrigen Liniencoordinaten der Mittelkraft:

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ \Sigma \frac{A}{e}\, l_{4i} & \Sigma \frac{A}{e}\, l_{4k} \end{vmatrix} = \Sigma \frac{A}{e} \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ l_{4i} & l_{4k} \end{vmatrix} = \Sigma \frac{A}{e}\, l_{ik}.$$

Wir projiciren jetzt die Richtungslinie der Kräfte und der Mittelkraft aus einem festen Punkt $(x'y'z'1)$ und schneiden sie durch die feste Ebene $(\xi''\eta''\zeta''1)$; wir bezeichnen die Projectionsebene der einzelnen Kräfte mit l' und die der Mittelkraft mit a', und die Schnittpunkte der einzelnen Kräfte mit λ'' und der Mittelkraft mit α''.

Dann ist laut der Formeln im Eingang:

$$a' = \xi' x + \eta' y + \zeta' z + v' = 0; \quad \alpha'' = x''\xi + y''\eta + z''\zeta + u'';$$

worin:

$$\xi'_g = a_{ik}x'_h + a_{kh}x'_i + a_{hi}x'_k, \quad \text{und} \quad x''_g = a_{gh}\xi''_h + a_{gi}\xi''_i + a_{gk}\xi''_k,$$

ist. In diesen Formeln enthält ξ'_g, mithin auch a' die Elemente $\frac{A}{e}\, l_{ik}$ nur im ersten Grad, sie zerfallen daher in die Gleichungen:

$$a' = \Sigma l' \frac{A}{e} \quad \text{und} \quad \alpha'' = \Sigma \lambda'' \frac{A}{e}.$$

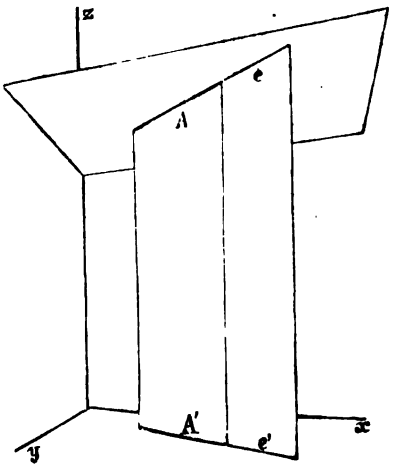
Was wir eben für den Strahlenbündel bewiesen haben, lässt sich auch für die Ebene beweisen (siehe Fig. 99).

Wir projiciren alle in der Ebene wirkenden Kräfte in eine der drei Projectionsebenen, die der xy z. B., setzen sie dort nach den Regeln von Nr. 43 S. 171 zusammen, und projiciren die Mittelkraft in jene Ebene wieder zurück. Es ist dies gestattet, denn bei dem Projiciren bleiben alle Strahlen des Kräftepolygons und des Seilpolygons parallel, die es vorher waren und nachher noch sein sollen.

Die Gleichung der Projection der Linie l in der Ebene xy ist:

$$0 = l_{24}x + l_{41}y + l_{12}.$$

Fig. 99.



zu AO, dann wird der Inhalt einer jeden eine Kraft, z. B. 1 projicirenden Fläche gleich $\frac{1}{2}\overline{AO}$ mal der Projection h_1 dieser Kraft auf die Linie h (Fig. 101) sein, weil h_1 gleich h'_1 der Höhe des projicirenden Dreiecks ist. Nun ist aber Σh (in Fig. 101) $= h_{1\,2\,..\,n}$, mithin auch $\frac{1}{2}\overline{AO}\,\Sigma h = \frac{1}{2}\overline{AO}\,h_{1\,2\,..\,n}$ oder das Moment der Kräfte $1\,2\,..\,n$ ist gleich dem Moment ihrer Mittelkraft $(1\,2\,..\,n)$ bezüglich eines beliebigen, aber für alle Kräfte gleichen Punktes.

Wirken die einzelnen Kräfte nicht auf einen und denselben Punkt, so verbinde man sie alle durch ein Seilpolygon, dann erhält man, von einem Eckpunkt (Taf. 5_4) zum andern übergehend, das Moment der Spannung in 2 3 gleich dem Moment der Kräfte 1 und 2. Das Moment der Spannung in 3 4 gleich dem der Kraft 3 mehr dem der Spannung in 2 3, das gleich ist der Summe der Momente von 1 und 2, mithin ist das Moment der Spannung in 3 4 gleich der Summe der Momente der Kräfte 1 2 3, und so kann man bis zur $n$ten fortfahren.

Gewöhnlich wird das Moment analytisch durch das Product der Kraft P_1 mit ihrer Entfernung p_1 vom Momentenpol (dem sogenannten Hebelarm), also durch $P_1 p_1$ ausgedrückt, wo dann das Moment der Mittelkraft einer beliebigen Zahl Kräfte $= \Sigma P p$ ist. Mitunter wird auch, wenn alle Kräfte auf einen Punkt wirken, statt $P_1 p_1$ das Product $P_1 l_1$ gebildet, wo l_1 die Entfernung des Punktes A (Fig. 100) vom Fusspunkt des Hebelarmes p_1 bezeichnet. Bezüglich dieser Producte gilt natürlich dasselbe Gesetz, denn sie sind nichts anderes als die Momente derselben Kräfte bezüglich eines Punktes O_1, der so liegt, dass OAO_1 ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck ist. Denn dann sind immer die Längen $l_1 l_1$ eben so wie $p_1 p_1$ einander gleich.

Diese Producte P können aber nur dann einen Sinn haben, wenn die Richtung aller Kräfte durch einen Punkt geht, denn nur dann ist der Punkt O_1 vorhanden.

Da das Moment einer beliebigen Zahl Kräfte gleich dem Moment ihrer Mittelkraft ist, so ist es gleich 0 für alle Punkte dieser Mittelkraft, gleich gross für alle Punkte einer Parallelen zur Richtung dieser Mittelkraft, und die absolute Grösse desselben wächst proportional mit der Entfernung dieser Parallelen von der Mittelkraft.

Wenn man in die Normalform $\frac{\omega'}{e}(ax + by + c)$ einer Linie die Coordinaten x und y eines bestimmten Punktes substituirt, so ist das Resultat a der senkrechte Abstand dieses Punktes von der Richtungslinie i. Die Producte Aa, Ss sind daher nichts anderes als das, was man gewöhnlich die Momente der Kräfte bezüglich eines Punktes nennt.

Aus $Ss = \Sigma Aa$ geht demnach hervor, dass das Moment der Mittelkraft S gleich der Summe der Momente der sämmtlichen Seitenkräfte A bezüglich irgend eines Punktes der Ebene sei. Substituirt man insbesondere für x, y, 1 die Coordinaten der Eckpunkte des Coordinatendreiecks 1, 0, 0; 0, 1, 0 und 0, 0, 1, so erhält man:

$$S_{1..n}s_{1..n} = \sum_1^n A_i \frac{a_i}{e_i}\omega' = -Y_{1..n}\omega'$$

$$S_{1..n}s_{1..n} = \sum_1^n A \frac{b_i}{e_i}\omega' = +X_{1..n}\omega'$$

$$S_{1..n}s_{1..n} = \sum_1^n A \frac{c_i}{e_i}\omega' = +\Sigma A_i p_i,$$

wo p_i den Perpendikel vom Ursprung auf die Linie i bezeichnet. Die beiden ersten Formeln bedeuten, dass die mit den Axen parallelen Seitenkräfte der Mittelkraft gleich der Summe der entsprechenden Seitenkräfte aller zusammenzusetzenden Kräfte ist; die letzte drückt die Momentengleichheit bezüglich des Ursprungs aus. Es sind dies die gewöhnlichen Gleichungen, welche zur Zusammensetzung der Kräfte dienen, und man sieht, dass sie in der allgemeinen Summenformel enthalten sind und derselben durch Substitution besonderer Werthe für x und y entspringen.

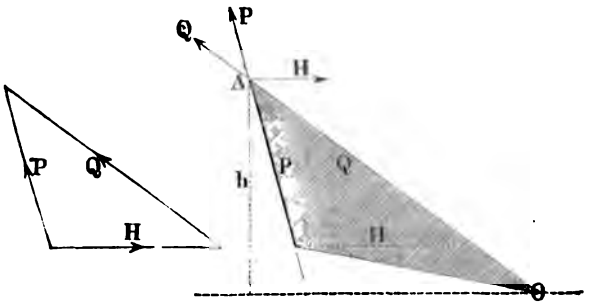
49. Graphische Bestimmung der Momente.

Die Bestimmung der Grösse der Momente geschieht am zweckmässigsten durch Verwandlung der sie darstellenden Flächen, und wir hätten hier dem in Nr. 15 (S. 86) Gesagten nichts weiter beizufügen, wenn es nicht möglich wäre, diesen oder doch ähnlichen Constructionen einen mehr statischen Sinn, wenn wir uns so ausdrücken dürfen, unterzulegen.

Wie wir bei Verwandlung der Flächen alle auf eine bestimmte constante Basis verwandelt haben, um Linien zu erhalten, welche diesen Flächen proportional sind, so wollen wir auch bei Bestimmung der Momente, diese auf eine constante Kraft von H einer runden Zahl Gewichtseinheiten so reduciren, dass wir am Hebelarm h dieser Kraft, direct das Moment Hh ablesen können.

Da nun das Moment einer jeden Kraft, die durch den gegebenen Momentenpol geht, = 0 ist, so gelangt man sehr leicht zu dem Hebelarm h, wenn man die gegebene Kraft P im Kräftepolygon (Fig. 102 und 103) in zwei Seitenkräfte zerlegt, wovon

Fig. 102. Fig. 103.



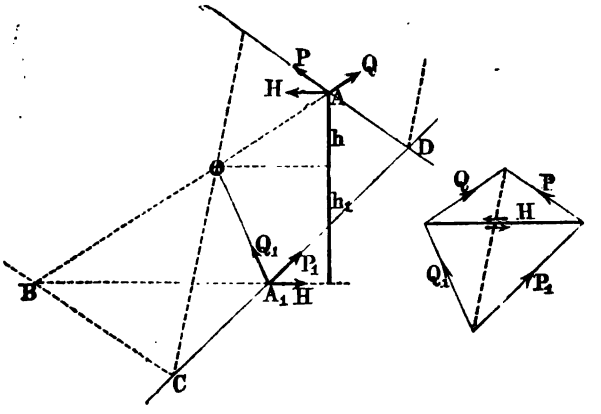
die eine dem in Richtung und Grösse gegebenen H gleich ist, wodurch dann auch die andere Q bestimmt ist. Zieht man nun durch den gegebenen Pol O (Fig. 103) eine Parallele OA zu Q und denkt man sich die Zerlegung von P in dem Schnittpunkt A mit der Parallelen vorgenommen, so wird die Kraft Q durch den Pol O gehen und das Moment von P dem von H gleich sein; der Perpendikel h' (der nicht immer ausgezogen zu werden braucht) vom Punkt A auf eine durch O laufende Parallellinie zu H, ist der gesuchte Hebelarm. Um zu zeigen, dass diese ganze Operation nichts anderes als eine Flächenverwandlung war, haben wir das Dreieck PQH auch in die Fig. 103 eingetragen, und man sieht auf den ersten Blick, dass Hh der doppelte Inhalt der schraffirten Momentenfläche ist.

Hier müssen wir bemerken, dass der Sinn der Fläche nicht aus der Lage von h, sondern nur aus den Pfeilen von P und H, welche immer eine in demselben Sinn umfahrene Momentenfläche geben, entnommen werden kann. Da alle Momentendreiecke einen ihrer Eckpunkte im Pol O haben, so muss der Sinn der Fläche immer mit dem Sinn der Drehung der Kraft um den Punkt O zusammenfallen.

Wenden wir das eben Entwickelte noch auf die Bestimmung des Momentes zweier Kräfte, unter denen wir uns z. B. die Spannungen zweier äussersten Seilpolygonseiten als Mittelkräfte der

zwischen ihnen wirkenden Kräfte denken können, an. Es sei O (Fig. 104) der Momentenpol (siehe noch das Kräftepolygon Fig. 105), P und P_1 die Kräfte, deren Momente bestimmt werden

Fig. 104. Fig. 105.



sollen, endlich H die Kräftebasis, auf welche sie zu reduciren sind. Dann zeigt Fig. 105 die Zerlegung der Kräfte P in H und Q, und P_1 in H und Q_1, und man erhält die Punkte A und A_1 (Fig. 104), in welchen die Zerlegung, wie angedeutet ist, stattzufinden hat, indem OA und OA_1 parallel zu Q und Q_1 (in Fig. 105) gezogen werden und die Perpendikel h und h_1 auf die durch O gezogenen Parallelen zu H sind die gesuchten Hebelarme. Sie addiren sich, weil beide Kräfte P und P_1 eben so wie beide H in demselben Sinn um O drehen. Die ganze stark ausgezogene Linie $h + h_1$ multiplicirt mit H, ist daher dem Moment der beiden Kräfte P und P_1 gleich.

Bewegt sich der Momentenpol auf einer zur Mittelkraft von P und P_1 parallelen Linie OC, so ändert sich $h + h_1$ nicht, denn verlängert man AO bis B, bis zu einer durch C gehenden Parallelen BC zu P, so sind A_1B und H immer parallel als sechste Seiten der beiden Vierecke OA_1CB (Fig. 104) und PP_1Q_1Q (Fig. 105), von denen schon 2 Mal 2 gegenüberliegenden und die fünften Seiten parallel laufen; $h + h_1$ ist daher immer die auf H senkrecht stehende Projection der zwischen zwei Parallelen parallel zu sich selbst sich bewegenden und desshalb gleich lang bleibenden Linie AB. Nähert sich O und mit O auch die Gerade OC dem Schnitt-

punkt D der beiden Kräfte P und P_1, d. h. ihrer Mittelkraft, so bleibt sich doch stets das Gebilde $OADA_1$ $(h + h_1)$ ähnlich und $h + h_1$ ändert sich proportional der Entfernung des Punktes D von O oder OC. Die Länge $h + h_1$ wird $= 0$, wenn OC durch D geht.

Wir haben zwar (Nr. 48 S. 181) das eben Gesagte schon einmal ausgesprochen und bewiesen, doch glaubten wir die Richtigkeit der Construction durch Fig. 104 auch noch geometrisch nachweisen zu sollen, weil wir dieselbe später noch benutzen werden.

Sind die Momente sehr vieler Kräfte, die man gerade nicht durch ein Seilpolygon zu verbinden gedenkt, zu reduciren, so kann auch folgende Construction mit Vortheil angewendet werden.

Man beschreibe von dem Pol (Taf. 7) als Centrum einen Kreis mit $H = r$ als Halbmesser, der so gross anzunehmen ist, dass er die Richtungslinie aller Kräfte schneidet, deren Moment zu bestimmen ist. Betrachtet man dann H als Basis aller einzelnen Momentendreiecke, so sind die Antiprojectionen h_1, h_2..... der einzelnen Kräfte senkrecht zu diesem H gleich den gesuchten Hebelarmen, durch deren Addition man das Totalmoment erhalten kann.

Flächen sind Producte von zwei in jeder Beziehung homogenen Linien, dies ist bei Momenten nicht mehr der Fall; sie sind das Product einer Kraft und einer Linie, zwei vollkommen heterogenen Elementen, und man könnte fragen, ob es gestattet sein kann, sie, so wie wir es gethan haben, zu verwandeln, als ob sie ganz homogen zusammengesetzt wären. Diese Frage muss unbedingt bejaht werden. Die Fläche an und für sich als das Moment repräsentirend, muss als etwas ganz Gleichartiges betrachtet werden. Die Kilogrammmeter z. B., die man erhalten hat, sind weder Kilogramm noch Meter, sondern eben Kilogrammmeter, das Product beider, und ebenso wie dieses verwandelt werden kann, muss auch die dieses Product darstellende Fläche verwandelt werden können, vorausgesetzt nur: dass sie durch Multiplication beider, d. h. dadurch entstanden sei, dass eine ihrer Dimensionen ursprünglich eine Kraft und die andere eine Linie war. Man kann also die Fläche eben so gut verwandeln, als man das Moment einer Kraft von 4 Kilogr. an einem Hebelarm von 15 Metern, dem einer Kraft von 10 Kilogr. an einem Hebelarm von 6 Metern gleichsetzen kann. Auch kann man stets den Hebelarm

mit der Kraft eben so gut vertauschen, als man im eben citirten Beispiel auch eine Kraft von 6 Kilogr. an einem Hebelarm von 10 Metern annehmen darf. Nur muss stets, wenn eine der Linien, in die man die Momentenfläche zerlegt hat, auf dem Maassstab der Linien abgegriffen wurde, die andere senkrecht darauf stehende auf demselben Maassstab der Kräfte abgegriffen werden, in welchem die Kräfte aufgetragen wurden, die zur ursprünglichen Bildung der Momente dienten.

Die Constructionen, die zur Reduction der Momente auf einen Hebelarm von einer runden Zahl Längeneinheiten dienten, sind daher genau dieselben als diejenigen, welche zur Reduction derselben auf eine Kraft von einer runden Zahl Gewichtseinheiten dienten. Wäre z. B. (in Fig. 105) H gleich einer runden Zahl Längeneinheiten, so könnte man $h + h_1$ auf dem Maassstab der Kräfte ablesen, und als am Hebelarm H wirkend betrachten.

50. Unendlich ferne und kleine Kräfte.

Wenn zwei Seilpolygonseiten parallel laufen, so liegt ihr Schnitt im Unendlichen und ihre Richtung ist jedenfalls auch die der Mittelkraft der zwischen ihnen wirkenden Kräfte. Auf Taf. 5_4 z. B. laufen die Polygonseiten 4 5 und 9 10 parallel, hierdurch ist der unendlich ferne Punkt der Mittelkraft von (5 6 7 8 9) d. h. ihre Richtung gegeben, allein die Lage der Kraft ist noch unbestimmt. Um sie zu bestimmen, hat man nur dieselben Kräfte durch irgend ein anderes Seilpolygon $4_1\,5_1\,6_1\,7_1\,8_1\,9_1\,10_1$ zu verbinden, dessen entsprechender Pol O_1 im Kräftepolygon (Taf. 5_5) nicht auf dem zu den parallelen Seilpolygonseiten parallelen Strahl O (5 4) (9 10) liegt, um durch Verlängerung und Schnitt der äussersten Seilpolygonseiten $4_1\,5_1$ und $9_1\,10_1$ (Taf. 5_4) einen Punkt der Mittelkraft (5 6 7 8 9) zu erhalten, deren Richtung und Lage somit bekannt ist. Sollte die Mittelkraft ganz im Unendlichen liegen, so müssten auch die Seiten $4_1\,5_1$ und $9_1\,10_1$ parallel laufen, dann ginge die Mittelkraft nicht allein durch den unendlich fernen Punkt der Polygonseite 4 5, sondern auch durch den der Seite $4_1\,5_1$ und läge demnach ganz im Unendlichen. Damit aber dies eintreffe, müssten nicht allein die Strahlen O (4 5) und O (9 10) (Taf. 5_5), sondern auch die Strahlen O_1 (4 5) und O_1 (9 10) im Kräftepolygon zu-

sammenfallen. Dies findet aber nur dann statt, wenn die Punkte (4 5) und (9 10) selbst zusammenfallen, d. h. wenn die Grösse der Mittelkraft (5 6 7 8 9) = 0 oder besser gesagt, unendlich klein ist.

Diese unendlich fernen und kleinen Kräfte mit endlichen Kräften in endlicher Entfernung zusammengesetzt, können, wie aus dem Kräftepolygon hervorgeht, zwar die Grösse der Mittelkraft nicht ändern, aber wie aus dem Seilpolygon hervorgeht, deren Lage. Setzt man z. B. die beiden parallelen, aber in entgegengesetzter Richtung wirkenden gleichen Kräfte 6 und 7, die ein Kräftepaar genannt werden und die der einfachste Ausdruck einer unendlich fernen und kleinen Kraft sind, mit der Kraft (1 2 3 4 5) zusammen, deren Richtung und Lage 5 6 ist, so verschiebt sich diese letztere nach 7 8, ebenso verschiebt sich die Lage der Kraft (2 3 4 5) in Folge der Zusammensetzung mit demselben Kräftepaar 6 7, von 5_1 6_1 parallel zu sich selbst nach 7_1 8_1.

Hieraus geht also hervor, dass unendlich kleine und ferne Kräfte Grössen gleicher Ordnung als wie endliche Kräfte in endlicher Entfernung sind und mit diesen zusammengesetzt werden können. Endliche Kräfte in unendlicher Entfernung sind unendlich grosse Grössen, die mit endlichen Kräften nicht mehr zusammengesetzt werden können, denn wenn eine unendlich kleine und ferne Kraft die Mittelkraft (2 ... 5) um ein Endliches verrückt, so würde diese durch eine unendlich ferne endliche Kraft ins Unendliche verrückt und die Zusammensetzung wäre unmöglich. Ebenso klar ist es auch, dass eine unendlich kleine Kraft in endlicher Entfernung, die Lage einer endlichen Mittelkraft nicht mehr ändern kann, und als unendlich kleine Grösse niedrigerer Ordnung vernachlässigt werden kann. Um unendlich kleine und ferne Kräfte direct zusammensetzen zu können, fehlt nichts mehr als ihr Maass.

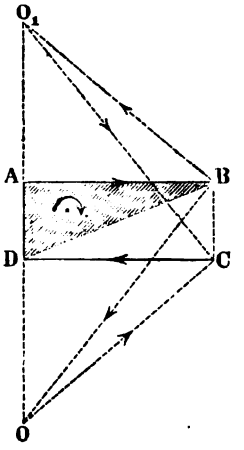
51. Das Maass unendlich kleiner und ferner Kräfte.

Da alle Kräfte, welche in einer und derselben geraden Linie wirken, ihren Momenten, in Bezug auf irgend einen Pol proportional sind, so sind auch die in der unendlich fernen Geraden wirkenden Kräfte ihren Momenten in Bezug auf irgend einen Pol proportional. Da ferner durch die Aenderung der Lage des Poles

in der Endlichkeit, nur verschwindend kleine Aenderungen am Hebelarm der unendlich fernen Kräfte hervorgebracht werden, so ist das Moment der unendlich fernen Kräfte constant für alle Pole in der Endlichkeit. Wir dürfen daher, so lange wir nur in der Endlichkeit construiren, das Moment der unendlich fernen Kräfte als ihr Maass annehmen. Die wirkliche Grösse dieser Kräfte ist jedoch immer nur gleich diesem Moment, getheilt durch ihren constanten aber unendlich langen Hebelarm.

Dass das Moment aller ∞ kl. Kräfte constant sei, lässt sich leicht an einem Kräftepaar erproben. So ist z. B. das halbe Moment der beiden parallelen, aber in entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte (Fig. 106), gleich der Differenz der beiden Dreiecke OAB und ODC oder der Figur $ABOCDA$ = dem Dreieck ABD. Der Inhalt dieses letzteren ist aber von der Lage des Poles O ganz unabhängig, und sein doppelter Inhalt gleich der einen Kraft AB multiplicirt mit der senkrechten Entfernung der andern als Hebelarm. Dasselbe gilt nothwendiger Weise auch von Momentensummen beliebiger anderer Kräfte, deren Mittelkraft = 0 ist. Da unter der Grösse einer solchen Momentensumme auch ihr Zeichen inbegriffen ist, so folgt, dass auch die Momentenflächen solcher Kräfte mit der Mittelkraft 0 stets in demselben Sinn umfahren werden, und dass daher der Drehungssinn solcher unendlich fernen Kräfte stets derselbe sei. Die Momentenfläche des Kräftepaares (Fig. 106), ist dieselbe, wenn auch der Pol O auf die andere Seite des Paares nach O_1 versetzt würde, die Fläche ist in demselben vom Pfeil angedeuteten Sinn umfahren, und das Paar dreht in demselben Sinn um O_1 als wie um O.

Fig. 106.



Analytisch wird die ∞ ferne Kraft dadurch angezeigt, dass die Coefficienten von x und y in Ss gleich 0 werden. Ss reducirt sich dann auf $\Sigma \frac{A}{e} c\omega'$, das Moment, welches auch das Maass der ∞ fernen Kraft ist.

52. Zusammensetzung der unendlich fernen und kleinen Kräfte in der Ebene.

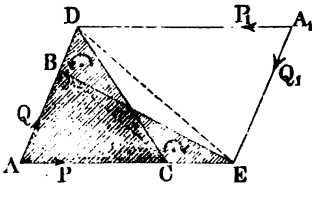
Da die unendlich ferne Linie in der Ebene eine Gerade ist, so addiren sich einfach die in derselben wirkenden unendlich fernen Kräfte.

Das stimmt vollkommen damit überein, was Nr. 48 S. 181 bewiesen wurde, dass die Momente mehrerer beliebiger, also auch unendlich ferner Kräfte sich bei Bildung einer Mittelkraft einfach addiren.

Ferner geht hieraus hervor, dass zwei Kräftepaare von gleichen aber entgegengesetzten Momenten sich aufheben, weil die Summe der unendlich fernen Kräfte, durch die sie dargestellt werden, $= 0$ ist.

Es lässt sich dies auch leicht direct geometrisch beweisen. Sind die schraffirten Momentendreiecke der beiden bis zu ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten verlängerten Kräftepaare PP_1 und QQ_1 (Fig. 107) gleich gross und entgegengesetzten Sinnes, so laufen BC und DE parallel, P und Q verhalten sich daher wie AE und AD, wie die Seiten des Parallelogramms ADA_1E, die Mittelkraft von P und Q fällt dann mit der Diagonale desselben zusammen, ebenso die gleich grosse, aber entgegengesetzt wirkende Mittelkraft von P_1 und Q_1 und beide heben sich gegenseitig auf.

Fig. 107.

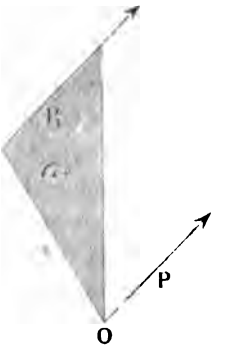


Genau auf die gleiche Weise wird auch der allgemeine Satz bewiesen: wenn zwei Kräftepaare im Gleichgewicht sind, so verhalten sich die Kräfte, welche sie zusammensetzen, wie die Seiten des Parallelogramms, das ihre Richtungslinien bilden.

Sind unendlich ferne und kleine Kräfte als Mittelkräfte zweier oder mehrerer andern Kräfte gegeben, so kann man sie einfach durch Verbindung mittelst eines Seilpolygons mit andern Kräften zusammensetzen, wie es z. B. in Nr. 44 S. 173 Taf. 5_4 gezeigt ist, wo das Kräftepaar 6 7 mit den Mittelkräften (1 2 ... 5) und (2 3 ... 5) zusammengesetzt wurde.

Sind die unendlich fernen Kräfte durch ihre Momentenfläche, ihr Maass gegeben, und mit endlichen Kräften zusammenzusetzen, so hat man die Mittelkraft dieser letztern einfach um so viel zu versetzen, dass sich ihr Moment, in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene, um die gegebene Momentenfläche der unendlich fernen Kraft ändert. Denn durch die unendlich kleine Kraft kann weder die Richtung noch die Grösse der endlichen Mittelkraft verändert werden, und nur ihr Moment ändert sich um das der unendlich fernen Kraft. Denkt man sich zum Zweck dieser Versetzung den Momentenpol auf der Richtungslinie P der Mittelkraft selbst in O (Fig. 108), so versetzt sich dieselbe bei der Zusammensetzung mit einer unendlich fernen Kraft um so weit nach P_1, dass die schraffirte Momentenfläche in Sinn und Inhalt gleich der der unendlich fernen Kraft werde. Und umgekehrt kann man jede Kraft P in eine gleich grosse, in beliebiger Entfernung parallel zu ihr wirkende Kraft P_1 und eine unendlich ferne Kraft zerlegen, deren Momentenfläche der negativen schraffirten Fläche gleich wäre.

Fig. 108.



Wäre eine, nur durch ihr Moment gegebene unendlich ferne Kraft in ein Seilpolygon einzuschalten, so würde bezüglich der Polygonseite, nach der sie folgen soll, genau dasselbe gelten, was eben über die einzelne Kraft P gesagt wurde; z. B. wäre statt des Kräftepaares 6 und 7 (in Taf. 5_4) die schraffirte Momentenfläche desselben als Dreieck gegeben, dessen Höhe h gleich der Entfernung und dessen Basis gleich einer der Kräfte 6, 7 und dessen Sinn durch den Pfeil angedeutet ist, so hätte man nur dieses Dreieck auf die Basis (1...5) zu verwandeln, um einen Punkt der Kraft (1...7) zu erhalten. Wären dann die Linien 6, 7 und (6 7) nicht vorhanden, so dürfte man sich das Seilpolygon bei 5 nicht abgebrochen, sondern dort in's Unendliche und zurück nach 7 8 gehend denken, was durch eine Klammer angedeutet werden könnte.

53. Das Gleichgewicht von Kräften in der Ebene.

Wir können nun die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte ganz allgemein wie folgt ausdrücken; dabei werden wir uns unter einer unendlich fernen Kraft, die = 0 ist, eine solche denken deren Moment = 0 ist.

Eine beliebige Zahl Kräfte ist im Gleichgewicht, wenn ihre Mittelkraft = 0 ist.

Die Kräfte sind hier im allgemeinsten Sinn genommen, sie können endliche und unendlich ferne Kräfte sein; und dürfen also auch keine unendlich ferne Mittelkraft haben.

Sind Kräfte nicht im Gleichgewicht, so kann dieses immer durch die umgekehrte Mittelkraft, d. h. durch die Kraft hergestellt werden, durch welche die Mittelkraft des ganzen Kräfte-Systems auf 0 reducirt wird.

Besondere Fälle sind nun folgende:

Wirken mehrere Kräfte in einer geraden Linie oder fallen mehrere Mittelkräfte verschiedener Systeme mit einer geraden Linie zusammen, so kann das Gleichgewicht, wenn es nicht vorhanden sein sollte, nur durch eine Kraft hergestellt werden, deren Richtung mit derselben Linie zusammenfällt.

Dieser Satz ist auch von der unendlich fernen Geraden gültig, also kann das Gleichgewicht mehrerer Kräftepaare, oder überhaupt Kräftesysteme, deren Mittellinien alle in der unendlich fernen Geraden liegen, nur durch eine unendlich ferne Kraft hergestellt werden. Haben alle in der Endlichkeit liegenden Kräfte eine endliche Mittelkraft, so bleibt diese endlich, wie viele unendlich ferne und kleine Kräfte damit auch verbunden werden mögen.

Werden mehrere Kräfte in der Art durch ein Seilpolygon mit einander verbunden, dass, wie in Taf. 5_4, die erste Kraft 1 als Polygonseite benutzt wird, so sind die sämmtlichen, hier 10, Kräfte im Gleichgewicht, wenn die Mittelkraft im Kräftepolygon = 0 ist, und wenn die Richtung der letzten Polygonseite mit der Richtung der letzten Kraft 10 zusammenfällt. Ist diess nicht der Fall, so kann das Gleichgewicht durch eine in der letzten Polygonseite wirkende und durch das Kräftepolygon gegebene Kraft hergestellt werden.

Mehrere an einem Seilpolygon wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die erste und letzte Seite sich auf der letzten in das Seilpolygon noch nicht eingeflochtenen Seite schneiden, und die Summe aller = 0 ist. Denkt man sich z. B. eine Mittelkraft (5...9) (Taf. 5_4) in entgegengesetzter Richtung wirkend, so ist also — (5 6...9) mit den Kräften 5 6 7 8 und 9 im Gleichgewicht, was sich dadurch zeigt, dass das Polygon 5_1 6_1 7_1 8_1 9_1 — (5 6 ... 8 9) 5_1 geschlossen erscheint; dass die Summe dieser Kräfte im Kräftepolygon ebenfalls = 0 sein muss, versteht sich von selbst. Im andern der Taf. 5_4 verzeichneten Polygone erscheint das Polygon der entsprechenden Kräfte nicht minder geschlossen, nur liegt der Punkt — (5 6...8 9) im Unendlichen, bezeichnet man diesen auch in der Richtung 4 5 und 9 10 liegenden Punkt mit ∞, so ist das geschlossene Polygon (∞ 4 5) 5 6 7 8 (9 10 ∞), wo ∞ 4 5 und 9 10 ∞ parallele Polygonseiten sind, die sich in ∞ schneiden. Denkt man sich auch noch das Kräftepaar 6 7 durch seine unendliche ferne Kraft ersetzt, so geht dieses Polygon zweimal durchs Unendliche, ohne dass dadurch die Lage eines Eckpunktes oder einer Polygonseite an Bestimmtheit verliert. Umgekehrt kann durch Schluss des Seilpolygons und Kräftepolygons das Gleichgewicht wieder hergestellt werden, indem man im Schnitt der ersten und letzten Polygonseite die Schlusskraft des Kräftepolygons anbringt.

Dieser Schluss kann auch durch zwei und mehrere Kräfte bewirkt werden, in die man sich eben die Mittelkraft zerlegt zu denken hat.

Die bis jetzt bewiesenen Sätze gelten auch allgemein von Mittelkräften solcher Gruppen, in die man die einzelnen Kräfte zusammengefasst hat. Sind also beliebige Kräfte im Gleichgewicht, so sind es auch noch die Mittelkräfte der Gruppen, in die man sie zerlegt hat.

Bildet man insbesondere zwei Gruppen, so muss die Mittelkraft der einen, der Mittelkraft der andern entgegengesetzt gleich sein. Es ist dieser Satz nur eine Verallgemeinerung des als selbstverständlich angenommenen Satzes: dass wenn mehrere Kräfte im Gleichgewicht sind, jede derselben die entgegengesetzte Mittelkraft aller andern sei.

Bildet man drei Gruppen, so müssen sich die Mittelkräfte der-

selben in einem Punkte schneiden und jede dieser letztern muss wieder der Mittelkraft der beiden andern entgegengesetzt gleich sein.

Bildet man vier Gruppen, so müssen die Mittelkräfte je zweier derselben den der beiden andern entgegengesetzt gleich sein.

Befindet sich unter diesen Kräften eine unendlich ferne, so muss sich auch die Mittelkraft aller übrigen auf eine unendlich ferne Kraft reduciren.

Auch aus der Summenformel, welche für das Gleichgewicht die Form $Ss = 0$ annimmt, ergeben sich unmittelbar die obigen Sätze.

Sollen zwei Kräfte im Gleichgewicht sein, so müssen alle Coefficienten ihrer Normalgleichung entgegengesetzt gleich sein, worin der Satz enthalten ist, dass die Richtungslinien beider Kräfte zusammenfallen müssen. Dasselbe galt auch von den Mittelkräften zweier Gruppen in die man eine grössere Zahl im Gleichgewicht befindlicher Kräfte zerlegt hat.

Das Gleichgewicht von drei Kräften oder von Mittelkräften dreier Gruppen, ist durch die Gleichung ausgedrückt:

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0.$$

Wenn aber die Summe der Gleichungen a dreier Linien durch die Multiplication mit drei Coefficienten A auf 0 gebracht werden kann so schneiden sie sich in einem Punkt.

Alle Sätze über die Gruppeneintheilung ergeben sich aus der algebraischen Form der Gleichung $\Sigma Aa = 0$. Theilt man die einzelnen Aa in beliebige Gruppen, und bringt eine beliebige Zahl derselben mit dem negativen Zeichen auf die andere Seite, so folgt, dass die Mittelkräfte dieser Gruppen entgegengesetzt gleich sein müssen.

54. Zusammensetzung der Kräfte mit Hülfe der unendlich fernen Kräfte.

Man kann nach 52 S. 191 jede Kraft in eine gleichgrosse parallele Kraft, die durch einen bestimmten Punkt O geht, und in eine unendlich ferne Kraft zerlegen; vollzieht man diese Zerlegung mit allen vorhandenen Kräften, so erhält man mittelst eines Kräftepolygons allein die Richtung und Grösse aller auf diesen Punkt O wirkenden Kräfte. Die unendlich fernen Kräfte addiren sich einfach zu einer einzigen unendlich fernen Kraft. Setzt man dann diese mit der Mittelkraft der auf O wirkenden Kräfte zusammen, so erhält man die Mittelkraft aller Kräfte.

Auf diese Weise kann man ohne Hülfe des Seilpolygons Kräfte zusammensetzen; in der Ebene ist wohl immer das Seilpolygon

(das Kräftepolygon ist bei keiner Methode entbehrlich) das einfachste Mittel um zur Lage der Mittelkraft mehrer Kräfte zu gelangen.

Wir wollen diese Methode hier noch auf die Zusammensetzung paralleler Kräfte anwenden. In diesem Fall besteht das Kräftepolygon aus einer geraden Linie, weil alle Kräfte gleiche Richtung haben, und die Mittelkraft R derselben ist offenbar gleich ihrer Summe, also $R = \Sigma A$ wenn man die einzelnen Kräfte mit A bezeichnet. Zerlegt man nun jede Kraft A in zwei Seitenkräfte, von denen die eine durch einen angenommenen festen Punkt geht, die andere im Unendlichen liegt, so ist das Maass dieser letztern gleich dem Moment Aa, und die Summe $\mathfrak{R}$ aller dieser unendlich fernen Kräfte ist gleich $\mathfrak{R} = \Sigma Aa$, wenn mit a die Perpendikel vom festen Punkt auf die Richtungslinien der einzelnen Kräfte bezeichnet werden. Die Momente sind natürlicher Weise positiv oder negativ je nachdem sie in positivem oder negativem Sinne um den festen Punkt herumdrehen.

Setzt man jetzt wieder die unendlich ferne Kraft $\mathfrak{R}$ mit der endlichen R die durch den festen Punkt geht, zusammen, so wird die Grösse der Kraft R bleiben, und ihre Entfernung r vom festen Punkt, wird gleich:

$$r = \frac{\mathfrak{R}}{R} = \frac{\Sigma Aa}{\Sigma A}$$

Diese algebraisch angedeuteten Operationen werden, wenn die Zahl der Kräfte grösser als 2 ist, am zweckmässigsten mittelst des Seilpolygons nach Nr. 42 S. 169 ausgeführt; wir werden später in einem speciell den parallelen Kräften gewidmeten Kapitel auf dieselben zurückkommen, und wollen hier nur noch einige allgemeine Sätze erörtern.

Wird $\mathfrak{R}$ und $R = 0$ so ist das System im Gleichgewicht, ist $\mathfrak{R}$ allein $= 0$, so muss $r = 0$ sein und der angenommene feste Punkt liegt auf der Mittelkraft R, ist R allein gleich 0, so reducirt sich das System auf eine unendlich ferne Kraft; ganz wie bei dem Gleichgewicht im Allgemeinen.

Bei parallelen Kräften fallen alle Perpendikel vom festen Punkt auf die Kräfte in eine gerade Linie zusammen. Schneidet man nun die Kräfte durch irgend eine schiefe Linie, so sind die Segmente den Perpendikeln proportional, und es würden die obigen Bedingungsgleichungen auch für diesen Fall noch gültig

bleiben, weil eben alle Glieder einen Perpendikel in der ersten Potenz enthalten. Gelten diese Beziehungen aber für jede Richtung der Kraft, so wird, wenn man parallele Kräfte um ihre Angriffspunkte in einer geraden Linie dreht, sich auch ihre Mittelkraft um einen festen Punkt in dieser geraden drehen. Dieser Satz gilt aber nicht nur, wenn die Angriffspunkte der Kräfte in einer geraden Linie, sondern auch dann, wenn sie in der Ebene oder im Raum liegen, was im nächsten Kapitel ganz allgemein bewiesen werden soll.

Dieser Punkt, um welchen sich die Mittelkraft der parallelen Kräfte dreht, heisst der Mittelpunkt derselben. Indem man so spricht, wird die Richtungslinie der parallelen Kräfte von deren Angriffspunkten ganz getrennt, man denkt sich dabei diese letztern mit der Grösse der Kraft allein behaftet, oder beschwert wie der technische Ausdruck lautet, und kann dann mittelst der Punkte und ihrer Gewichte den Mittelpunkt bestimmen.

Unter den Momenten der so beschwerten Punkte versteht man das Product der an ihnen wirkenden Kräfte (Gewichte) mit der in beliebiger Richtung gemessenen Entfernung von einer bestimmten Linie, wenn sie in einer Ebene wirken, von einer Ebene wenn sie im Raum wirken.

Schneidet man eine beliebige Anzahl Kräfte in der Ebene durch eine gerade Linie, und denkt man sich die Durchschnittspunkte mit Gewichten belastet, die den Erhebungen der von der geraden Linie aus aufgetragenen Kräfte über der geraden Linie proportional sind: so geht die Mittelkraft durch den Mittelpunkt der so belasteten Angriffspunkte, und wenn auch sie von der geraden Linie aus aufgetragen wird, so erhebt sie sich um die Summe aller Erhebungen der einzelnen Kräfte über die gerade Linie.

Denn zerlegt man alle Kräfte A im Schnitt mit der geraden Linie in eine Seitenkraft nach der Richtung dieser Linie und in eine andere Seitenkraft H nach irgend einem unendlich fernen Punkt, so werden diese letztern den Erhebungen der Kräfte über die gerade Linie proportional sein. Die Mittelkraft aller dieser parallelen Kräfte ist daher gleich ΣH und geht durch den Mittelpunkt der mit H belasteten Schnittpunkte; mithin auch die Mittel-

kraft aller Kräfte die aus der Zusammensetzung von ΣH mit der Summe der in der geraden Linie wirkenden Kräfte in jenem Punkt entsteht. Ihre Erhebung über der geraden Linie ist ΣH proportional und kann daher wie die der einzelnen H in jeder Richtung gemessen werden.

Wir wollen das Obige auf die Zusammensetzung zweier, oder auf das Gleichgewicht von drei parallelen Kräften, deren jede als die entgegengesetzte Mittelkraft der beiden andern betrachtet werden kann, anwenden. Der Ausdruck dieses Gleichgewichts ist:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$
$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0,$$

woraus sich unmittelbar durch Elimination eines der drei A die zwei Gleichungen:

$$\frac{A_1}{a_2 - a_3} = \frac{A_2}{a_3 - a_1} = \frac{A_3}{a_1 - a_2}$$

ergeben. In diesen Gleichungen bezeichnen die a die Entfernungen der Schnittpunkte dieser Kräfte A mit einer geraden Linie, von irgend einer andern geraden Linie.

Da nur drei Kräfte vorhanden sind, so müssen nothwendiger Weise zwei derselben gleiche Zeichen, und die dritte das entgegengesetzte haben, und diese letztere Kraft muss der Summe der beiden andern gleich sein.

Dasselbe gilt auch von den Momenten, wird insbesondere eines der drei a gleich 0 gesetzt, so haben die beiden andern entgegengesetzte Zeichen, d. h.: Zwei der Kräfte drehen in entgegengesetztem Sinn um einen Punkt der dritten. Hieraus geht hervor, dass der Angriffspunkt der grösseren Kraft immer zwischen den der entgegengesetzt wirkenden beiden kleinern liegen muss.

Jede der drei Kräfte ist der Entfernung der beiden andern proportional.

Wird eine der Kräfte als entgegengesetzte Mittelkraft der beiden andern aufgefasst, so liegt sie zwischen denselben, wenn sie gleichen Sinn haben. Jenseits der grössern aber wenn sie entgegengesetzten Sinn haben.

Die analytischen Beweise dieser Sätze weichen von den obigen nicht ab, man hat sich dann unter den a die Normalgleichungen der Linien, die nur im constanten Glied von einander abweichen, zu denken.

Eigentlich sollte jetzt hier noch die Zusammensetzung der Kräfte in der unendlich fernen Ebene behandelt werden; da jedoch die auszuführenden Operationen räumlicher Natur sind, so werden wir sie im nächsten Kapitel bei der Zusammensetzung der Kräfte im Raum vornehmen.

55. Die Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

In der Praxis ist in der Regel die Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte mit der der Zerlegung verbunden. Es handelt sich z. B. darum die Mittelkraft mehrerer Kräfte (Belastungen) zu bestimmen, und diese dann in mehrere Seitenkräfte (Reactionen) zu zerlegen, welche durch bestimmte Punkte (Pfeiler und Widerlager) gehen. Oder auch darum: die ausserhalb des Schnittes einer Construction wirkenden äussern Kräfte zusammenzusetzen und dann nach der Richtung der verschiedenen Constructionstheile zu zerlegen.

Bei Zerlegungen kann eine Kraft in nicht weniger als 2 Seitenkräfte zerlegt werden. Diese Zerlegung kommt häufig in der Praxis vor, es sind z. B. die beiden Richtungslinien, nach welchen eine Kraft zerlegt werden soll, gegeben, dieser Fall ist so einfach, dass wir ihn nicht zu behandeln brauchen.

In der Praxis kommt ferner der Fall häufig vor, dass die Mittelkraft und zwei Punkte gegeben sind, durch welche die Seitenkräfte derselben gehen sollen. Es sind z. B. die Widerlagerreactionen eines durch beliebige Kräfte belasteten Balkens zu bestimmen. In diesem Fall müssen die Seitenkräfte durch zwei bestimmte Punkte (Aa) und (Bb) Fig. 109 gehen, wo wir die Kraft R als Mittelkraft der Kräfte 1, 2, 3, 4, angenommen haben. Ist die Mittelkraft R in Fig. 109 gegeben, so kann nur mehr die Richtung einer der beiden Reactionen A oder B willkürlich angenommen werden; sie kann vielleicht dadurch gegeben sein, dass das eine der beiden Widerlager nur in einer bestimmten Richtung reagiren kann, z. B. vertical wenn dort der Balken auf Rollen liegt. Denn durch den Schnittpunkt derselben mit der Mittelkraft R ist auch die Richtung der andern Seitenkraft bestimmt, zwei Parallele durch die Endpunkte von R im Kräftepolygon Fig. 110 geben auch ihre Grössen.

Fig. 109.

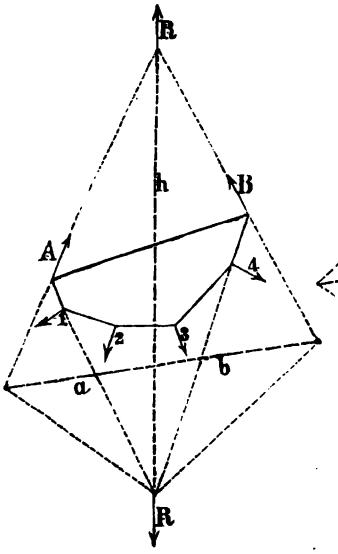
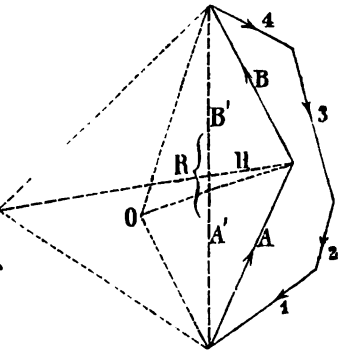


Fig. 110.



Aendert man die Richtungen von A und B so beschreiben sie im Seilpolygon Fig. 109 zwei perspectivische Strahlenbüschel; allein auch im Kräftepolygon Fig. 110 sind die Büschel A und B perspectivisch, denn sie haben da den Strahl R entsprechend gemein.

Die perspectivische Axe läuft parallel mit der Verbindungslinie AB der beiden Widerlagerpunkte, denn wenn im Seilpolygon Fig. 109 die beiden Kräfte A und B mit dieser Linie zusammenfallen, so laufen im Kräftepolygon Fig. 110 die Strahlen A und B parallel mit ihr. Die Lage dieser Axe im Kräftepolygon kann daher durch irgend ein Paar nicht zusammenfallender Strahlen bestimmt werden. Uebrigens kann man auch ihren Schnittpunkt mit R direct bestimmen; denn denkt man sich in Fig. 109 die Linie AB als Schnittlinie der Kräfte A und B, und bezeichnet die Segmente, in welche sie R theilt mit a und b, ferner die Erhebung der Kräfte A und B über dieser Linie, auf Fig. 110 mit A_1 und B_1, so hat man laut voriger Nummer $aA_1 = bB_1$, wodurch A_1 und B_1 bestimmt werden können.

Wählt man zur Bestimmung des perspectivischen Durchschnitts den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseite Fig. 109 als Punkt von R, so braucht man R im Seilpolygon gar nicht zu

ziehen. Die Construction ist in beide Figuren eingezeichnet. Endlich machen wir noch darauf aufmerksam, dass die Schlusslinie *AB* Fig. 109 mit dem Strahl *O*) *AB* Fig. 110 parallel läuft.

Bisweilen gehen drei Kräfte, die im Gleichgewicht sein sollen, durch die Ecken eines Dreiecks. Dann müssen, wenn jede Kraft in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen der Dreiecksseiten zerlegt wird, je zwei solcher in der gleichen Seite befindliche Seitenkräfte entgegengesetzt gleich sein. Denn betrachtet man das Dreieck als das geschlossene Seilpolygon, welches die drei Kräfte verbindet, so sind die entgegengesetzten Seitenkräfte die Spannungen in den drei Seilpolygonseiten.

Analytisch macht sich die Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte am gefälligsten, wenn man das Gleichgewicht von drei Kräften darstellt, jede derselben kann dann als die entgegengesetzte Mittelkraft der beiden andern betrachtet werden. Soll diese Darstellung durch drei Kräfte, welche in den Linien a_1 a_2 a_3 wirken, möglich sein, so muss es auch drei Coefficienten α_1, α_2, α_3, geben, die man so bestimmen kann, dass: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ ist. Sind die Coefficienten α_i also bestimmt, so sind die Kräfte A_i den Grössen $\alpha_i e_i$ proportional, wenn e_i den Coefficienten bezeichnet, durch welchen die Gleichung a_i auf die Normalform gebracht wird. Wenn aber der obigen Gleichung Genüge geleistet werden soll, so müssen sich die drei Richtungslinien in einem Punkte schneiden.

Schreibt man die Gleichungen $a_i = a_i x + b_i y + c_i$ vollständig an, so wird diese Bedingung ausgedrückt durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnet man die Unterdeterminanten mit griechischen Buchstaben, so sind:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$$

die Coefficienten, mittelst denen die Summe der drei Gleichungen a auf 0 gebracht wird.

Die Kräfte sind also bestimmt durch die Gleichungen:

$$A_1 : \alpha_1 e_1 = A_2 : \alpha_2 e_2 = A_3 : \alpha_3 e_3,$$

und man sieht, dass durch eine derselben auch die beiden andern bestimmt sind.

Die Gleichungen können auch auf die folgende Form gebracht werden:

$$A_1 : \frac{\gamma_1 \omega'}{e_2 e_3} = A_2 : \frac{\gamma_2 \omega'}{e_3 e_1} = A_3 : \frac{\gamma_3 \omega'}{e_1 e_2}.$$

$\gamma_h \omega' : e_i e_k$ ist aber nichts anderes, als der sin. $i\hat{k}$, man sieht daher, dass wir so auf die Bedingung zurückgekommen sind, von der wir bei der Zusammensetzung der Kräfte ausgingen.

Um den Fall, in welchen die Mittelkraft und zwei Punkte gegeben sind, durch welche die Seitenkräfte gehen sollen, auf den vorigen zurückzuführen, ge-

nügt es einen allgemeinen Ausdruck für die Gleichung der beiden Seitenkräfte aufzustellen. Es sei l die Gleichung der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte A und B in Fig. 109, r die Gleichung der Mittelkraft, dann würden die Gleichungen der Parallellinien zu r durch die Punkte A und B, $r - a$ und $r + b$ sein, worin a und b die constanten Entfernungen der Parallellinien von der Mittelkraft R sind. Die Gleichungen der Richtungslinien der Kräfte A und B können jetzt dargestellt werden durch:

$$-l + (r - a)\, b\, \lambda,$$
$$l + (r + b)\, a\, \lambda.$$

Dass diese beiden Linien für jeden Werth von λ sich auf r schneiden ist klar, denn die Summe ihrer Gleichungen ist gleich $r\,(a + b)\,\lambda$, worin a b und λ constante Grössen sind.

Bezeichnet man die Coefficienten, welche die Gleichungen l und r auf die Normalform bringen mit e_l und e_r, schreibt dann die Gleichungen der Seitenkräfte vollständig an, und berechnet für sie die e_a und e_b, welche sie auf die Normalform bringen, so findet man, wenn:

$$e_l\, e_r \cos \widehat{a\, h} = -\, e_l\, e_r \cos \widehat{b\, h} = a_l\, b_r + a_r\, b_l - (a_l\, b_r + a_r\, b_l)\, \omega,$$

gesetzt wird:

$$e_a = + \sqrt{e^2_l - 2\, b\, \lambda\, e_l\, e_r \cos \widehat{a\, h} + b^2\, \lambda^2\, e^2_r}$$

$$e_b = + \sqrt{e^2_l - 2\, a\, \lambda\, e_l\, e_r \cos \widehat{b\, h} + a^2\, \lambda^2\, e^2_r}\,.$$

Man erhält jetzt die Kräfte aus den Verhältnissen

$$A : e_a = B : e_b = R : (a + b)\, \lambda\, e_r\,;$$

denn dann wird man immer haben:

$$\frac{R}{e_r}\, r = \frac{A}{e_a}\Big[-l + (r - a)\, b\, \lambda\Big] + \frac{B}{e_b}\Big[l + (r + b)\, a\, \lambda\Big].$$

Nach diesen Formeln zu rechnen, wird wohl nur dann zweckmässig sein, wenn die Gleichungen der Linien wirklich gegeben sind. Unter Umständen kann es aber auch einfacher sein die Fig. 109 und 110 geradezu trigonometrisch auszurechnen, es hängt das ganz von den Daten ab; unter allen Verhältnissen aber wird wohl das graphische Verfahren das practischste sein.

56. Zerlegung einer Kraft in drei Seitenkräfte.

Bei der Zerlegung einer Kraft in 2 Seitenkräfte war die Möglichkeit der Zerlegung an die Bedingung geknüpft, dass die Richtungslinie der drei Kräfte durch einen Punkt gehe. Bei der Zerlegung einer Kraft in 3 Seitenkräfte dürfen diese Kräfte sich nicht in einem Punkt schneiden; bilden sie aber ein Dreieck, so kann

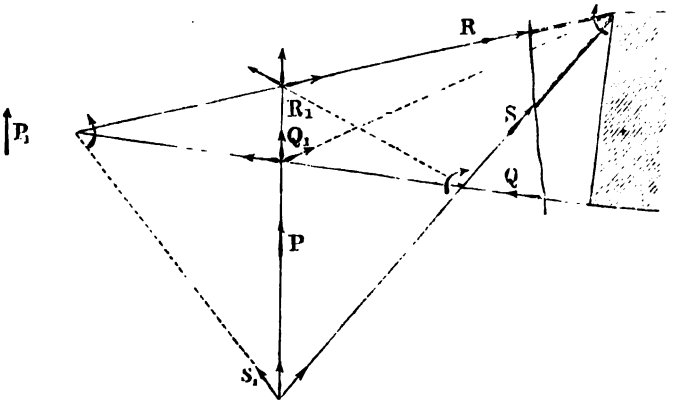
eine Kraft immer eindeutig nach diesen drei Richtungen zerlegt werden.

Diese Zerlegung bildet das Wesen der Fachwerktheorie; wir denken uns daher auch in Fig. 111 den Schnitt durch eine Construction, welche den ausserhalb wirkenden Kräften drei Constructionstheile entgegensetzt, und es sei jetzt mittelst der in irgend einer Weise gegebenen, construirten oder berechneten, ausserhalb des Schnittes wirkenden Kraft *P*, die nach den Richtungen dieser drei Constructionstheile wirkenden Kräfte zu bestimmen. Zu dem Ende:

Zerlege man die Mittelkraft *P* in dem Schnitt mit einem der drei Constructionstheile nach der Richtung dieses und nach der einer Linie, die den Schnitt mit dem Schnitt der beiden andern Constructionstheile verbindet. Endlich zerlege man diese letzte Kraft nach der Richtung dieser beiden letzten Constructionselemente, um die Kräfte zu erhalten, die in jedem derselben wirken.

Diese Regel gilt allgemein für die Zerlegung einer Kraft in drei Seitenkräfte, welche in drei in derselben Ebene gegebenen Linien wirken sollen. In Fig. 111 sind die Zerlegungen ange-

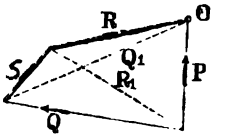
Fig. 111.



deutet, es bezeichnet dort und in den folgenden Figuren *Q* die Spannung im Streckbaum, *R* die im Druckbaum, und *S* die Kraft, die in der Strebe wirkt. Dann wurde die Kraft, die im Schnitt

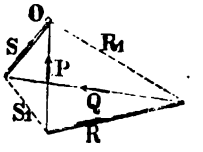
von Q nach dem Schnittpunkt RS wirkt, mit Q_1 bezeichnet. Wird nun Fig. 111 als Seilpolygon betrachtet, so reducirt es sich auf die punktirte Linie Q_1, an deren einem Ende die Kräfte P und Q, und an deren anderem Ende R und S wirken. Fig. 112 ist das entsprechende Kräftepolygon. Vom Pol O ausgehend, wurde auf einer Verticalen das gegebene P und am Ende von P die Richtung von Q aufgetragen, die Länge von Q wird durch die von O aus in der Richtung der Seilpolygonseite Q_1 gezogene Diagonale bestimmt. Die beiden letzten Seiten des Kräftepolygons, die Kräfte S und R, laufen mit den entsprechenden Constructionstheilen parallel und sind daher ebenfalls vollständig bestimmt.

Fig. 112.



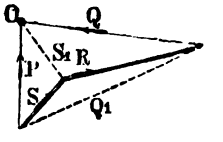
Man gelangt natürlich genau zu demselben Resultat, wenn man die Zerlegung von P im Schnittpunkt PR, Fig. 111, vornimmt und im Kräftepolygon, Fig. 113, durch den Pol O eine Parallele zu R_1 und durch den Endpunkt von P eine zu R zieht. Es folgt hieraus, dass die Diagonalen R_1 in Fig. 111 und 112 miteinander parallel laufen. Geometrisch geht es auch daraus hervor, dass in den Vierecken, deren Eckpunkte die Enden der beiden Diagonalen Q_1 und R_1 sind, in beiden Figuren je zwei gegenüberliegende Seiten miteinander parallel laufen.

Fig. 113.



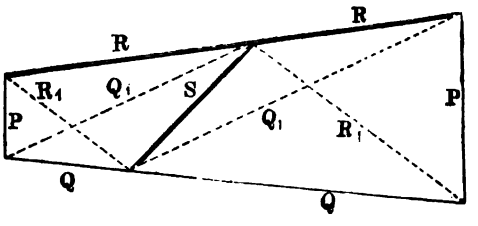
Durch Aenderung in der Ordnung der Zusammensetzung der Kräfte und dadurch, dass man die erste Zerlegung im Schnittpunkt SP, Fig. 111, vornimmt, erhält man auch die Anordnungen der Fig. 113 und 114 für das Kräftepolygon. Man hat unter diesen drei Formen Fig. 112, 113 und 114 die Wahl bei Entwurf eines Kräfteplans. Wir wählen gewöhnlich Fig. 112, wenn alle Kräfte, also auch die Spannungen und Pressungen Q und R in den Streckbäumen, zu bestimmen sind. Wenn jedoch diese schon durch eine andere Construction ermittelt sind und nur mehr die in der Strebe wirkende Kraft S zu bestimmen ist, dann wählen wir die Anordnung von Fig. 113 und 114. In der Regel können wir in solchen Fällen R und Q weglassen und das Kräftepolygon auf das Dreieck PSS_1 beschränken.

Fig. 114.



Bei Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte ist das Kräftepolygon dem Seilpolygon, d. h. der Figur, welche zwei gegebene Constructionstheile mit einer Kraft bilden, die sie aufheben sollen, immer ähnlich; denn Dreiecke mit parallelen Seiten sind ähnlich. Bei Vierecken ist dies nicht mehr unbedingt der Fall, wie der Vergleich von Fig. 111 mit den folgenden Figuren zeigt; in Fig. 111 ist der Winkel *RS* z. B. spitz, in Fig. 112 ist er stumpf u. s. f. Am besten kann die Verschiedenheit der beiden Figuren anschaulich gemacht werden, wenn zwischen zwei festzuhaltenden, gegenüberliegenden Seiten *Q* und *R* Fig. 115, an eine dritte Seite *S* anlehnend, zwei dem Seilpolygon Fig. 111 (links) und dem Kräftepolygon Fig. 112 (rechts) ähnliche Figuren verzeichnet werden. Auf gleiche Weise lässt sich auch der Zusammenhang der Figuren 113 und 114 mit Fig. 111 zeigen.

Fig. 115.



Damit das Seil- und Kräftepolygon ähnlich seien, müssen zwei gegenüberliegende Seiten des Kräftepolygons miteinander parallel laufen. Fig. 116 zeigt dies Verhältniss für parallele Streckbäume; Fig. 117 für den Fall, wo ein Füllungsglied *S* mit der Kraft parallel läuft. Aus diesen Figuren geht auch hervor, dass im Seilpolygon, d. h. auf dem die Construction darstellenden Plan, in den auch die Kraft gezeichnet wurde, die in den parallelen Constructionstheilen wirkenden Kräfte sich umgekehrt wie ihre Längen verhalten, während die in den schiefen Constructionstheilen wirkenden Kräfte sich gerade wie ihre Längen verhalten.

Fig. 116.

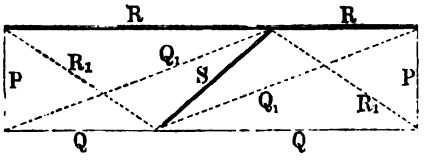
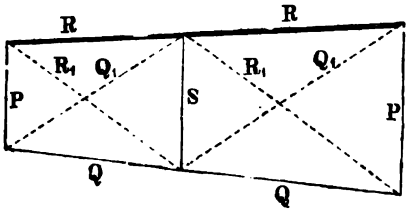


Fig. 117.



Hieraus folgt also:

Bei parallelen Streckbäumen verhält sich die Kraft, die in einer Strebe wirkt, zur Mittelkraft der ausserhalb dieser Strebe wirkenden Kräfte, wie die Länge der Strebe zum Abschnitt der Kraft zwischen den parallelen Streckbäumen.

Man kann sich noch kürzer ausdrücken und sagen: die verticale Seitenkraft der Strebe ist gleich der Summe der ausserhalb der Strebe wirkenden Kräfte. Doch ist dies wörtlich nur für Fachwerke mit horizontalen Streckbäumen wahr; bei geneigten Streckbäumen hat man sich dann die zweite Seitenkraft nicht horizontal, sondern parallel zu den Streckbäumen zu denken. Stehen einzelne Füllungsglieder vertical, wie z. B. die Hängeisen in der Howe'schen Brücke, die Pfosten in verschiedenen eisernen Brückensystemen, so haben diese einfach der Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte zu widerstehen.

Sind die Streben oder die Hängeisen alle parallel, so sind die in ihnen wirkenden Kräfte dem P proportional und ändern sich wie dieses.

Die eben entwickelte Bestimmung der am Fachwerk wirkenden Kräfte ist zweckmässig, solange P auf das Blatt fällt; liegt aber die Richtungslinie dieser Kraft ausserhalb des Blattes, so kann man Q und R dadurch bestimmen, dass man das Moment von P in Bezug auf die Punkte RS und QS durch die Hebelsarme jener Kräfte in Bezug auf dieselben Punkte dividirt. P ist die Mittelkraft von QRS, mithin ist das Moment derselben in Bezug auf jeden Punkt der Ebene, welche die Construction enthält, gleich dem Moment dieser Seitenkräfte in Bezug auf denselben Punkt. Das Moment zweier dieser Kräfte ist aber gleich 0 in Bezug auf ihren Schnittpunkt, mithin muss das Moment von P in Bezug auf diesen Schnittpunkt gleich dem der vierten Kraft sein.

Bezeichnet man, um dieses Verhältniss allgemein auszudrücken, mit $bqrs$ (wir schreiben b statt p, weil wir diesen letzteren Buchstaben den Belastungen pro Längeneinheit vorbehalten haben), die von irgend einem Punkt auf die vier Kräfte gefällten Perpendikel, so giebt die Gleichheit der Momente die Gleichung:

$$Pb = Qq + Rr + Ss.$$

Ist nun der Punkt, in Bezug auf den das Moment bestimmt wird, der Schnittpunkt zweier Kräfte, so sind die Perpendikel auf

dieselben gleich 0, und die Momentengleichung reducirt sich auf zwei Glieder, in welchen die vorkommenden beiden Perpendikel unzweideutig, jeder mit dem Index des andern bezeichnet, erscheinen. Ist also b_q der Perpendikel vom Schnittpunkt der Kräfte R und S auf die Richtung der Kraft P, und q_p derjenige, welcher vom gleichen Punkt auf Q gefällt wird, so hat man:

$$P b_q = Q q_p .$$

In gleicher Weise auch:

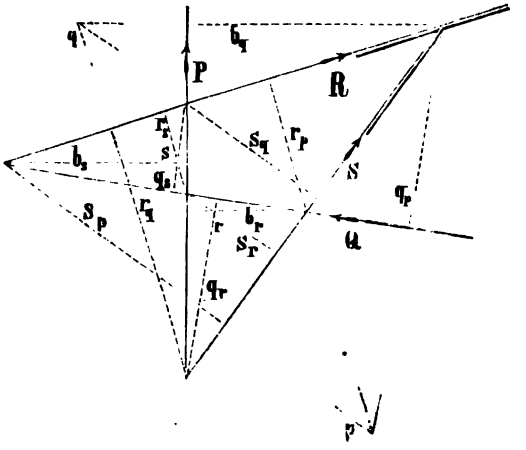
$$P b_r = R r_p ,$$

und

$$P b_s = S s_p .$$

In Fig. 118 haben wir alle möglichen Perpendikel zusammengestellt, man sieht, es sind deren 12, von denen je 3 senk-

Fig. 118.



recht auf einer der vier Linien $PQRS$ stehen, und je drei sich in einem der Höhenpunkte der vier Dreiecke schneiden, welche mit den vier Richtungslinien der Kräfte gebildet werden können. Alle Perpendikel, welche auf derselben Linie senkrecht stehen, sind mit demselben Buchstaben bezeichnet, und alle Perpendikel, die sich in demselben Höhenpunkt schneiden, tragen den gleichen Index.

Bei Kräfteplänen ist es zweckmässig, die Indexe durch die Nummern der Knotenpunkte zu ersetzen.

Werden diese Perpendikel entweder aus der Zeichnung abgegriffen oder berechnet, so sind mit einer Kraft P z. B. die drei andern gegeben.

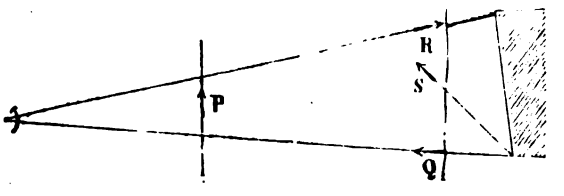
Weitere drei Gleichungen erhält man durch Verbindung der Kräfte Q, R, S mit einander. Auf diese Weise hat namentlich Herr Prof. *A. Ritter* in Hannover seine Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen ausgebildet.

Ganz abgesehen davon, ob diese Methode oder die directe Zerlegung von P bei der wirklichen Construction der Kräfte schneller zum Ziele führe, zeigt sie unmittelbar die Richtung an, in welcher jede der drei Kräfte QRS wirkt. Bei jeder Ecke des durch sie gebildeten Dreiecks Fig. 111 S. 202 ist durch ein Pfeil angedeutet, in welchem Sinne die Kraft P um sie dreht, und es ist klar, dass die diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seitenkraft in demselben Sinne um ihn drehen muss; und dadurch ist auch bestimmt, ob der treffende Constructionstheil gespannt oder gepresst werde.

Von vorn herein ist dies zwar für die beiden Streckbäume bekannt, allein um zu wissen, ob eine Strebe absolut oder rückwirkend in Anspruch genommen sei, muss man sich immer den Sinn denken, in welchem P um den Punkt QR dreht. Wäre z. B. P_1, Fig. 111, die Mittelkraft der ausserhalb des durch die Construction geführten Schnittes wirkenden Kräfte, so würde es in entgegengesetzter Richtung als wie P um den Punkt QR drehen, S müsste demnach auch in entgegengesetzter Richtung wirken, und die Strebe wäre absolut statt rückwirkend in Anspruch genommen.

Ebenso müsste auch die Strebe absolut in Anspruch genommen sein, welche die andere Diagonale des Trapezes einnähme, das durch die Streckbäume und das nächst vorausgehende und folgende Füllungsglied gebildet wird, wie die Pfeile in Fig. 119 es zeigen.

Fig. 119.



In dem fortlaufenden Zug der Füllungsglieder ist also immer abwechselnd eines absolut und eines rückwirkend in Anspruch genommen, solange die relative Lage von P gegenüber dem Punkt QR sich nicht ändert. Geht die Richtungslinie von P durch diesen Punkt, so ist die treffende Strebe gar nicht in Anspruch genommen, springt endlich P auf die andere Seite des Punktes QR nach P_1 Fig. 111 hinüber, so sind, wie wir oben gesehen haben, die Füllungsglieder in entgegengesetzter Weise in Anspruch genommen.

Bei Fachwerken mit parallelen Streckbäumen liegt der Punkt QR im Unendlichen, also hat die Kraft P bezüglich desselben immer die Fig. 119 angedeutete Lage, und, wie wir später noch hervorheben werden, ist das abwärts laufende Füllungsglied S immer absolut in Anspruch genommen. Bei englischen Dachstühlen findet dagegen immer das Umgekehrte statt; die Mittelkraft P liegt immer jenseits des Schnittes QR, weil sich dessen Streckbäume über dem Widerlager schneiden. Die Mittelkraft hat daher immer die mit P_1 bezeichnete Lage in Fig. 111, dreht im entgegengesetzten Sinn als bei Fachwerken mit parallelen Streckbäumen, und das abwärts gehende Füllungsglied ist daher bei solchen Dachstühlen immer rückwirkend in Anspruch genommen.

Bei anders geformten Fachwerken lässt sich nichts Bestimmtes über die Inanspruchnahme der Füllungsglieder sagen.

Sind die zwei Streckbäume Q und R parallel, so wird $q_p = r_p =$ der senkrechten Entfernung der beiden Streckbäume; die Kräfte sind also in diesem Fall gleich den Momenten der Kraft P in Bezug auf die Endpunkte der Strebe, getheilt durch die constante Höhe der Construction.

Läuft bei nicht parallelen Streckbäumen S parallel mit P, so sind b_s und s_p den Entfernungen des Schnittpunktes QR von P und S proportional. Man erhält daher S aus P, wenn man dieses letztere auf der Richtungslinie von S selbst aufträgt, und die Endpunkte mit dem Schnittpunkt QR, oder mit einem beliebigen Punkte auf einer Parallelen zu P und S durch QR, verbindet. Diese beiden Linien schneiden auf P die Grösse von S aus. Es folgt dies auch daraus, dass laut Seite 205 P und S sich umgekehrt wie ihre Längen im Seilpolygon verhalten.

Um eine Kraft auch analytisch nach der Richtung von drei Linien zu zerlegen, berufen wir uns auf einen Satz der analytischen Geometrie, welcher lautet: Irgend eine Gleichung a_i kann durch 3 andere Gleichungen a_1, a_2, a_3 so ausgedrückt werden, dass man hat: $A_i a_i = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3$, wo A_i, A_1, A_2, A_3 Determinanten der Coefficienten der Gleichungen a_i, a_1, a_2, a_3 sind. Um diesen Satz in das Statische zu übersetzen, hat man nur die Coefficienten A_i, A_1, A_2, A_3 als Kräfte zu betrachten, und er lautet dann: **Man kann jede Kraft nach 3 in derselben Ebene wirkenden und sich nicht in einem Punkt schneidenden Richtungen zerlegen.**

Die Formeln machen sich am symmetrischsten, wenn man die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts der 4 Kräfte ausdrückt:

$$\frac{A_1 a_1}{e_1} + \frac{A_2 a_2}{e_2} + \frac{A_3 a_3}{e_3} + \frac{A_4 a_4}{e_4} = 0,$$

$$\frac{A_1 b_1}{e_1} + \frac{A_2 b_2}{e_2} + \frac{A_3 b_3}{e_3} + \frac{A_4 b_4}{e_4} = 0,$$

$$\frac{A_1 c_1}{e_1} + \frac{A_2 c_2}{e_2} + \frac{A_3 c_3}{e_3} + \frac{A_4 c_4}{e_4} = 0.$$

Diese 4 Gleichungen geben dann unmittelbar das Verhältniss der 4 Kräfte:

$$\frac{A_1}{+e_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{A_2}{-e_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{A_3}{+e_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{A_4}{-e_4\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}},$$

woraus, wenn eine Kraft und die 4 Richtungslinien gegeben sind, die Grösse der 3 andern bestimmt werden kann.

Substituirt man in die obigen drei Gleichungen nach einander die Eckpunkte des Dreiecks der Kräfte Q, R, S, so erhält man die drei Gleichungen S. 206, von denen wir ausgegangen sind, indem $\frac{a_i \omega'}{e_i}$ nichts anderes, als die Perpendikel jener Gleichungen sind.

Drittes Kapitel.

Die Kräfte im Raum.

57. Allgemeine Zusammensetzung der Kräfte im Raum.

Bei der Zusammensetzung der Kräfte im Raum nehmen wir eine Ebene und einen nicht in ihr liegenden Punkt willkürlich an, bestimmen die eine Kraft aus dem Punkt projicirende Ebene, und suchen den Schnitt derselben mit der angenommenen Ebene; dann den Durchstosspunkt der Kraft mit der gleichen Ebene und ziehen die Verbindungslinie desselben mit dem angenommenen Punkte. Auf diese Weise erhalten wir zwei Linien, welche mit der Kraft in der projicirenden Ebene liegen, und sie im Durchstosspunkt schneiden; die Kraft kann daher nach den Richtungen dieser beiden Linien zerlegt werden. Werden alle Kräfte auf gleiche Weise behandelt und zerlegt, so erhalten wir für jede Kraft im Raum eine Seitenkraft, die durch den Punkt geht, und eine andere, die in der Ebene liegt; erstere sowohl als letztere können zu einer einzigen Seitenkraft zusammengesetzt werden, und das ganze System ist auf zwei Kräfte reducirt.

Schneiden sich diese Kräfte zufälliger Weise, so können sie weiter zusammengesetzt werden, und das System hat eine einzige Mittelkraft; im Allgemeinen aber wird dieses nicht der Fall sein, und wir setzen es auch im Folgenden so nicht voraus.

Zwei Kräfte im Raum, die sich nicht schneiden, können nicht mehr weiter zusammengesetzt werden, denn wäre es möglich, denselben mit einer einzigen Kraft, der entgegengesetzten Mittelkraft, das Gleichgewicht zu halten, so müssten sich diese, laut Gleichgewichtsbedingung von Nr. 53, S. 193, in einem Punkte schneiden und in einer Ebene liegen, was gegen die Voraussetzung ist.

Wenn zwei Kräfte nicht auf eine einzige reducirt werden können, so können sie auf der andern Seite auf vielfach unendlich verschiedene Weisen durch zwei andere Kräfte dargestellt werden, denn für jede Aenderung des Punktes der ange-

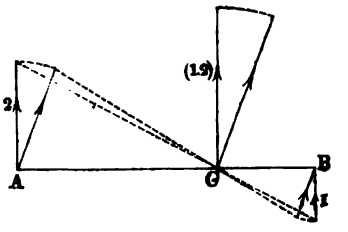
nommenen Ebene oder beider zugleich erhält man zwei andere Kräfte, die entgegengesetzt genommen mit dem System (also auch mit zwei sie ersetzenden Kräften) im Gleichgewicht sind.

Es ist nun interessant, die Beziehungen zwischen den Kräften, dem angenommenen Punkt und der angenommenen Ebene zu studiren. Wir beginnen nun, um die angedeuteten Operationen auszuführen, einige der früheren Sätze, Nr. 54 S. 194 zu verallgemeinern.

58. Der Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Drehen sich zwei parallele Kräfte 1 und 2 um bestimmte Punkte A und B (Fig. 120) im Raum in der Art, dass sie immer parallel und gleich gross bleiben, so dreht sich auch ihre Mittelkraft (1 2) um einen bestimmten Punkt C, der nach Nr. 54 S. 197 auf der Verbindungslinie AB liegt und ihre Länge so theilt, dass sich die Segmente umgekehrt wie die Kräfte verhalten. Kommt noch eine dritte Kraft 3 hinzu, die sich ebenfalls um einen festen Punkt und stets um gleichviel wie die übrigen Kräfte dreht, so gilt dasselbe bezüglich der Kräfte (1 2) und 3 und so fort von einer beliebigen Anzahl Kräfte. Man kann daher allgemein sagen:

Fig. 120.



Wenn parallele Kräfte von beliebiger Intensität, also auch im entgegengesetzten Sinne wirkende, sich um feste Punkte im Raum so drehen, dass sie sich stets parallel bleiben: so dreht sich auch ihre Mittelkraft um einen festen Punkt im Raum, der der Mittelpunkt dieser Kräfte heisst. — Bestehen die Kräfte aus dem Gewichte starr mit einander verbundener Massen, so heisst er auch der Schwerpunkt der Kräfte.

Sind die einzelnen Punkte im Raum, z. B. die Angriffspunkte der Kräfte 1 2 3 4 in Fig. 121, durch ihre Projectionen auf zwei sich schneidenden Ebenen gegeben, so wird der Mittelpunkt dieser

Kräfte jederzeit durch die Richtungslinie der Mittelkraft projicirt, die man erhält, wenn man an den Projectionen dieser Angriffspunkte in beliebigen, jedoch in der Projectionsebene enthaltenen Richtungen parallele Kräfte von der gegebenen Intensität wirken lässt.

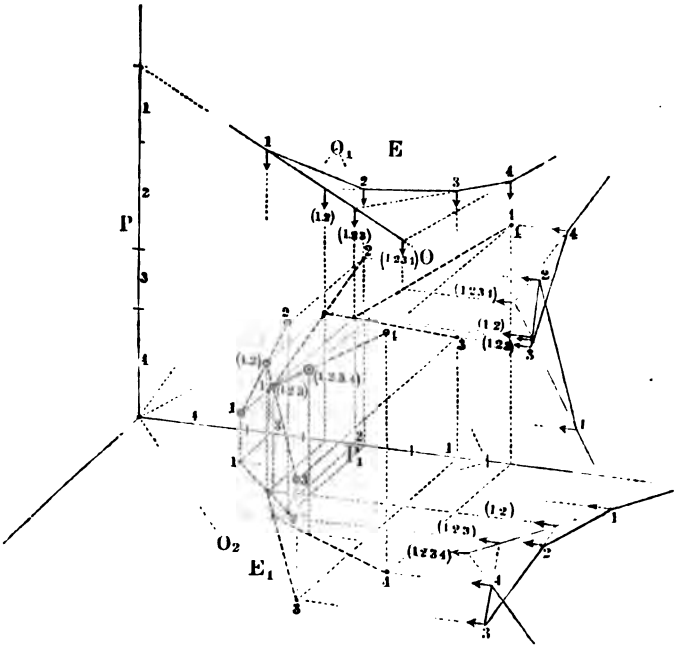
Denn zerlegt man jede der an den Punkten im Raum wirkenden Kräfte in der projicirenden Ebene in eine unendlich ferne Kraft und in eine parallele Seitenkraft gleicher Richtung und Grösse in der Projectionsebene, so können diese letztern Kräfte auf gewöhnliche Weise wie parallele Kräfte in der Ebene mittelst eines Seilpolygons zu einer Mittelkraft zusammengesetzt werden.

Die Richtungen der unendlich fernen Kräfte fallen alle in die unendlich ferne Gerade, welche die Stellung der projicirenden Ebenen bestimmt; ihre Summe liegt daher auch mit der in der Projectionsebene erhaltenen Mittelkraft in einer und derselben Ebene und kann mit dieser zur Mittelkraft der parallelen Kräfte zusammengesetzt werden. Die Ebene, in der dies geschieht, ist daher die die Mittelkraft projicirende Ebene, welche demnach auch durch die Mittelkraft geht, die man durch Zusammensetzung der in die Projectionsebene projicirten Kräfte erhalten hat.

Da keine Voraussetzungen bezüglich der verschiedenen gewählten Richtungen und Stellungen gemacht wurden, so gilt das eben Gesagte allgemein für jede Stellung und Lage der Projectionsebene und für jede Richtung der die Punkte im Raum auf die gewählte Ebene projicirenden Parallelstrahlen.

Wählt man nun noch in der Projectionsebene die Richtung der Parallelkräfte, so bestimmt diese Richtung und die Richtung der projicirenden Linien die Stellung der die Kräfte projicirenden Ebenen. Aendert man die Richtung der Kräfte in der Projectionsebene, so werden sich die projicirenden Ebenen um die projicirenden Strahlen aller Angriffspunkte der Kräfte drehen. Durch diese Aenderung kann man daher die Projection des Mittelpunktes, jedoch nicht die Länge der Projectionsstrahlen erhalten. Zur Bestimmung dieser muss noch wenigstens einmal die Richtung der projicirenden Parallelstrahlen geändert werden. Es genügt dann, die an den neuen Projectionspunkten wirkenden Kräfte noch einmal in beliebiger Richtung zusammenzusetzen, um eine projicirende Ebene zu erhalten, welche den schon erhaltenen projicirenden Parallelstrahl nicht enthält, und daher auf ihm den Mittel-

Fig. 121.



punkt der Kräfte abschneidet. Es sind daher 3 Bestimmungen der Mittelkraft paralleler Kräfte nothwendig, weil jede derselben eine Ebene giebt, die den Mittelpunkt enthält.

Nach Obigem könnten diese Operationen alle in einer und derselben Ebene vorgenommen werden, wenn in derselben die Projectionen aller Angriffspunkte durch zwei verschiedene Richtungen gegeben wären, allein es ist zweckmässiger, wenn alle Punkte durch orthogonale Projectionen auf zwei zu einander senkrechten Ebenen gegeben sind, ganz nach den Regeln der darstellenden Geometrie zu verfahren und mit der Drehung des projicirenden Strahles um $\frac{\pi}{2}$ auch die Projectionsebene um so viel drehen.

In Fig. 121 ist dargestellt, wie solche Operationen ausgeführt werden können. Die Angriffspunkte 1 2 3 4 der Kräfte im Raum sind durch ihre Projectionen auf eine verticale und horizontale Ebene E und E_1 gegeben. Indem man nun annimmt, es wirken die Kräfte vertical an diesen Punkten, erhält man das Kräfte-

polygon PO; das Seilpolygon, welches ihm entspricht, giebt die Verticallinien (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4), in welchen die Projectionspunkte der entsprechenden Mittelpunkte liegen. Nimmt man nun an, die Kräfte wirken horizontal, so erhält man das Kräftepolygon $P_1 O_1$, das entsprechende Seilpolygon giebt die Horizontallinien (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4), welche durch ihren Schnitt mit den gleichnamigen Verticalen, die Projectionen der entsprechenden Mittelpunkte vollkommen bestimmen.

In der horizontalen Projectionsebene genügt es nun, ein einziges Polygon für Kräfte, welche parallel zur Grundlinie wirken und das Kräftepolygon $O_2 P_1$ geben, zu construiren; sie geben die Parallellinien (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4) zur Grundlinie, auf denen die Projectionen der gleichnamigen Kräfte liegen, die nun vollständig bestimmt sind, weil die von diesen Projectionen auf die Grundlinie gefällten Perpendikel diese in einem und demselben Punkt treffen müssen. Es versteht sich von selbst, dass die Angriffspunkte 1 (1 2) 2; (1 2) (1 2 3) 3; (1 2 3) (1 2 3 4) 4 auf geraden Linien liegen müssen, wie es durch — — — Linien angedeutet ist.

Aus den bisherigen Constructionen geht ferner noch hervor, dass es auf die Form des Seilpolygons keinen Einfluss ausübt, wenn in den die Kräfte projicirenden Ebenen jene der Projectionsebene genähert oder von ihr entfernt werden.

59. Das Moment paralleler Kräfte bezüglich einer Ebene.

Da die unendlich fernen Seitenkräfte, der auf verschiedene Punkte im Raume wirkenden parallelen Kräfte, zum Maass das Moment derselben bezüglich ihrer Projection haben, und dieses dem Product der Kraft mit der Länge des den Angriffspunkt projicirenden Strahles proportional ist, da ferner alle diese unendlich fernen Seitenkräfte in einer und derselben unendlich fernen Linie liegen, sich daher dort einfach zu einer Mittelkraft addiren, welche das Maass des Momentes der Mittelkraft bezüglich ihrer Projection ist, so kann man, wenn man unter dem Moment paralleler Kräfte bezüglich einer gegebenen Ebene im allgemeinen Sinne das Product dieser Kräfte mit der Länge der Parallelstrahlen versteht, welche ihre Angriffspunkte in beliebiger Richtung auf die gegebenen Ebenen projiciren, sagen:

Das Moment paralleler Kräfte bezüglich einer gegebenen Ebene ist gleich dem Moment ihrer Mittelkraft bezüglich derselben Ebene.

Hieraus geht hervor, dass, wenn die Angriffspunkte verschiedener paralleler Kräfte in parallelen Ebenen beliebig verschoben werden, der Angriffspunkt der Mittelkraft sich in einer ebenfalls zu jenen parallelen Ebene verschiebe, was übrigens auch schon aus den Constructionen Fig. 121 (S. 213) direct hervorgeht.

Das Moment einer beliebigen Zahl aufeinanderfolgender und durch ein Seilpolygon in einer Projectionsebene mit einander verbundener paralleler Kräfte, in Bezug auf irgend eine projicirende Ebene: ist gleich dem Product des Segments, den die äussern Polygonseiten auf der Projection dieser Ebene abschneiden, mit der Höhe des Kräftepolygons.

Eine weitere Folge sowohl der Construction als auch des oben ausgesagten Momententheorems ist folgender Satz:

Können alle zusammenzusetzenden Kräfte zu zweien oder mehreren so gruppirt werden, dass die Mittelpunkte aller Gruppen:

in einen Punkt zusammenfallen, so ist dieser der Mittelpunkt aller Kräfte,

in eine gerade Linie oder in eine Ebene fallen, so liegt auch der Mittelpunkt aller Kräfte in dieser geraden Linie oder in dieser Ebene.

60. Die Zusammensetzung der durch einen Punkt gehenden und in einer Ebene liegenden Seitenkräfte eines räumlichen Systems.

Schneidet man eine beliebige Zahl Kräfte im Raum durch eine Ebene und zerlegt sie so, wie es in Nr. 56 angedeutet worden ist, in zwei Seitenkräfte, wovon die eine in der Ebene liegt und die andere durch einen beliebigen, aber festen, ausserhalb der Ebene angenommenen Punkt geht, so schneidet die Mittelkraft dieser letztern, wo auch der feste Punkt im Raum angenommen wurde, die Ebene in dem Mittelpunkte von parallelen Kräften,

welche in den Durchstosspunkten wirken und den Erhebungen der einzelnen gegebenen Kräfte über die Ebene proportional sind. Die Erhebung der durch den Punkt ausserhalb der Ebene gehenden Kraft ist gleich der Summe der Erhebungen aller einzelnen Kräfte über die Ebene.

Der Satz versteht sich von selbst, wenn der feste Punkt im Unendlichen liegt; dass er aber auch für jeden andern Punkt gelte, folgt daraus, dass man die für einen unendlich fernen Punkt erhaltene Seitenkraft in ihrem Durchstosspunkte nach der Richtung des gegebenen Punktes und nach einer in der Ebene liegenden Richtung zerlegen kann, wobei sich die Erhebung der Kraft über die Ebene nicht ändert.

Ist also ein System von Kräften im Raum gegeben, so ist dadurch für jede beliebig angenommene Ebene ein Punkt in ihr bestimmt, durch den die nicht in der Ebene liegende Seitenkraft geht, wenn die oben angedeutete Zerlegung vorgenommen wird.

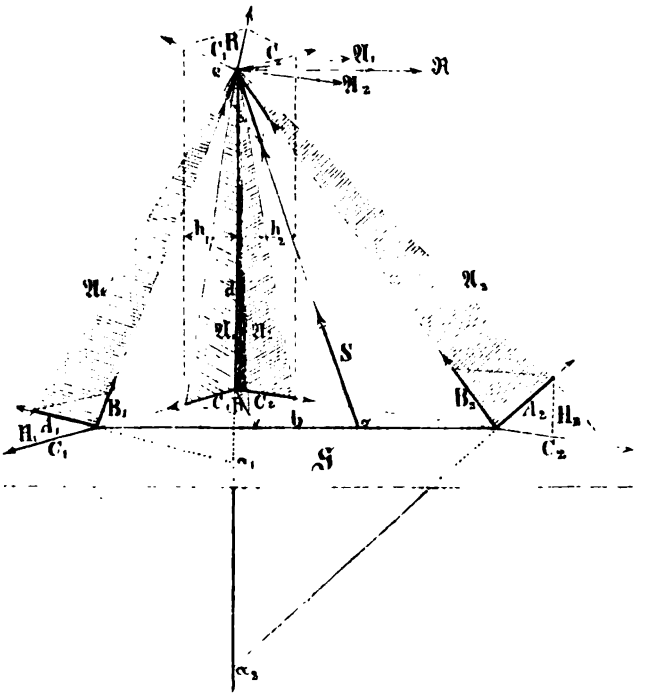
Der reciproke Satz gilt auch für jeden Punkt im Raum. Durch jeden im Raum angenommenen Punkt ist eine durch ihn gehende Ebene bestimmt, durch welche die nicht durch den Punkt gehende Seitenkraft projicirt wird, wenn man die oben angedeutete Zerlegung vorgenommen hat. Dieses letztere haben wir noch zu beweisen.

Es sei Fig. 122 ϱ der angenommene Punkt, wir projiciren aus demselben die beiden Kräfte A_1 und A_2 auf eine beliebig angenommene Ebene $\mathfrak{B}$ und zerlegen in den Punkten $(A\,\mathfrak{B})$ die Kräfte A (soll für A_1 und A_2 gelten) nach den durch ϱ gehenden Richtungen B und nach den in der Ebene $\mathfrak{B}$ liegenden Richtungen C; verschieben die in den letztern wirkenden Kräfte in ihren Richtungslinien nach dem Durchschnitt d der beiden projicirenden Ebenen; dann wird die Erhebung h der Kraft C über d gleich dem Moment von A getheilt durch d oder $= \frac{\mathfrak{A}}{d}$ sein, wo $\mathfrak{A}$ die doppelte Momentenfläche und d die im Schnitt gemessene Entfernung des Punktes ϱ von der Ebene $\mathfrak{B}$ bezeichnet, wie es in der Fig. 122 angedeutet ist.

Diese Erhebung der Endpunkte von C ist ganz unabhängig von der Stellung der Ebene $\mathfrak{B}$ im Raum, welches auch dieselbe

sein mag, es wird der Endpunkt von C immer auf der in der Figur punktirten Parallelen zu d in der Entfernung h liegen. Mithin wird

Fig. 122.



sich auch der Endpunkt der Mittelkraft R der beiden Kräfte C_1 und C_2 auf einer Parallellinie zu d bewegen; und das Moment dieser Mittelkraft bleibt für jede Stellung von $\mathfrak{B}$ constant in Bezug auf ϱ. Stellen wir insbesondere $\mathfrak{B}$ senkrecht auf d, so werden die Seitenkräfte C, also auch die Mittelkraft R diesem Momente, namentlich das der Mittelkraft $\mathfrak{R} = Rd$ proportional sein.

Bisher haben wir vorausgesetzt, es sei d constant, allein diese Voraussetzung ist durchaus nicht nothwendig. Schneidet die Ebene $\mathfrak{B}'$ die Linie d in der Entfernung d' statt d, so werden die dieser neuen Lage entsprechenden h' gleich $\frac{\mathfrak{A}}{d'}$ statt $\frac{\mathfrak{A}}{d}$ sein, die beiden h' sind also den früheren proportional geblieben, d. h. nur im Verhältniss von $\frac{d}{d'}$ geändert werden. Die projicirende Ebene

von R' wird daher unverändert geblieben und R' ebenfalls gleich $R\frac{d}{d'}$ geworden sein. Multiplicirt man jetzt, um das Moment zu erhalten, R' mit d', so wird es gleich

$$R'd' = Rd = \mathfrak{R}$$

wie früher.

Da durch den Schnitt der Parallelen zu d mit der Ebene $\mathfrak{B}$ die Kraft R vollständig bestimmt ist, so kann sie jetzt mit der Seitenkraft irgend einer andern Kraft in $\mathfrak{B}$ auf gleiche Weise zusammengesetzt werden.

In der darstellenden Geometrie ist es allgemein üblich, die Stellung einer Ebene durch einen Perpendikel auf diese Ebene anzugeben; wenn man nämlich nur die Stellung einer Ebene im Auge hat, so ist diese durch den Perpendikel vollkommen bestimmt, weil alle Ebenen, welche senkrecht auf einer Linie stehen, parallel liegen, und weil die Winkel, welche zwei Linien mit einander bilden, gleich den Winkeln sind, welche die senkrecht auf ihnen stehenden Ebenen mit einander bilden.

Ganz diesem Gebrauch entsprechend werden daher auch wir die Stellungen der projicirenden Ebenen durch die Perpendikel darstellen, welche auf ihnen senkrecht stehen, und durch irgend einen festen z. B. den angenommenen Punkt ϱ gehen, die also dieselben Winkel mit einander bilden, als wie die projicirenden Ebenen selbst.

Macht man jetzt noch die Länge dieser Perpendikel den Momentenflächen $\mathfrak{A}$ proportional, und setzt sie dann gerade so zusammen wie Kräfte, die auf einen Punkt, den Punkt ϱ in Fig. 122, wirken, so wird die Mittelkraft dieser beiden Momente senkrecht auf der Fläche $\mathfrak{R}$ stehen und diesem Moment proportional sein, denn der die Momente zusammensetzende Linienzug $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{R}$ ist dem Linienzug $C_1\,C_2\,R$ ähnlich, wenn $\mathfrak{B}$ senkrecht auf d steht, wie dies Fig. 122 andeutet; standen daher $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ auf C_1 und C_2 senkrecht, so wird auch $\mathfrak{R}$ senkrecht auf R stehen.

Wir besitzen alles was nothwendig ist, um die Seitenkraft C_3 in $\mathfrak{B}$ einer dritten Kraft A_3 als Moment $\mathfrak{A}_3$ mit dem Moment $\mathfrak{R}$ zusammenzusetzen, indem wir im Strahlenbündel ϱ den entsprechenden Perpendikel auf die Projectionsebene von A_3, dessen Länge $\mathfrak{A}_3$ proportional ist, zu $\mathfrak{R}$, d. h. zur Summe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ addiren. Wir haben so vorgehend die Zusammensetzung der Kräfte in der

Ebene $\mathfrak{S}$ in eine solche im Strahlenbündel ϱ verwandelt, und dadurch diesen in der Art reciprok auf die Ebene $\mathfrak{S}$ bezogen, dass drei oder mehr Kräfte in $\mathfrak{S}$, welche sich in einem Punkte schneiden: drei oder mehr auf den sie projicirenden Ebenen senkrecht stehenden Strahlen entsprechen, welche alle in einer Ebene liegen. Einzelnen Punkten der Ebene $\mathfrak{S}$, welche in einer geraden Linie liegen, entsprechen ebenso viele Ebenen des Bündels, die alle sich in dem Strahl schneiden, welcher der Linie entspricht, in der die Punkte liegen.

Wie schon im Eingang erwähnt, ist diese Zusammensetzung der Kräfte von der Lage und Stellung der Ebene $\mathfrak{S}$ ganz unabhängig, indem es keiner weitern Angaben als die über Stellung der projicirenden Ebenen und der Grösse der Momente bedarf, um die Momente zusammenzusetzen; das gilt daher auch für die Zusammensetzung der Kräfte in der unendlich fernen Ebene, denn die Momente in Bezug auf ϱ sind ja nichts anderes als die unendlich fernen Seitenkräfte, die man erhält, wenn man die Kräfte A, nach der Richtung einer Parellelen durch ϱ und einer unendlich fernen Kraft zerlegt.

Will man also Kräfte in der unendlich fernen Ebene zusammensetzen, so gelangt man ganz einfach zum Strahl, der auf der Mittelkraft senkrecht steht und dessen Länge dem Moment derselben gleich ist, indem man auf den Strahlen, welche diesen Kräften entsprechen, die Momente aufträgt und wie gewöhnliche Kräfte zusammensetzt.

Hiermit hätten wir gezeigt, wie unendlich ferne Kräfte zusammengesetzt werden, was früher auf Nr. 54 S. 198 noch nicht geschehen konnte.

61. Die projectivischen Eigenschaften eines Kräftesystems.

Hat man, so wie es in den vorigen Nrn. gezeigt wurde, ein räumliches Kräftesystem auf zwei Kräfte R und S, die sich nicht schneiden, reducirt und nimmt man den Punkt σ auf der einen derselben S z. B. an, so wird die diesem Punkt entsprechende Ebene nothwendiger Weise die Projectionsebene σR sein müssen, denn zerlegt man die einzelnen Kräfte A in ihren Durchstosspunkten mit einer beliebigen Ebene $\mathfrak{R}$ nach der Richtung des angenommenen

Punktes σ und der Schnittlinie von σ mit $\mathfrak{R}$, so wird in dieser letztern Ebene die Kraft von R die Mittelkraft der Seitenkräfte aller übrigen sein. Sie wird also aus dem Punkt σ durch σR oder $\mathfrak{P}$ projicirt, während auf der andern Seite alle durch den Punkt σ gehenden Kräfte im Gleichgewicht sein müssen.

Und umgekehrt, legt man die Ebene $\mathfrak{R}$ durch R, so wird der dieser Ebene entsprechende Punkt ϱ ihr Schnittpunkt mit S sein. Denn zerlegt man die einzelnen Kräfte A in ihren Projectionsebenen aus einem beliebigen Punkt σ nach der Richtung ihrer Schnitte mit $\mathfrak{R}$ und der Verbindungslinie ihrer Durchstosspunkte mit σ, so muss in diesem letztern Punkt die Kraft S die Mittelkraft aller A sein, diese Mittelkraft schneidet daher die Ebene $\mathfrak{R}$ im Durchstosspunkt von S. Hieraus folgt, dass wenn man durch Annahme eines Punktes ϱ die Ebene $\mathfrak{R}$ bestimmt hat, durch welche die nicht durch ϱ gehende Kraft R projicirt wird, dass dann auch umgekehrt dieser Ebene der Punkt ϱ entspricht, denn er ist der Punkt, in welchem die nicht in $\mathfrak{R}$ liegende Kraft S die Ebene $\varrho R = \mathfrak{R}$ schneidet.

Hat man ebenso durch Annahme einer Ebene $\mathfrak{P}$ den ihr entsprechenden Durchstosspunkt σ mit der nicht in ihr liegenden Kraft S bestimmt, so entspricht auch umgekehrt diesem Punkt σ die Ebene $\mathfrak{P}$, denn da R in ihr liegt, so ist sie die Projectionsebene der nicht durch den Punkt σ gehenden Kraft.

Diesen wichtigen Satz der Reciprocität wollen wir auch noch direct geometrisch beweisen. Wird die Ebene $\mathfrak{R}$ angenommen, so ist die Erhebung von A über d in der Ebene $\mathfrak{A}$ gemessen $= \frac{\mathfrak{A}}{(\varrho\,\alpha)}$, und senkrecht auf $\mathfrak{R}$ gemessen $= \frac{\mathfrak{A}}{(\varrho\,\alpha)} \cdot \frac{c}{C}$, wenn man mit c die in der Figur nicht angebbaren gleich langen Perpendikel $c = c_1 = c_2$ vom Endpunkte der Kräfte C auf die Ebene $\mathfrak{R}$ bezeichnet; nun ist aber $C = \frac{\mathfrak{A}}{d}$, mithin ist die Erhebung der Kraft A über der Ebene $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{(\varrho\,\alpha)}$; da aber für beide Kräfte A_1 und A_2 das Product $c\,d$ constant ist, so verhalten sich die Entfernungen $\varrho\,\alpha_1$ in $\varrho\,\alpha_2$ umgekehrt, wie die Erhebungen der Kraft A über $\mathfrak{R}$. ϱ liegt also auf der Linie d gerade so wie σ auf b. Wird auf der andern Seite σ angenommen, und aus demselben A_1

und A_2 projicirt, wobei sich die Projectionsebenen in b schneiden, von b aus dann die Momente $\mathfrak{A}_{\sigma 1}$ und $\mathfrak{A}_{\sigma 2}$ von A_1 und A_2 in Bezug auf σ aufgetragen, so ist die Erhebung dieser Momente über der Ebene $\mathfrak{B}$ gleich $(\sigma A)\,H$, da aber von Constructionswegen schon $(\sigma A_1)\,H_1 = (\sigma A_2)\,H_2$ ist, so erheben sich die Parallellinien, auf denen sich die Endpunkte der von b aus aufgetragenen Momente bewegen müssen, gleichviel über $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}$ ist demnach die Ebene, welche die Mittelkraft R projicirt.

Um zu diesen Sätzen zu gelangen, hatten wir ϱ und $\mathfrak{B}$ willkürlich angenommen, da aber durch σ $\mathfrak{B}$ bestimmt ist, so kann man auch ϱ und σ willkürlich wählen, und erhält dann R als Schnitt der Ebenen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$, welche zwei Punkten ϱ und σ auf S entsprechen; ebenso könnte man die Ebenen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ willkürlich annehmen, und würde dann S als Verbindungslinie der zwei Punkte ϱ und σ erhalten, welche zwei Ebenen entsprechen, die durch R gehen.

Dreht sich also eine Ebene um eine Linie R, so beschreibt der ihr entsprechende Punkt, die R entsprechende Linie S.

Wir werden fortan immer von zwei solchen Richtungslinien, in denen mittelst endlicher Kräfte einem System das Gleichgewicht gehalten werden kann, sagen, dass sie sich entsprechen, und die in entsprechenden Richtungslinien wirkenden Kräfte ein Kräftepaar nennen.

Der Ebenenbüschel R und das Punktgebilde S sind offenbar auch projectivisch, denn sie liegen ja perspectivisch.

Besteht das Kräftesystem nur aus den Kräften A_1 und A_2, Fig. 122, wobei A_1 und A_2 auch Mittelkräfte mehrerer Kräfte vorstellen können, so folgt aus obigen Beweisen, dass A_1 A_2 R und S auf einem Hyperboloid liegen, von dem b und d Leitlinien sind; denn wo auch die Punkte ϱ und σ auf S angenommen werden mögen, die Ebenen, welche die 3 andern Kräfte A_1 A_2 und R projiciren, müssen sich in einer einzigen Geraden schneiden, sonst könnten ihre Momente nicht im Gleichgewicht sein; ebenso folgt, wie auch die Ebenen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ durch R geführt werden, dass die Punkte, in welchen sie die drei andern Kräfte schneiden, auf einer geraden Linie liegen, sonst könnten ihre Seitenkräfte durch diese Punkte nicht im Gleichgewicht sein.

Wird auf dem Hyperboloid A_1 A_2 R S eine weitere Erzeugungslinie P angenommen, so muss das ihr entsprechende Q

auf demselben Hyperboloid liegen. Dreht man eine Ebene um eine Leitlinie b, welche 2 entsprechende Linien A_1A_2, RS, oder PQ schneidet, so beschreibt der ihr entsprechende Punkt dieselbe Leitlinie b, denn nach obigem entspricht: dem Punkt σ die Ebene $\mathfrak{S}$, dem Punkt A_1 b die Ebene A_2 b und sofort. Hieraus folgt, dass jede Leitlinie, d. h. jede Linie, welche zwei Punkte entsprechender Kräfte bestimmt, sich selbst entspricht; wir werden später sehen, dass in solchen Leitlinien nur mit unendlich grossen Kräften einem Kräftesystem das Gleichgewicht gehalten werden kann. Das Moment des Kräftesystems in Bezug auf diese Leitlinien ist gleich null, denn wenn sie eine das System darstellende Linie schneidet, schneidet sie auch die andere; das Drehungsmoment dieser beiden Kräfte, also auch das des Systems, ist demnach gleich null in Bezug auf alle Leitlinien.

Da der um die Leitlinie b sich drehende Ebenenbüschel $\mathfrak{S}$, dem in derselben Leitlinie fortschreitenden Punktgebilde σ projectivisch ist, so ist ihm auch das Punktgebilde projectivisch, welches die von $\mathfrak{S}$ projicirte Kraft R auf d ausscheidet, weil aber bei dieser Bewegung R das Hyperboloid erzeugt, von dem auch b ein Schnitt ist, so folgt, dass auch das Punktgebilde $(b\ R)$ dem Punktgebilde σ projectivisch sei. Nun entsprechen sich aber die Kräfte R und S gegenseitig, also entsprechen sich diese beiden Punktgebilde involutorisch.

Drei beliebige Leitlinien des Systems bestimmen ein Hyperboloid, das von einer involutorischen Schaar entsprechender Kräftepaare erfüllt ist.

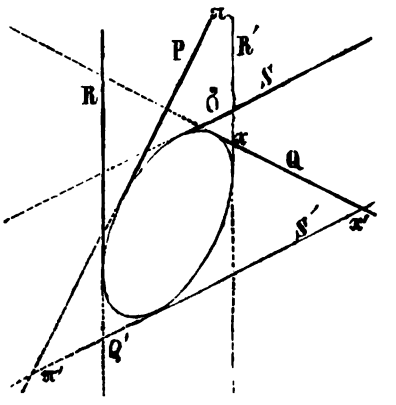
Zur Bestimmung des Systems genügen demnach zwei Paare entsprechender Richtungslinien, die auf einem Hyperboloid liegen müssen; in der That bestimmen diese auch laut Nr. 40 S. 167 das Verhältniss der vier in ihnen wirkenden Kräfte. Gewöhnlich sind jedoch nicht vier solcher Richtungslinien, sondern zwei derselben, mit der Grösse der darin wirkenden Kräfte R und S gegeben, und die Aufgabe ist dann zu einer weitern Kraft P die entsprechende Q zu construiren.

Man lege zwei Ebenen durch P, welche R und S schneiden, und theile die Verbindungslinien der Schnittpunkte umgekehrt wie die Erhebungen von R und S über den Ebenen, so erhält man zwei Punkte von Q; oder, man setze in zwei Punkten von P die Mo-

mente $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zusammen, welche in den projicirenden Ebenen der Kräfte R und S aus den angenommenen Punkten wirken, so erhält man zwei Ebenen, welche auch Q enthalten. Schon von Constructionswegen liegen die vier Richtungslinien von PQR und S auf einem Hyperboloid. Wie diese Operationen nach den Regeln der darstellenden Geometrie ausgeführt werden können wird am Schluss dieses Kapitels gezeigt werden.

Wir wollen auch noch die Lage von Q auf dem Hyperboloid zu bestimmen suchen. Es seien R' und S' die zu R und S parallelen Leitlinien, welche von allen Erzeugungslinien geschnitten werden; wir bezeichnen die Durchschnittspunkte von $RPSQ$ und R' mit $\infty\ \pi\ \sigma\ \varkappa$ siehe Fig. 123 und die mit S' mit $\varrho'\ \pi'\ \infty'\ \varkappa'$. In dem geschlossenen Linienzug $\varkappa\ \pi\ \pi'\ \varkappa'$ laufen alle Strecken mit den Richtungslinien der vier Kräfte parallel, da es ein räumlicher Zug ist, so verhalten sich laut Nr. 40 S. 167 die Kräfte wie diese Strecken und man hat:

Fig. 123.



$$\frac{R}{\varkappa\pi} = \frac{P}{\pi\pi'} = \frac{S}{\pi'\varkappa'} = -\frac{Q}{\varkappa'\varkappa}.$$

Anderseits sind wegen der Projectivität der Punktgebilde $\infty\,\pi\sigma\varkappa$ und $\infty'\varkappa'\varrho'\pi'$, die Gebilde $\pi\sigma\varkappa$ und $\varkappa'\varrho'\pi'$ ähnlich, und man hat weiter:

$$\frac{\pi\sigma}{\varkappa'\varrho'} = \frac{\sigma\varkappa}{\varrho'\pi'} = \frac{\varkappa\pi}{\pi'\varkappa'} = \frac{R}{S}.$$

Mittelst dieser Verhältnisse lässt sich wohl immer am leichtesten die Lage der einen Kraft Q z. B. auf R' und S' durch die Entfernungen $\sigma\,\varkappa$ und $\varkappa'\,\varrho'$ ihrer Schnittpunkte von R und S bestimmen, wenn die Lage der übrigen Schnittpunkte gegeben ist.

Das Obige war nichts anderes als die Lösung der geometrischen Aufgabe: auf den projectivischen Punktreihen $\infty\ \pi\ \sigma$ und $\varrho'\ \pi'\ \infty'$, die Punkte $\varkappa$ und $\varkappa'$ so zu bestimmen, dass die Längen der

Strecken $\varkappa\pi$ und $\pi'\varkappa'$ sich wie die gegebenen Linien, nämlich wie $R' : S'$ verhalten.

Auch das allgemeine Doppelverhältniss der 4 Kräfte $RPSQ$ lässt sich durch die Strecken von R' und S' zwischen den drei ersten Kräften allein ausdrücken. Zunächst ist:

$$(RPSQ) = (\infty\,\pi\,\sigma\,\varkappa) = (\varrho'\,\pi'\,\infty\,\varkappa') = \frac{\sigma\pi}{\sigma\varkappa} = \frac{\varrho'\varkappa'}{\varrho'\pi'}.$$

Die Substitutionen der letzten Proportionen geben weiter:

$$(RPSQ) = \frac{\sigma\pi}{\varrho'\pi'} \cdot \frac{S}{R} = \frac{\varrho'\varkappa'}{\sigma\varkappa} \cdot \frac{R}{S}.$$

Diese Gleichungen geben das Doppelverhältniss der vier Kräfte auf dem Hyperboloid, wenn das Verhältniss der Kräfte und die Abschnitte zwischen den drei Richtungslinien RPS oder SQR auf R' oder S' gegeben sind.

Bezeichnet man mit ϑ den Cubikinhalt des Tetraeders $\varkappa\pi\pi'\varkappa'$, so ist $\vartheta . \frac{R \,.\, S}{\varkappa\pi \,.\, \pi'\varkappa'}$ der Cubikinhalt desjenigen, welches durch Verbindung der Endpunkte der in ihren Richtungslinien aufgetragenen Kräfte R und S entsteht; denn die Inhalte von Tetraedern, von denen 2 Gegenkanten in die gleiche Richtungslinie fallen, verhalten sich wie die Producte dieser Gegenkanten. Ebenso ist der Inhalt des durch die beiden Kräfte P und Q gebildeten Tetraeders gleich $\vartheta . \frac{P \,.\, Q}{\pi\pi' \,.\, \varkappa'\varkappa}$.

Nun sind aber die vier Verhältnisse, mit denen ϑ multiplicirt erscheint, gleich gross, also auch die beiden Tetraeder. Da P und Q willkürlich gewählt wurden, folgt der Satz: die Inhalte aller Tetraeder, welche durch die Endpunkte zweier in ihren Richtungslinien aufgetragenen Kräfte, die das System darstellen, gebildet werden, sind gleich gross. Denken wir uns eine Leitlinie als Doppellinie einer involutorischen Kräfteschaar, welche von irgend einer andern Leitlinie durch $R\,S$ harmonisch getrennt wird, und es nähern sich mehr und mehr die Richtungslinien $R\,S$ der Doppellinie, so wird ihre senkrechte Entfernung h und der Winkel τ den sie mit einander bilden, immer kleiner, zuletzt bei dem Zusammenfallen mit dem Leitstrahl unendlich klein werden. Der Cubikinhalt des Tetraeders RS ist gleich $\frac{1}{6}\, R.S.h \sin\tau$; werden hierin h und τ unendlich klein, so müssen, wenn der Inhalt constant bleiben soll, R und S

unendlich gross werden. Jede Leitlinie, die R und S nicht schneidet, kann als solche Doppellinie betrachtet werden, denn sie kann mit RS eine Regelschaar bilden. Die Leitlinien des Systems sind also Doppellinien, in welchen zwei das Kräftesystem darstellende Kräfte zusammenfallen und unendlich gross werden.

Doch vertreten die Doppellinien nicht ganz zwei gegebene Richtungen eines Kräftepaares des Systems. Wohl ist das System bestimmt durch die Richtungslinien zweier Kräfte R und S und eine sie nicht schneidende Leitlinie L; denn auf dem Hyperboloid $RS \,.\, L$ ist durch das Paar RS und die Doppellinie L die involutorische Kräfteschaar vollständig bestimmt; jedoch noch unbestimmt durch zwei sich nicht schneidende Doppellinien L und M. Es müssen erst noch drei L und M schneidende Leitlinien b, c, d gegeben sein, um die involutorische Regelschaar zu bestimmen, von der L und M die Ordnungsstrahlen sind.

Nimmt man die erste Kraft R willkürlich als Strahl dieser Schaar L und M, so ist S der Strahl, welcher mit R die Doppellinien L und M harmonisch trennt; irgend ein anderes Paar der jetzt vollständig bestimmten involutorischen Kräfteschaar $L \,.\, M \,.\, RS$. kann dazu dienen, das Verhältniss der Kräfte R und S zu bestimmen.

Sind zwei das System darstellende Kräfte R und S vollständig gegeben, und nimmt man noch eine dritte Kraft P an, so kann man sofort sehen, ob die Involution $RS \,.\, PQ$ Doppelstrahlen besitzt oder nicht. Man lege durch P eine beliebige Ebene, welche R und S schneidet, ist dann der Mittelpunkt der Erhebungen von R und S, durch den Q geht, über diese Ebene durch die Durchstosspunkte der Kräfte von P getrennt: so hat die Involution $PQ \,.\, RS$ keinen Doppelstrahl; oder, man projicire aus einem Punkt von P die Richtungslinien R und S, dann bestimme man die Mittelebene der Momente R, S, die Q enthält, und durch den Schnitt der Projectionsebene geht; ist diese von P getrennt, so hat die Involution $PQ \,.\, RS$ keinen Doppelstrahl.

Ist ein Kräftesystem nicht durch zwei Kräfte R und S, sondern durch die Richtungslinien von zwei Paar Kräften RS und PQ gegeben, so wird sehr leicht, wie folgt, zu einer fünften nicht zur Schaar $RSPQ$ gehörenden Kraft T die entsprechende U gefunden. Man führe durch T Ebenen, welche die vier Kräfte schneiden, dann

schneiden sich die Verbindungslinien der Schnittpunkte RS und PQ auf einen Punkt von U; oder man projicire aus Punkten von T die vier Kräfte, dann geht die Ebene, welche den Schnitt der Projectionsebene RS mit dem von PQ verbindet, durch U. Zwei Punkte oder zwei Ebenen genügen zur Bestimmung von U. Dass aber alle so bestimmten Punkte in einer Geraden U liegen und alle Ebenen durch U gehen, folgt daraus, dass laut Construction U und T zugeordnete Involutionsaxen der involutorischen Regelschaar $RS.PQ$ sind.

Stillschweigend ist bisher immer vorausgesetzt worden, dass die angenommene Kraft P keine der Kräfte R oder S schneide; ist dies aber nicht der Fall, d. h. schneidet P die eine der Kräfte, z. B. R, so verbinde man den Schnittpunkt PR mit dem Durchstosspunkt der Kraft S mit der Ebene PR durch einen Leitstrahl, dann kann man R nach der Richtung von P und der des Lichtstrahles zerlegen, wodurch P bestimmt ist; am Ende des Leitstrahles setze man die in ihm wirkende Kraft zu Q zusammen.

Hieraus folgt, dass wenn von zwei Kräftepaaren eines Systems zwei nicht entsprechende sich schneiden, auch die beiden andern sich schneiden müssen. Das gilt natürlich auch noch, wenn zwei Kräfte R und S zu einem Leitstrahl zusammenfallen; also jeder Leitstrahl, welcher eine Kraft schneidet, schneidet auch die andere.

Wir sind jetzt im Stande uns einigermaassen die Vertheilung der Leitstrahlen im Raum zu denken. Jede Ebene enthält einen Büschel Leitstrahlen in dem ihr entsprechenden Punkt, und jeder Punkt einen Büschel Leitstrahlen in der ihm entsprechenden Ebene. Dreht sich eine Ebene um eine Linie, so rückt der Leitstrahlenbüschel in ihr perspectivisch auf der ihr entsprechenden Linie vor, und erfüllt so den ganzen Raum. Dreht sich eine Ebene um einen Leitstrahl — so rückt der Mittelpunkt des Büschels auf diesem Leitstrahl selbst vor.

Alle Hyperboloide auf denen irgend zwei Paare entsprechender Kräfte liegen, sind von Leitschaaren erfüllte. Sie erfüllen also den ganzen Raum in allen Richtungen, und doch sind nicht alle Linien des Raumes Leitstrahlen.

62. Zusammenhang des Kräftesystems mit dem Nullsystem und den Curven dritter Ordnung.

Die in der vorigen Nummer entwickelten, vom Maass unabhängigen projectivischen Eigenschaften des Kräftesystems sind auch in der Geometrie der Lage bekannt, wo das Kräftesystem Nullsystem genannt wird. Der einer Ebene entsprechende Punkt heisst ihr Nullpunkt, und die einem Punkt entsprechende Ebene seine Nullebene.

Sehr ausführlich und ganz für unsere Zwecke passend, ist es in *Staudts* Beiträgen S. 58 bis 62 behandelt; wir haben in der vorigen Nummer das für uns wesentlichste reproducirt, immer die Beziehungen zu den Kräften festhaltend, und es genügt hier auf die Indentität dieser Systeme aufmerksam gemacht zu haben.

Da durch eine Raumcurve dritter Ordnung ein Nullsystem bestimmt ist, so kann auch jedes Kräftesystem durch eine solche Raumcurve dargestellt werden, die dann die Ordnungscurve des Systems heisst. Die Beziehung eines Kräftesystems auf eine solche Curve leistet in der Praxis gerade keine besondern Dienste, weil die benöthigten Mittelkräfte selbst, ebenso leicht direct, als mittelst einer solchen Curve construirt werden können; dagegen geben sie einen ungemein klaren Begriff von dem Zusammenhang entsprechender Punkte, Ebenen und Linien, welcher ganz analog dem der entsprechenden Pole und Polaren in ebenen Polarsystemen ist; wir können es daher nicht unterlassen denselben hier noch hervorzuheben.

In der Ebene kann man durch jeden Punkt zwei reelle oder imaginäre Tangenten an einer Curve zweiter Ordnung ziehen, die Verbindungslinie der Berührungspunkte ist die Polare des Punktes. Ebenso gehen durch jeden Punkt des Raumes drei Osculationsebenen der Raumcurve dritter Ordnung, von denen zwei imaginär sein können, und die Ebene der drei Osculationspunkte ist die Nullebene des Punktes, welche immer durch ihn geht. Umgekehrt, jede Ebene schneidet diese Raumcurve in drei Punkten, von denen zwei imaginär sein können. Die drei Osculationsebenen schneiden sich in dem Nullpunkt der Ebene. (*Staudt*, Beiträge Seite 313.) Einer Osculationsebene entspricht ihr Osculationspunkt als Nullpunkt.

Alle Strahlen, welche durch den Nullpunkt gehen und in der entsprechenden Nullebene liegen, sind Leitstrahlen, also auch alle Strahlen, welche durch einen Curvenpunkt gehen und in der Osculationsebene liegen. Da die Osculationsebene die Curve dreipunktig schneidet, so ist die in ihr liegende Curventangente der einzige Leitstrahl, welcher zwei Curvenpunkte verbindet; also unter den Verbindungslinien zweier Curvenpunkte sind nur die Berührungslinien Leitstrahlen.

Der Verbindungslinie zweier Curvenpunkte entspricht die Schnittlinie der zwei Osculationsebenen, welche die Curve nie schneidet, denn sonst hätte jede der beiden Osculationsebenen ausser dem Osculationspunkt noch einen Punkt mit der Curve gemein. Einem, zur Curve dritter Ordnung perspectivischen Kegel zweiter Ordnung entspricht ein eben solcher Strahlenbüschel, der eine Curve zweiter Ordnung umhüllt, welche in einer Osculationsebene liegt.

Einer Linie, die durch einen Curvenpunkt geht und nicht in der Osculationsebene liegt, entspricht eine andere, die in der Osculationsebene des Punktes liegt, aber nicht durch ihn geht. Liegt die Linie in der Osculationsebene, so ist sie ein Leitstrahl und entspricht sich selbst.

Auf verschiedene Weisen können Regelflächen construirt werden, welche die Ordnungscurve enthalten: es ist eine solche bestimmt durch eine Linie, die durch einen Curvenpunkt geht, *Staudt*'s Beiträge Nr. 472; oder durch eine Secante (Linie, welche zwei reelle oder imaginäre Curvenpunkte verbindet) und einen beliebigen Punkt, der weder in der Curve noch in der Secante liegt, und durch den eine zweite Secante bestimmt ist, *Staudt* Beitr. Nr. 478; also auch durch zwei Secanten. Jeder solcher Regelfläche entspricht eine andere Regelfläche, in welcher der der Ordnungscurve sich anschmiegende Ebenenbüschel dritter Ordnung (Inbegriff aller Osculationsebenen) enthalten ist (welche von allen Osculationsebenen berührt wird). Unter den Secanten der einen Regelfläche und den Schnittlinien zweier Ebenen der andern befinden sich je zwei, welche die Curve berühren, von diesen vier Linien fallen die zwei sich selbst entsprechende Tangenten zu zweien zusammen. Die beiden Regelflächen haben daher zwei Leitstrahlen gemein. Da diese sich nicht schneiden, so schneiden sich die Regelflächen in noch zwei weitern Linien, haben also im

Ganzen nur vier gerade Linien gemein, die paarweise imaginär sein können. Demnach können diese beiden Regelschaaren sich nicht mehr in einer Curve dritter Ordnung schneiden, woraus folgt, dass keine der das System bestimmenden involutorischen Regelschaaren, Nr. 61 S. 222, perspectivisch mit einer Ordnungscurve des Systems liegen kann. Auf jeder Oberfläche dieser Regelschaaren könnten unendlich viele Curven dritter Ordnung construirt werden, allein keine derselben kann Ordnungscurve des Nullsystems sein.

Nachdem wir gesehen haben, wie durch eine Raumcurve dritter Ordnung das Nullsystem bestimmt wird, d. h. wie eine solche Curve Ordnungscurve des Kräfte- oder Nullsystems sein kann, haben wir noch zu zeigen, wie umgekehrt, für gegebene Kräfte oder Nullsysteme, Ordnungscurven construirt werden können. Es sei zunächst das System wie in Nr. 54 durch eine involutorische Regelschaar $pp_1 \,.\, qq_1$ gegeben. Dann können auf derselben drei beliebige Leitstrahlen $a\,b\,c$ gewählt werden, welche von der Curve berührt werden sollen, wir können auch auf zweien derselben $a\,b$ z. B. noch die Berührungspunkte willkürlich wählen, es seien dies die Punkte $A = ap$ und $B = bq$. Dann sind ap_1 und bq_1 die Nullebenen $A_1 B_1$ dieser Punkte, mithin auch die Osculationsebenen der Raumcurve in diesen Punkten. Laut *Staudt* Beit. Nr. 481 S. 311 werden die beiden Berührungspunkte $B\,C$ auf b und c harmonisch von den Ebenen ap und ap_1 getrennt, wir erhalten also den Strahl r, auf welchem der Berührungspunkt C des Leitstrahles c liegt, indem wir den vierten harmonischen Strahl in $pqp_1 r$ suchen. Aus demselben Grund sind die Berührungspunkte A und C von den Ebenen bq und bq_1 harmonisch getrennt; r ist also auch der vierte harmonische Strahl in $qpq_1 r$, mithin ein Doppelstrahl der Involution $pq \,.\, p_1 q_1 \,.\, r$. Der andere Doppelstrahl r_1 ist von r durch p und q harmonisch getrennt, also der vierte Strahl von $qrpr_1$, da es auch die Berührungspunkte AB durch die Ebene cr und cr_1 sind, so ist cr_1 die Osculationsebene des Punktes. Dass die Strahlen $r\,r_1$ wirklich der Involution $pp_1 \,.\, qq_1$ angehören, folgt daraus, dass p_1, q_1 und r_1 die vierten harmonischen Strahlen in $rpqp_1$, $pqrq_1$ und $qrpr_1$ sind.

Jeder der drei Kegel, welche

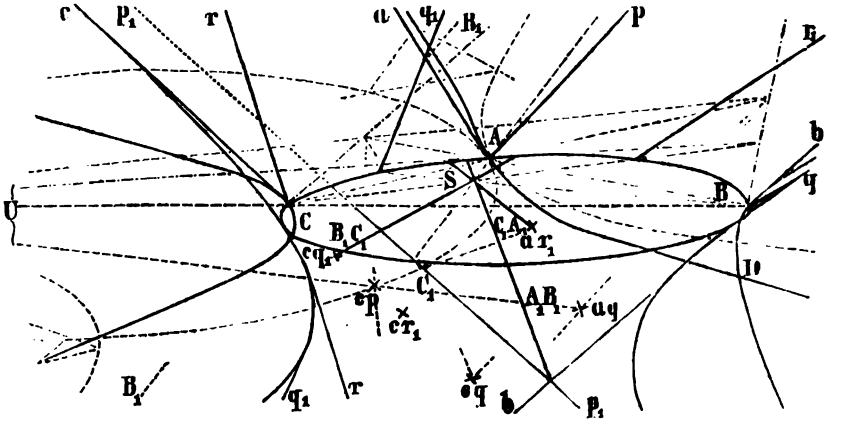
ihre Spitzen haben in:	A	B	C
und die Ebenen	$A)\ p_1 bc$	$B)\ q_1 ca$	$C)\ r_1 ab$

berühren, und zwar je die zwei letzten in $A) BC$ $B) CA$ $C) AB$ projicirt die Ordnungscurve, die sich also als Schnitt irgend zweier dieser Kegel ergiebt.

63. Construction der Ordnungscurve eines Kräftesystems.

In Fig. 124 haben wir es versucht, die eben angedeuteten Operationen auszuführen. Willkürlich wurden die drei Leitlinien $a\,b\,c$ und die auf ihnen liegenden Punkte $A\,B\,C$, in welchen sie

Fig. 124.



von der Raumcurve berührt werden sollen, angenommen; willkürlich können auch noch zwei z. B. die durch A und B gehenden Strahlen p und q der involutorischen Regelschaar angenommen werden, dadurch ist der Strahl r bestimmt, der durch C geht und den Kegelschnitt, die Hyperbel $a\,b\,c\,p\,q$ berührt, unter der die Regelschaar erscheint. Durch dieselbe Bedingung und dadurch, dass $r\,p\,q\,p_1$, $p\,q\,r\,q_1$ und $q\,r\,p\,r_1$ harmonische Würfe sein müssen, sind auch die drei letzten Strahlen $p_1\,q_1\,r_1$ gegeben. Die Zeichnung dieser neun Strahlen derselben Hyperbel bedarf keiner weitern Erläuterung.

Die drei Null- oder Osculationsebenen der Punkte ABC, oder die Ebenen $A_1 = a\,p_1$, $B_1 = b\,q_1$, $C_1 = c\,r_1$ wurden durch ihre Schnittlinien angegeben; die Linie $A_1\,B_1$ geht durch die Punkte

aq_1 und bp_1, denn diese Punkte liegen in jeder der beiden Ebenen, ebenso geht $B_1 C_1$ durch die Punkte br_1 und cq_1 und $C_1 A_1$ durch cp_1 und ar_1. Diese drei Linien schneiden sich im Schnitt S der drei Ebenen, dem Nullpunkt der Ebene ABC, dem Centrum der Involution, in welcher diese Ebene von $pp_1 . qq_1 . rr_1$ geschnitten wird.

Zur Bestimmung der beiden Kegel, welche aus B und C die Raumcurve projiciren, wurden die Schnitte derselben mit der Ebene $A = ap$ construirt. Der Kegel B berührt die Ebene B_1 im Strahl b; die Ebene $B_1 = bq_1$ schneidet $A = ap$ in der gestrichten Verbindungslinie der Punkte aq_1 (bp), (wir klammern Elemente, die ausserhalb des Rahmens der Figur liegen, ein), denn beide Punkte liegen in beiden Ebenen; der Strahl b schneidet A in (bp); mithin wird der zu construirende Kegelschnitt B_1 in (bp) berühren. Die Ebene Ba schneidet A in der Linie a und berührt den Kegel im Strahl BA, der Schnitt des Kegels berührt also die Linie a in A. Die Ebene Bc, in der auch der Strahl q liegt, weil er die Leitlinie c schneiden muss, schneidet $A = ap$ in der Verbindungslinie der Punkte cp, aq und berührt den Kegel im Strahl BC; der gesuchte Kegelschnitt berührt also die Linie (cp, aq) in ihrem Schnitt (U) mit BC. Diese drei Tangenten mit ihren Berührungspunkten sind mehr als genügend um den gesuchten Kegelschnitt, die in der Figur punktirte Hyperbel zu construiren. Aus selbstverständlichen Gründen ist es vortheilhaft, für diese Construction den Strahlenbüschel U, wo die Verbindungslinie der Kegelspitzen B und C die Ebene A schneidet, zu benützen.

Genau die gleichen Schlüsse geben die Constructionselemente des Schnittes des Kegels C mit $A = ap$; er berührt den in der Figur ebenfalls punktirten Schnitt $C_1 = ar_1$, cp in dem Punkt cp; den Schnitt (ar) (bp) der Ebene Cb mit A, in seinem Schnittpunkt (U) mit BC; und endlich die Linie a in A. Mittelst dieser drei Tangenten und ihrer Berührungspunkte kann die in Fig. 124 punktirte Ellipse gezeichnet werden, wobei es zweckmässig ist, die Ellipsenpunkte auf denselben Strahlen von U zu construiren, auf welcher schon ein Hyperbelpunkt bestimmt wurde.

Linien, welche von den Kegelspitzen B und C aus solche Curvenpunkte, die auf einem und demselben Strahl von U liegen, projiciren, sind Erzeugungslinien der beiden Kegel, welche in

einer und derselben Ebene liegen, und geben daher durch ihren Schnitt einen Punkt der zu construirenden Raumcurven.

Der Punkt U liegt sowohl in der Ebene $A = ap$ als auch in der Ebene ABC, demnach ist die strichpunktirte Linie AU die Schnittlinie der Ebene ABC mit $A = ap$, welche letztere Ebene das Hyperboloid in A berührt, mithin berührt auch AU den Schnitt der Ebene ABC mit dem Hyperboloid. Wenn wir uns daran erinnern, dass U der Schnittpunkt der Linien (aq, cp) mit (ar, bp), so folgt durch Vertauschung der Zeichen, dass der Schnitt der Linien (br, aq) und (bp, cq), auf der Linie AC und auf der strichpunktirten Tangente B, endlich der Schnitt (cq, ar) und (qr, br) auf AB und der Tangente C liege. Diese drei Schnittpunkte liegen auf einer geraden Linie, der Polaren des Punktes S bezüglich des Schnittes des Hyperboloids mit ABC. Durch jene drei Punkte ist das diesem Schnitt umschriebene strichpunktirte Dreieck bestimmt, mit dessen Hülfe jetzt der Schnitt selbst, eine stark ausgezogene Ellipse in Fig. 124 construirt werden kann.

Bei der Darstellung Fig. 124 haben wir alle Erzeugungslinien des vordern Mantels oberhalb der Ellipse stark ausgezogen, den vordern Mantel unter der Ellipse dachten wir uns ganz weg und nur die zur Construction nothwendigen Schnittpunkte von Leitlinien und Strahlen wurden durch Kreuzchen markirt. Die Erzeugungslinien des hintern Mantels wurden unter dem vordern punktirt.

Die Raum- oder Ordnungscurve des Nullsystems schneidet die unendlich ferne Ebene in 3 Punkten und besteht daher aus 3 Aesten. Sie hat mit dem Hyperboloid die Doppelpunkte ABC, also im Ganzen 6 Punkte gemein; da nun eine solche Curve keine 7 Punkte mit einem Hyperboloid gemein haben kann, ohne ganz auf demselben zu liegen, da sie ferner in den das Hyperboloid bei ABC schneidenden Osculationsebenen $A_1 B_1 C_1$ die Leitlinien abc berührt und nicht schneidet, so folgt weiter noch, dass die Raumcurve ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des Hyperboloids liegen müsse; im gegenwärtigen Fall liegt sie ausserhalb. Sie geht auch noch durch den Schnittpunkt der punktirten Ellipse und Hyperbel, als Schnittpunkt der Kegelflächen B und C; dieser Punkt und der Doppelpunkt A sind die drei Punkte, welche sie mit der Ebene $A = ap$, die in A von ihr geschnitten wird, gemein hat. In ihrer Projection Fig. 124 erscheint sie natürlich als

ebene Curve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt in D; da sie im vorliegenden Fall drei Asymptoten hat, so hat sie nur einen reellen Inflectionspunkt, der oberhalb A liegt.

Der Figur 124 liegen keine Maasse zu Grund, wären bestimmte Fälle zu behandeln, so müssten natürlich zwei Projectionen ausgeführt werden. Wählt man als die eine Projectionsebene die Ebene ABC und als die andere die Ebene $A = ap$, so werden die beiden Projectionen zusammen nicht mehr Mühe verursachen als die einzige, jedoch übersichtlichere von Fig. 124.

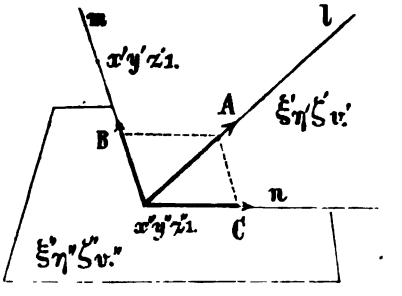
Zur Bestätigung des im Eingang Gesagten machen wir darauf aufmerksam, dass die Ordnungscurve des Nullsystems nie als Constructionsmittel, sondern als Endresultat von Constructionen mittelst der involutorischen Regelschaar aufgetreten ist. Die Ordnungscurve ist demnach nur als ein Vorstellungsmittel entsprechender Richtungslinien eines Kräftesystems aufzufassen, während die involutorische Regelschaar das Hauptdarstellungsmittel des Null- und Kräftesystems ist.

Die Fig. 124 kann auch noch dazu dienen, den Inhalt der Nr. 483 bis 487 von *Staudt*'s Beiträgen zur Anschauung zu bringen.

64. Analytische Zusammensetzung der Kräfte im Raum.

Die analytische Zusammensetzung der Kräfte im Raum ergiebt sich als eine einfache Verallgemeinerung der schon in Nr. 47 aufgestellten Summenformeln; wir gelangen zu denselben, indem wir gerade so als wie es Nr. 57 S. 210 angedeutet wurde, vorgehen, einen beliebigen Punkt $(x'y'z'1)$ und eine beliebige Ebene $(\xi''\eta''\zeta''1)$, Fig. 125, annehmen, den Schnittpunkt $(x''y''z''1'')$ der Linie l mit der Ebene und die Projectionsebene $(\xi'\eta'\zeta'v')$ der Linie l aus dem Punkt bestimmen.

Fig. 125.



Die Verbindungslinie m der beiden Punkte, und die Schnittlinie n der beiden Ebenen, schneiden l in einem Punkte und liegen in derselben Ebene. Wir können daher die in l wirkende Kraft A nach den Richtungen von m und n, in die beiden Seitenkräfte B und C zerlegen, und dann in $x'y'z'1$ alle B, in $\xi''\eta''\zeta''v''$ alle C nach den schon bekannten Regeln summiren. Diese Operationen gestalten sich wie folgt:

Die Coordinaten des Schnittpunktes x''_g . . und der Projectionsebene ξ'_g bestimmen sich, wie in Nr. 47 S. 178 aus den Gleichungen:

$$\xi'_y = l_{ik} x'_h + l_{kh} x'_i + l_{hi} x'_k \quad \text{und:} \quad u'' x''_g = l_{gh} \xi''_h + l_{gi} \xi''_i + l_{gk} \xi_k .$$

Durch Multiplicationen mit den Werthen ξ'' und x' bilden wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\xi'_g \xi''_h &= (l_{ik} x'_h + l_{kh} x'_i + l_{hi} x'_k) \xi''_h , \\
- \xi'_h \xi''_g &= -(l_{ki} x'_g + l_{gh} x'_i + l_{ig} x'_k) \xi''_g , \\
+ u'' x''_i x'_k &= (l_{ig} \xi''_g + l_{ih} \xi''_h + l_{ik} \xi''_k) x'_k , \\
- u'' x''_k x'_i &= -(l_{kg} \xi''_g + l_{ki} \xi''_i + l_{kh} \xi''_h) x'_i .
\end{aligned}$$

Nun sind

$$m_{ik} = (x''_i x'_k - x''_k x'_i) u'', \quad \text{und} \quad n_{ik} = \xi'_g \xi''_h - \xi'_h \xi''_g ,$$

die Liniencoordinaten der Linien mn; bezeichnet man ferner noch mit b die Constante:

$$b = \xi''_g x'_g + \xi''_h x'_h + \xi''_i x'_i + \xi''_k x'_k = \xi'' x' + \eta'' y' + \zeta'' z' + 1 ,$$

so giebt die Addition der obigen vier Gleichungen:

$$m_{ik} + n_{ik} = b l_{ik} .$$

Es ist hier zu beachten, dass mn und l nicht mehr gleicher Stufe sind, sondern dass erstere den Factor b gewonnen haben.

Projicirt man die drei Linien lmn aus irgend einem Punkt $x''' y''' z''' 1$, und bildet die Gleichungen $m''' n''' l'''$ der drei Projectionsebenen gerade so wie wir Nr. 47 S. 179 die Gleichung l' mit den l_{ik} gebildet haben, so enthalten diese die Werthe m_{ik} n_{ik} und l_{ik} bei gleicher Zusammensetzung nur im ersten Grad, es werden daher auch diese Gleichungen in der Beziehung stehen:

$$m''' + n''' = b l''' .$$

Laut Nr. 47 S. 180 sind die drei Kräfte ABC, weil $l''' m''' n'''$ in einer Ebene liegen, durch die Gleichung:

$$\frac{B}{e'} m''' + \frac{C}{e''} n''' = \frac{A}{e} l'''$$

mit einander verbunden, worin e' und e'' gerade so aus den Coefficienten m_{4i} n_{4i} gebildet werden, als wie e aus l_{4i} Nr. 47 S. 178.

Diese Gleichungen können aber wegen der variabeln Coordinaten x'''_i, welche die Grössen $l''' m''' n'''$ enthalten, nur dann gleichzeitig bestehen, wenn:

$$\frac{B}{e'} = \frac{C}{e''} = \frac{A}{be}$$

ist.

Wir bestimmen jetzt die Mittelkraft aller durch den Punkt $(x' y' z' 1)$ gehenden Kräfte B nach Nr. 47 S. 179, indem wir die mit dem Normalfactor multiplicirten Gleichungen der Durchstosspunkte der Richtungslinien m mit der Ebene $(\xi'' \eta'' \zeta'' 1)$

summiren. Die Gleichung der Durchstosspunkte ist identisch mit der der l, multiplicirt mit b, also gleich $\lambda'' b$, wenn wir wie früher Nr. 47 S. 178 die Gleichung des Durchstosspunktes mit λ'' bezeichnen. Der Normalfactor ist $\frac{B}{e'}$, demnach die Gleichung α'' des Durchstosspunktes der Mittelkraft mit der Ebene $(\xi'' \eta'' \zeta'' 1)$:

$$\alpha'' = \Sigma \lambda'' b \frac{B}{e'} = \Sigma \lambda'' \frac{A}{e}.$$

Diese Gleichung, die vollkommen mit der auf Nr. 47 S. 179 erhaltenen übereinstimmt, ist in Folge dessen, dass der Factor b ausgefallen ist, ganz unabhängig von den Coordinaten des Punktes $(x' y' z' 1)$, man erhält daher für dieselbe Ebene $(\xi'' \eta'' \zeta'' 1)$ auch immer denselben Punkt α''.

Ein ähnliches Resultat liefert die Zusammensetzung der in n wirkenden Seitenkräfte C, die alle in der Ebene $(\xi'' \eta'' \zeta'' 1)$ liegen. Wir projiciren sie aus dem Punkte $(x' y' z' 1)$; die Gleichungen der Projectionsebenen sind gleich den der l', multiplicirt, wie die der Richtungslinien der Kräfte mit dem Factor b, den die n_{ik} gewonnen haben. Die Gleichung der Projectionsebene der Mittelkraft ist dann Nr. 47 S. 179 gleich

$$\alpha' = \Sigma l' b \frac{C}{e''} = \Sigma l' \frac{A}{e}.$$

Auch diese Gleichungen sind unabhängig von den Coordinaten der Ebene $(\xi'' \eta'' \zeta'' 1)$; man erhält daher jederzeit dieselbe Projectionsebene, in welcher Ebene auch die Zerlegung der Kräfte vorgenommen wurde.

Die Summen a_{ik}, Nr. 47 S. 180, genügen der Gleichung: $a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = \mathfrak{R} = 0$. Dies ist jetzt nicht mehr der Fall, weil die a_{ik} und die l_{ik} nicht mehr durch Verbindung der Coordinaten eines und desselben Punktes oder einer und derselben Ebene mit denen irgend anderer Punkte oder Ebenen gebildet werden können, weil eben die sämmtlichen l_{ik} weder in einer Ebene liegend, noch durch einen Punkt gehend vorausgesetzt werden. Findet aber die Gleichung $\mathfrak{R} = 0$ dennoch zufälliger Weise statt, so sind die a_{ik} die Coordinaten einer Linie, durch die alle Projectionsebenen α' gehen, in der alle Durchstosspunkte α'' liegen; und das System reducirt sich in diesem Fall auf eine einzige, in dieser Linie wirkende Kraft.

Wir wiederholen zum Schluss die bis jetzt bewiesenen Sätze, welche nun auch für den Raum allgemeine Gültigkeit haben, und in denen die Nr. 47 S. 180 ausgesprochenen enthalten sind.

Mit den Coordinaten l_{ik} der Linien, in welchen die Kräfte A wirken, bilde man die Factoren:

$$e = \pm \sqrt{l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + 2 l_{42} l_{43} \omega_1 + 2 l_{43} l_{41} \omega_2 + 2 l_{41} l_{42} \omega_3},$$

worin ω die cos der Coordinatenaxwinkel bezeichnen, und wo das Zeichen so zu wählen ist, dass $(l_{41} \xi + l_{42} \eta + l_{43} \zeta) \frac{1}{e}$ die Gleichung des unendlich fernen Punktes sei, gegen den hin die Kraft A wirkt; und mit diesen die Summen:

$$a_{ik} = \Sigma l_{ik} \frac{A}{e},$$

dann sind die Coordinaten der Ebene $(\xi'_m\ \eta'_m\ \zeta'_m\ v'_m)$, welche aus dem Punkt $(x'\ y'\ z'\ 1)$ die eine der beiden Kräfte projicirt, auf welche das System reducirt werden kann, wenn die andere dieser Kräfte durch den Punkt geht:

$$\xi'_m = \Sigma\xi' \frac{A}{e} = \quad + a_{34}y' + a_{42}z' + a_{22},$$

$$\eta'_m = \Sigma\eta' \frac{A}{e} = a_{43}x' \quad + a_{14}z' + a_{31},$$

$$\zeta'_m = \Sigma\zeta' \frac{A}{e} = a_{24}x' + a_{41}y' \quad + a_{12},$$

$$v'_m = \Sigma v' \frac{A}{e} = a_{32}x' + a_{13}y' + a_{21}z' \quad ;$$

und die Gleichung der projicirenden Ebene ist:

$$a' = \Sigma l' \frac{A}{e} = \xi'_m x + \eta'_m y + \zeta'_m z + v'_m .$$

Ferner sind die Coordinaten des Punktes $(x''\ y''\ z''\ 1'')$, in welchen die Ebene $(\xi''\ \eta''\ \zeta''\ v'')$ von der einen der beiden Kräfte durchstossen wird, wenn die andere in der Ebene liegt:

$$x''_m = \Sigma x'' \frac{A}{e} = + a_{12}\eta'' + a_{13}\zeta'' + a_{14}, \text{ u. s. w.}$$

Von grosser Bedeutung ist es, wie wir in den nächsten Nummern sehen werden, zu zeigen, dass die Abhängigkeit x''_m von den ξ'' dieselbe ist, als wie die der x' von ξ'_m. Um diese Identität der Beziehungen mehr hervorzuheben, bringen wir die x_m in die folgende Form:

$$\mathfrak{R}\,x''_m \quad + a_{12}\eta'' + a_{13}\zeta'' + a_{14}v'' = \mathfrak{R}\,x''_m + \Sigma x''u''\frac{A}{e} = 0,$$

$$\mathfrak{R}\,y''_m + a_{21}\xi'' \quad + a_{23}\zeta'' + a_{24}v'' = \mathfrak{R}\,y''_m + \Sigma y''u''\frac{A}{e} = 0,$$

$$\mathfrak{R}\,z''_m + a_{31}\xi'' + a_{32}\eta'' \quad + a_{34}v'' = \mathfrak{R}\,z''_m + \Sigma z''u''\frac{A}{e} = 0,$$

$$\mathfrak{R} \quad + a_{41}\xi'' + a_{42}\eta'' + a_{43}\zeta'' \quad = \mathfrak{R} \quad + \Sigma u''\frac{A}{e} = 0.$$

Diese Gleichungen geben für die $x''_m \ldots .$, wie man sich leicht überzeugt, die Werthe $x'\ y'\ z'\ 1$, wenn man für $\xi''\ \eta''\ \zeta''\ v''$ die obigen Werthe $\xi'\ \eta'\ \zeta'\ v'$ einsetzt.

Man sieht hieraus, dass wenn dieser Zusammenhang evident sein soll, die $\xi\,\eta\,\zeta\,v$ nicht mehr willkürlich gewählt werden dürfen, sondern dass sie der 4. Gleichung zu genügen haben, damit die 4. Ordinate $u = 1$ werde.

Wäre eine Ebene gegeben durch die Coordinaten $\xi''\ \eta''\ \zeta''\ v''$, welche dieser Gleichung nicht genügen, so müssten diese Coordinaten durch Multiplication mit dem Factor:

$$-\frac{\mathfrak{A}}{a_{41}\xi'' + a_{42}\eta'' + a_{43}\zeta''},$$

transformirt werden.

Die Gleichung des Durchstosspunktes ist:

$$a'' = \Sigma\lambda''\frac{A}{e} = x''_m\,\xi + y''_m\,\eta + z''_m\,\zeta + v.$$

In diesen Gleichungen haben die $(\xi'\eta'\zeta'v')$, $(x''y''z''1)$, l' und λ'' dieselbe Bedeutung als wie in Nr. 47 S. 179; sie sind übrigens gerade so aus der l_{ik} entstanden, wie die $(\xi'_m\,\eta'_m\,\zeta'_m\,v'_m)$, $(x''_m\,y''_m\,z''_m\,1)$, $a'\,a''$ aus den a_{ik}.

Wird die Art der Zerlegung und dann die Reduction des Systems auf 2 Kräfte vorausgesetzt, so lassen sich die obigen Gleichungen auch wie folgt in Worte kleiden:

Werden die Coordinaten der Richtungslinien eines Kräftesystems mit dem jeweiligen Normalfactor $\frac{A}{e}$ oder $\frac{\mathfrak{A}}{E}$, wenn die Kraft unendlich fern und unendlich klein ist, multiplicirt und die Gleichungen der Projectionsebenen dieser Richtungslinien aus einem festen Punkte oder ihrem Durchstosspunkte mit einer festen Ebene gebildet, so sind die Summen dieser Gleichungen die entsprechenden Gleichungen der Projectionsebene oder des Durchstosspunktes der einen der beiden Mittelkräfte des Systems.

Dass für eine unendlich ferne und unendlich kleine Kraft mit dem Momente $\mathfrak{A}$, für die also $a_{14}\,a_{24}\,a_{34}$ und e gleich 0 sind, der Normalfactor gleich $\frac{\mathfrak{A}}{E}$ werde, worin:

$$E^2 = -\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & l_{23} \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & l_{31} \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & l_{32} \\ l_{23} & l_{31} & l_{12} & 0 \end{vmatrix},$$

ist, wird erst später in Nr. 67 bewiesen werden.

65. Das Nullsystem und conjugirte Linien.

Da die Gleichungen, durch welche in der vorigen Nummer die Abhängigkeit der $\xi'_m\,\eta'_m\,\zeta'_m\,v'_m$ von den $x'\,y'\,z'\,1$ und die der $x''_m\,y''_m\,z''_m\,u''_m$ von den $\xi''\,\eta''\,\zeta''\,v''$ ausgedrückt wird, vom ersten Grade sind, so stellt jede der beiden

Serien von 4 Gleichungen ein geometrisch reciprokes System dar, in welchem nämlich jedem Punkt eine Ebene und umgekehrt entspricht. Wir haben schon in den vorigen Nummern darauf aufmerksam gemacht, dass die beiden Serien von 4 Gleichungen eine und dieselbe Abhängigkeit ausdrücken.

Die Beziehungen, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden, sind identisch mit denen, welche die zweite Serie von Gleichungen darstellt; die beiden Systeme bilden daher nur ein einziges, aber reciprokes System, ein Polarsystem.

Multiplicirt man die Gleichungen $\xi'_m\ \eta'_m\ \zeta'_m\ v'_m$ mit $x'\ y'\ z'\ 1$, so erhält man wegen $a_{ik} = -a_{ki}$

$$x'\,\xi'_m + y'\,\eta'_m + z'\,\zeta'_m + v'_m = 0;$$

d. h. jeder Punkt liegt in der ihm entsprechenden Ebene, und umgekehrt: Das Polarsystem ist also ein Nullsystem.

Besonders wichtig für uns sind entsprechende Linien, in welchen zwei Kräfte wirken, durch welche das Kräftesystem dargestellt werden kann. Wenn wir auf der einen zweier entsprechenden Kräfte zwei Punkte annehmen, so sind die diesen Punkten entsprechenden Ebenen Projectionsebenen der andern Kraft; diese wird daher durch den Schnitt der beiden Ebenen bestimmt.

Der, mit einem beliebigen Factor μ multiplicirten Ordinate m_{ik}, der Linie, welche die beiden Punkte $(x'\ y'\ z'\ 1')$ und $(x''\ y''\ z''\ 1'')$ mit einander verbindet, also:

$$\mu m_{ik} = \begin{vmatrix} x'_i & x'_k \\ x''_i & x''_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1}\xi' + a_{i2}\eta' + a_{i3}\zeta' + a_{i4}v', & a_{k1}\xi' + a_{k2}\eta' + a_{k3}\zeta' + a_{k4}v' \\ a_{i1}\xi'' + a_{i2}\eta'' + a_{i3}\zeta'' + a_{i4}v'', & a_{k1}\xi'' + a_{k2}\eta'' + a_{k3}\zeta'' + a_{k4}v'' \end{vmatrix}$$

entspricht der Schnitt der beiden Ebenen $(\xi'\ \eta'\ \zeta'\ v')$ und $(\xi''\ \eta''\ \zeta''\ v'')$, setzen wir die Liniencoordinaten dieses Schnittes gleich:

$$n_{ik} = \begin{vmatrix} \xi'_g & \xi'_h \\ \xi''_g & \xi''_h \end{vmatrix},$$

worin $ghik$ eine Combination derselben Classe der vier Zahlen 1 2 3 4 ist, und führen die Determinante aus, so erhalten wir:

$$\mu m_{ik} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{k1} & a_{k2} \end{vmatrix} n_{34} + \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k3} \end{vmatrix} n_{42} + \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i4} \\ a_{k1} & a_{k4} \end{vmatrix} n_{23} + \begin{vmatrix} a_{i2} & a_{i3} \\ a_{2k} & a_{k3} \end{vmatrix} n_{14} + \begin{vmatrix} a_{i2} & a_{i4} \\ a_{k2} & a_{k4} \end{vmatrix} n_{31} + \begin{vmatrix} a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k3} & a_{k4} \end{vmatrix} n_{12}.$$

Sind in den Determinanten $\begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{kp} & a_{kq} \end{vmatrix}$ einer oder beide Indexe pq den Indexen ki gleich, so reducirt sie sich auf $a_{ik}\ a_{pq}$, wo pq zwei beliebige der Zahlen 1 2 3 4 sind. Dies ist bei 5 der Determinanten der Fall, einmal aber sind die 4 Zahlen $ikpq$ von einander verschieden, also eine Combination von 1 2 3 4. Nun ist aber

$$a_{ik}\ a_{pq} + a_{iq}\ a_{kp} + a_{ip}\ a_{qk} = \mathfrak{R},$$

demnach

$$\begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{kp} & a_{kq} \end{vmatrix} = -\mathfrak{R} + a_{ik}\ a_{pq};$$

und wir haben:

$$\mu m_{ik} = (a_{12}n_{34} + a_{13}n_{42} + a_{14}n_{23} + a_{23}n_{14} + a_{24}n_{31} + a_{34}n_{12})\, a_{12} - \Re n_{ik}.$$

Die aus a und n symmetrisch gebildete Summe in der Klammer wollen wir mit dem Wort Linienmoment und den Buchstaben S_{an} bezeichnen; μ, über das wir frei verfügen können, setzen wir gleich $\Re$ und erhalten so die Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten zweier entsprechenden Linien:

$$(m_{ik} + n_{ik})\,\Re = S_{an}\, a_{ik}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen der möglichen 6 Combinationen von ik mit den ergänzenden a_{gh}, wo $ghik$ eine Combination derselben Classe der 4 Zahlen 1 2 3 4 ist, und addirt sie alle, so erhält man:

$$(S_{am} + S_{an})\,\Re = S_{an}\, S_{aa};$$

S_{aa} ist aber gleich $2\Re$, mithin ist $S_{an} = S_{am}$; und die obige Gleichung zwischen den m_{ik} und n_{ik} wird ganz symmetrisch, nämlich:

$$(m_{ik} + n_{ik})\,\Re = a_{ik}\, S_{am} = a_{ik}\, S_{al}.$$

Diese Gleichung bestätigt die charakteristische Eigenschaft des Polarsystems, dass in demselben alle Linien sich gegenseitig entsprechen.

Multiplicirt man diese Gleichung, wie oben einmal mit den m_{gh}, dann mit den n_{gh} und summirt dieselben, so erhält man:

$$(S_{mm} + S_{mn})\,\Re = S^2_{am}$$
$$(S_{mn} + S_{nn})\,\Re = S^2_{an},$$

woraus die Gleichheiten

$$S_{mm} = S_{nn}$$

folgen.

$S_{mm} = 0$ involvirt also auch $S_{nn} = 0$; $S_{mm} = 0$ ist die Bedingung, der die m_{ik} genügen müssen, um die Coordinaten einer geraden Linie darzustellen; die obige allgemeine Gleichung giebt also für die n_{ik} wirklich die Coordinaten einer geraden Linie, wenn für die m_{ik} solche angenommen worden sind. Sind aber S_{mm} und S_{nn} gleich 0, so folgt auch aus diesen Gleichungen:

$$S_{mn}\,\Re = S^2_{am} = S^2_{an} = S_{am}\, S_{an}.$$

Sind p_{ik} und q_{ik} die Coordinaten zweier anderen entsprechenden Linien, und multiplicirt man die obigen Gleichungen mit p_{gh}, und die Gleichungen

$$(p_{ik} + q_{ik})\,\Re = S_{ap}\, a_{ik}$$

mit q_{gh} und summirt, so erhält man

$$(S_{mp} + S_{np})\,\Re = S_{an}\, S_{ap}$$
$$(S_{np} + S_{nq})\,\Re = S_{ap}\, S_{an},$$

woraus $S_{mp} = S_{nq}$ folgt.

$S_{mp} = 0$ ist die Bedingung, der die Coordinaten der Linien m und p zu genügen haben, wenn sie sich schneiden sollen. Ist aber $S_{mp} = 0$, so ist auch S_{nq}

gleich 0; wenn also zwei Linien in einem Nullsystem sich schneiden, so schneiden sich auch die zwei ihnen entsprechenden.

Leitlinien des Systems sind solche, deren Linienmoment = 0 ist, deren Coordinaten l_{ik} also der Bedingung $S_{al} = 0$ genügen. Sind l'_{ik} die Coefficienten der l entsprechenden Linie l', so folgt aus:

$$(l_{ik} + l'_{ik})\, R = 0,$$

dass die Richtungslinie von l' mit der von l zusammenfällt. Leitlinien des Systems entsprechen sich also selbst.

Schreibt man in der oben entwickelten Gleichung l statt p, so zeigt:

$$(S_{ml} + S_{nl})\, \mathfrak{R} = S_{am}\, S_{al},$$

dass alle Linien, welche Punkte entsprechender Linien mit einander verbinden, Leitlinien sind, denn ist S_{ml} und $S_{nl} = 0$, so ist auch $S_{al} = 0$; und dass, wenn eine Leitlinie von einer Linie geschnitten wird, sie auch von der entsprechenden geschnitten wird, denn wenn S_{ml} und $S_{al} = 0$ ist, so ist auch $S_{nl} = 0$.

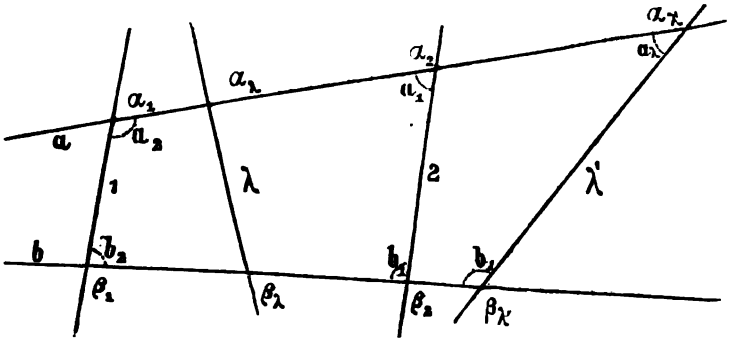
Das Moment zweier, das System darstellenden und eine Leitlinie schneidenden Linien ist gleich 0 in Bezug auf sie; demnach ist die statische Bedeutung der Leitlinien die: dass auch das Drehungsmoment des Kräftesystems in Bezug auf sie gleich 0 ist. Sie werden daher bisweilen auch die Drehungsaxen des Systems genannt.

Ferner kann man schliessen, dass jede Ebene einen Strahlenbüschel von Leitstrahlen enthält, der nämlich ihren Nullpunkt zum Mittelpunkt hat, und umgekehrt. Auch folgt, dass je zwei Paare entsprechender Linien auf einem Hyperboloid liegen, denn jede Leitlinie des Hyperboloids, die drei jener Linien schneidet, ist auch eine Leitlinie des Systems und schneidet daher auch die vierte.

Beschreibt die eine zweier entsprechenden Linien die Regelfläche, so beschreibt die andere ein projectivisches Gebilde auf ihr; da sich Linien aber gegenseitig entsprechen, so bildet die Gesammtheit aller entsprechenden Linien eine involutorische Regelschaar auf dem Hyperboloid. Des spätern Gebrauches wegen wollen wir hier den analytischen Ausdruck für diese Involution suchen.

Es seien Fig. 126 a und b die Leitlinien des Hyperboloids 1 und 2 zwei entsprechende Linien, ebenso auch λ und λ'.

Fig. 126.



Wir bezeichnen nun mit α_i und β_i die Gleichungen der Schnittpunkte der Linie i mit a und b, und mit a_i und b_i die ihnen entsprechenden Ebenen, a_1 z. B. ist die Ebene $a\,2$, welche dem Punkt $\alpha\,1$ entspricht, und so für alle andern.

Der Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$\alpha_\lambda = \alpha_1 - \lambda\alpha_2 \text{ und } \beta_\lambda = \beta_1 - \lambda\beta_2$$

entspricht der Schnitt der beiden Ebenen:

$$a_\lambda = a_1 - \lambda a_2 \text{ und } b_\lambda = b_1 - \lambda b_2.$$

Um das λ entsprechende Theilungsverhältniss λ' dieser Schnittlinien zu erhalten, haben wir die Schnittpunkte α_λ' und β_λ' der Leitlinien a und b mit den Ebenen a_λ und b_λ zu suchen, das übrigens für beide Punkte das gleiche sein muss. Die Gleichung des ersten dieser Punkte wird sein:

$$\alpha_\lambda' = \alpha_{2\lambda}\,\alpha_1 - \alpha_{1\lambda}\,\alpha_2,$$

wenn man mit $\alpha_{i\lambda}$ das Resultat der Substitution der Coordinaten der Ebene b_λ in die Gleichung des Punktes α_i bezeichnet. Es ist also $\alpha_{i\lambda}$ die Constante

$$\alpha_{i\lambda} = x_i\xi_\lambda + y_i\eta_\lambda + z_i\zeta_\lambda + 1.$$

Bezeichnet man in gleicher Weise mit $\alpha_{\lambda i}$ die Constante, welche durch Substitution der Coordinaten des Punktes i in die Gleichung der Ebene k entsteht, so folgt aus dem Anschreiben, dass $\alpha_{i\lambda} = \alpha_{\lambda k}$ sei. Da also der obige Ausdruck von α_λ' aus den mit Constanten multiplicirten Gleichungen der Punkte 1 und 2 besteht, so stellt er die Gleichung eines Punktes der Verbindungslinie derselben dar. — Da ferner die Substitution der Coordinaten der Ebene b_λ der Gleichung genügt, weil $\alpha_{2\lambda}\,\alpha_{1\lambda} - \alpha_{1\lambda}\,\alpha_{2\lambda} = 0$ ist, so ist sie der Ausdruck der Durchstosspunkte der Linie a mit der Ebene b_λ.

Da $b_\lambda = b_1 - \lambda b_2$ ist, so wird auch:

$$\alpha_{2\lambda} = \alpha_{21} - \lambda\alpha_{22} = -\lambda\alpha_{22},$$

und

$$\alpha_{1\lambda} = \alpha_{11} - \lambda\alpha_{12} = \alpha_{11}$$

sein, weil die Ebenencoordinaten nur in der ersten Potenz in den obigen Ausdrücken vorkommen; α_{21} und α_{12} aber sind $= 0$, weil die Ebene b_1 durch den Punkt α_2 und die Ebene b_2 durch den Punkt α_1 geht.

Die Gleichung α_λ' ist also $-\lambda\alpha_{22}\,\alpha_1 - \alpha_{11}\,\alpha_2 = 0$. Vergleicht man sie mit $\alpha_\lambda' = \alpha_1 - \lambda'\alpha_2 = 0$, so folgt aus $\lambda' = -\dfrac{\alpha_{11}}{\lambda\alpha_{22}}$:

$$\alpha_{11} + \alpha_{22}\lambda\lambda' = 0, \text{ oder auch } a_{11} + a_{22}\lambda\lambda' = 0,$$

und dies ist die gesuchte Gleichung zwischen den Theilverhältnissen λ und λ'. Aus derselben ersieht man sofort, dass sie involutorische Strahlen bezeichnet.

66. Die Ordnungscurve des Kräftesystems.

Wie in Nr. 62 S. 227 wollen wir hier ganz kurz den Zusammenhang der Raumcurve dritter Ordnung mit dem Nullsystem zeigen. — Zuerst werde das Nullsystem aufgestellt, das durch eine Raumcurve bestimmt ist.

Die Raumcurve dritter Ordnung sei in ihrer einfachsten Form als Schnitt der 3 Ebenen

$$x_2 - \lambda x_1 = 0,\ x_3 - \lambda x_2 = 0, \text{ und } x_4 - \lambda x_3 = 0,$$

bei variabelm λ, gegeben.

Wir setzen hier voraus, dass $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ Tessaralcoordinaten seien, die durch lineare Substitutionen aus den cartesischen abgeleitet werden können. Diese Ableitungen geben dann sehr complicirte Ausdrücke, Determinanten fünften Grades, für die Constanten, denen die Kräfte und Momente proportional sind, und die in der nächsten Nummer entwickelt werden sollen. Die Bildung dieser Constanten für Tessaralcoordinaten hat gar keinen praktischen Zweck, wir werden daher Tessaralcoordinaten nur dann annehmen, wenn es sich um die Lage der geometrischen Elemente handelt, und nicht um die Grösse der auf Punkte wirkenden Kräfte oder in Ebenen wirkenden Momente.

Die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ geht, ist:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x_1 - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) x_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) x_3 - x_4 = 0$$

und die Coordinaten dieser Ebene sind durch die Verhältnisse:

$$\frac{\xi'_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\xi'_2}{-\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3 \lambda_1} = \frac{\xi'_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{\xi'_4}{-1},$$

bestimmt.

Der dieser Ebene $(\xi'_1\, \xi'_2\, \xi'_3\, \xi'_4)$ entsprechende Punkt ist der Schnittpunkt der drei Osculationsebenen in $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$; die Gleichung der Osculationsebene λ_i ergiebt sich aus der Gleichung der durch die drei Punkte $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ gehenden Ebene dadurch, dass man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_i$ setzt; sie ist:

$$\lambda_i^3 x_1 - 3\, \lambda_i^2 x_2 + 3\, \lambda_i x_3 - x_4 = 0.$$

Suchen wir aus den drei Gleichungen $i = 1, 2, 3$ die Verhältnisse der Coordinaten des Punktes der allen drei genügt, d. h. in den drei Ebenen liegt, so sind sie die Coordinaten $x'_1\, x'_2\, x'_3\, x'_4$ des gesuchten Punktes. Die Auflösung der drei Gleichungen giebt:

$$\frac{x'_1}{3} = -\frac{x'_2}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} = \frac{x'_3}{(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)} = -\frac{x'_4}{3\lambda_1\lambda_2\lambda_3}.$$

Vergleicht man diese Coordinaten mit den des entsprechenden Punktes $\xi'_1\ \xi'_2\ \xi'_3\ \xi'_4$, so erhält man die Abhängigkeitsgleichungen:

$$\begin{aligned} x'_1 &= -3\xi'_4, \\ x'_2 &= +\xi'_3\ , \\ x'_3 &= -\xi'_2\ , \\ x^4 &= +3\xi'_1\ ; \end{aligned}$$

in denen die Coefficienten aller unausgefüllten Stellen gleich 0 sind.

Vergleichen wir diese Coefficienten mit denen des Nullsystems Nr. 64 S. 236, so sehen wir sofort, dass sie selbst ein Nullsystem darstellen, denn es ist:

$$a_{11}=a_{12}=-a_{12}=a_{23}=-a_{31}=a_{22}=a_{24}=-a_{42}=a_{33}=a_{34}=-a_{43}=a_{44}=0$$
$$a_{14}=-a_{41}=-3\ ,\quad a_{23}=-a_{32}=1.$$

Ferner $\mathfrak{R}=-3\ ,$

und für irgend eine Linie m_{ik}:

$$S_{am}=-3m_{23}+m_{14}.$$

Die den Coefficienten entsprechenden Linien sind daher durch die Gleichung:

$$m_{ik}+n_{ik}=(m_{23}-{}^1/_3 m_{14})\,a_{ik}=(n_{23}-{}^1/_3 n_{14})\,a_{ik}$$

mit einander verbunden; und die Leitlinien haben der Bedingung: $l_{14}=l_{23}$, zu genügen.

Mittelst dieser Bedingungsgleichung wollen wir zur Probe nachsehen, ob der Verbindungslinie zweier Curvenpunkte wirklich der Schnitt der Osculationsebene dieser Punkte entspreche.

Setzen wir in den obigen Gleichungen der Curvenpunkte $x'_1\ x'_2\ x'_3\ x'_4$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, so erhalten wir die Gleichung eines Curvenpunktes:

$$\frac{x'_1}{1}=\frac{x'_2}{\lambda_1}=\frac{x'_3}{\lambda_1^2}=\frac{x'_4}{\lambda_1^3}.$$

Ebenso sind die Coordinaten eines zweiten Punktes $1\ \lambda_2\ \lambda_2^2\ \lambda_2^3$, wir erhalten daher die Coordinaten der Verbindungslinie m_{ik}, durch Zusammensetzung der entsprechenden Colonnen von:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \end{vmatrix},$$

zu einer Determinante. Nach Streichung des gemeinschaftlichen Factors $\lambda_2-\lambda_1$ erhalten wir daher die Coordinanten der Verbindungslinie m_{ik} der Punkte 1 und 2 gleich:

$$\frac{m_{12}}{1}=\frac{m_{13}}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{m_{14}}{\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}=\frac{m_{23}}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{m_{24}}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}=\frac{m_{34}}{\lambda_1^2\lambda_2^2}.$$

Auf gleiche Weise bestimmen wir die Coordinaten der Schnittlinie der beiden entsprechenden Osculationsebenen. Die Coordinaten $\xi'_1\ \xi'_2\ \xi'_3\ \xi'_4$ der Osculations-

ebene des Punktes λ_1 erhalten wir durch Gleichsetzung der Theilverhältnisse $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ in den Gleichungen $\mathfrak{S}$, sie werden:

$$\frac{\xi'_1}{\lambda_1^3} = \frac{\xi'_2}{-3\lambda_1^2} = \frac{\xi'_3}{3\lambda_1} = \frac{\xi'_4}{-1};$$

Die Liniencoordinaten n_{ik} der Schnittlinie der Osculationsebene $\lambda_1\ \lambda_2$ ergeben sich daher durch Zusammensetzung der ik ergänzenden Colonnen gh in:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^3, & -3\lambda_1^2, & 3\lambda_1, & -1 \\ \lambda_2^3, & -3\lambda_2^2, & 3\lambda_2, & -1 \end{vmatrix},$$

zu Determinanten. Wir lassen den gemeinschaftlichen Factor $3(\lambda_1 - \lambda_2)$ weg, und erhalten:

$$\frac{n_{12}}{-1} = \frac{n_{13}}{-\lambda_1-\lambda_2} = \frac{n_{14}}{-3\lambda_1\lambda_2} = \frac{n_{23}}{-\frac{1}{3}(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)} = \frac{n_{24}}{-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{n_{34}}{-\lambda_1^2\lambda_2^2}.$$

Wir sehen zunächst dass $S_{mm} = S_{nn} = 0$ ist, dass also m_{ik} und n_{ik} wirklich die Coordinaten zweier geraden Linien sind, und ferner:

$$-\tfrac{1}{3}S_{am} = -\tfrac{1}{3}S_{an} = m_{23} - \tfrac{1}{3}m_{14} = n_{23} - \tfrac{1}{3}n_{14} = \lambda_1\lambda_2 - \tfrac{1}{3}(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2),$$

ist. Ferner sind für alle ik, für welche $a_{ik} = 0$ ist, die m_{ik} und n_{ik} entgegengesetzt gleich, endlich genügen die Coordinaten von m und n für ik gleich 1 4 und 2 3 der Gleichung:

$$m_{ik} + n_{ik} = \left[\lambda_1\lambda_2 - \tfrac{1}{3}(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)\right] a_{ik}.$$

Die m und n oder die Verbindungslinie zweier Punkte und die Schnittlinie der Osculationsebenen dieser beiden Punkte sind demnach wirklich entsprechende Linien des Nullsystems.

Setzt man $\lambda_1 = \lambda_2$ so fallen diese beide Linien m und n zu einer Tangente zusammen, in der That geben dann sowohl die Gleichungen der m_{ik} als auch die der n_{ik} als Coordinaten der Tangente:

$$\frac{l_{12}}{1} = \frac{l_{13}}{2\lambda_1} = \frac{l_{14}}{3\lambda_1^2} = \frac{l_{23}}{\lambda_1^2} = \frac{l_{24}}{2\lambda_1^3} = \frac{l_{34}}{\lambda_1^4}.$$

Diese Tangente ist eine Leitlinie des Systems, weil sie aus dem Zusammenfallen zweier entsprechender Linien entstanden ist, wirklich ist: $l_{14} = 3\,l_{23}$.

Untersuchen wir noch die Lage des Punktes der Osculationsebene und der Tangente der Curve ξ für die besonderen Werthe $\lambda_1 = 0$ und ∞. Für $\lambda_1 = 0$, werden die Coordinaten des Curvenpunktes $= (x'_1\ x'_2\ x'_3\ x'_4)$ gleich (1 0 0 0); dem Werth $\lambda_1 = 0$ entspricht also als Curvenpunkt der Eckpunkt 1 des Coordinatentetraeders. Die Coordinaten der Osculationsebene $(\xi'_1\ \xi'_2\ \xi'_3\ \xi'_4)$ werden gleich (0 0 0 1); es sind dies die Coordinaten der Ebene 4, welche durch die Ecken 1 2 3 des Tetraeders geht. Die Coordinaten der Tangente werden alle gleich 0 mit Ausnahme der $l_{12} = 1$; vergleicht man diesen Werth mit dem Schema Nr. 47 S. 177 u. 179, so sieht man, dass diese einzige Ordinate die Verbindungslinien der beiden Punkte 1 2, oder was dasselbe ist, der Schnittlinien der beiden Ebenen 3 4 bezeichnet. Wir wiederholen: durch $\lambda_1 = 0$ wird als Curvenpunkt die Ecke 1

des Coordinatentetraeders, wo die Curve die Linien 1 2 berührt und die Ebene 1 2 3 osculirt. Genau in gleicher Weise findet man, dass $\lambda_1 = \infty$ als Curvenpunkt, die Tetraederecke 4 bezeichnet, wo die Curve die Linie 4 3 berührt, und die Ebene 4 3 2 osculirt. Der Verbindungslinie der zwei Punkte 1 4 entspricht der Schnitt der beiden Osculationsebenen 1 2 3 und 4 3 2 oder die Linie 2 3; 1 4 und 2 3 sind also entsprechende Richtungslinien eines Kräftepaares. Die beiden Tetraederkanten 1 3 und 2 4, von denen bis jetzt noch nicht die Rede war, sind Leitlinien des Systems.

Durch ein Nullsystem und eine es darstellende Curve dritter Ordnung, ist das Coordinatentetraeder noch nicht bestimmt, sondern es können deren unendlich viele angenommen werden. Umgekehrt, durch das Tetraeder ist weder das Nullsystem noch eine es darstellende Curve dritter Ordnung bestimmt; denn statisch kann man noch das Verhältniss der in den Kanten 1 3, 2 4 wirkenden Kräfte variiren lassen, es ist also noch eine einfach unendliche Zahl Nullsysteme bei demselben Tetraeder möglich; analytisch ändern sich die Nullsysteme und die Curven dritter Ordnung durch Multiplication der Ebenen $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3)$ mit Constanten; und graphisch ist die Curve dritter Ordnung noch nicht bestimmt durch zwei Punkte mit den Osculationsebenen und Tangenten daselbst, sondern es kann noch ein weiterer Punkt gewählt werden durch den die Curve gehen soll.

Zum Schluss haben wir noch zu zeigen, wie mittelst eines Nullsystems eine Curve dritter Ordnung bestimmt werden kann. Offenbar erhalten wir eine solche, indem wir das Nullsystem linear so transformiren, dass von der Determinante $\mathfrak{R}^2$ nur die aufsteigende Diagonale übrig bleibt, also in die Form von S. 236 bringen. Es seien:

$$\beta_{i1}\, x'_1 + \beta_{i2}\, x'_2 + \beta_{i3}\, x'_3 + \beta_{i4}\, x'_4 = 0$$

die auf die Normalform gebrachten Gleichungen der Ebenen des neuen Coordinatentetraeders. Wären β beliebige proportionale Ebenencoordinaten, so müssten sie mit $\frac{\omega'}{E}$-multiplicirt werden, um Coordinaten der Normalform zu bezeichnen, worin ω' der Sinus des körperlichen Ecks und $E^2 = -$ $\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \beta_{i1} \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \beta_{i2} \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \beta_{i3} \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \beta_{i3} & 0 \end{vmatrix}$ ist.

Da wir uns aber in dieser Nummer nur mit der Lage conjugirter Elemente beschäftigen, so dürfen wir diese Coefficienten weglassen und setzen:

$$x'_i = b_{1i}\, x_1 + b_{2i}\, x_2 + b_{3i}\, x_3 + b_{4i}\, x_4 ,$$

und die

$$\xi'_i = \beta_{1i}\, \xi_1 + \beta_{2i}\, \xi_2 + \beta_{3i}\, \xi_3 + \beta_{4i}\, \xi_4 ,$$

wo die Substitutionselemente β_{ik} und b_{ik} adjungirt sind.

Wir substituiren nun diese Werthe in die eine der allgemeinen Gleichungen des Nullsystems:

$$x'_i = a_{i1}\, \xi'_1 + a_{i2}\, \xi'_2 + a_{i3}\, \xi'_3 + a_{i4}\, \xi'_4 .$$

Setzt man: $$c_{ik} = a_{i1}\beta_{k1} + a_{i2}\beta_{k2} + a_{i3}\beta_{k3} + a_{i4}\beta_{k4},$$

so ist das Resultat der Substitution:

$$b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + b_{3i}x_3 + b_{4i}x_4 = c_{i1}\xi_1 + c_{i2}\xi_2 + c_{i3}\xi_3 + c_{i4}\xi_4 .$$

Multiplicirt man jetzt jede dieser Gleichungen $i = 1$ bis 4 mit β_{ki} und addirt dieselben, so erhält man mit Weglassung des gemeinschaftlichen Factors x_{k2} der Substitutionsdeterminante: $B = \beta_{k1}b_{k1} + \beta_{k2}b_{k2} + \beta_{k3}b_{k3} + \beta_{k4}b_{k4}$

$$x_k = t_{k1}\xi_1 + t_{k2}\xi_2 + t_{k3}\xi_3 + t_{k4}\xi_4 ,$$

worin:

$$t_{ki} = c_{1i}\beta_{k1} + c_{2i}\beta_{k2} + c_{3i}\beta_{k3} + c_{4i}\beta_{k4}$$

$$= a_{12}(\beta_{k1}\beta_{i2} - \beta_{k2}\beta_{i1}) + a_{13}(\beta_{k1}\beta_{i3} - \beta_{k3}\beta_{i1}) + a_{14}(\beta_{k1}\beta_{i4} - \beta_{k4}\beta_{i1})$$

$$+ a_{23}(\beta_{k2}\beta_{i3} - \beta_{k3}\beta_{i2}) + a_{24}(\beta_{k2}\beta_{i4} - \beta_{k4}\beta_{i2}) + a_{34}(\beta_{k3}\beta_{i4} - \beta_{k4}\beta_{i3}),$$

ist. Aus dieser Form sieht man sofort, dass:

$$t_{ii} = 0 \text{ und } t_{ik} = -t_{ki}$$

ist; das System ist daher auch nach der Coordinatenverwandlung noch ein reciprokes, denn durch diese Verwandlung konnte ja die Natur der Reciprocität nicht verändert werden. Ferner sind die eingeklammerten Unterdeterminanten von β nichts anderes als die Liniencoordinaten der Schnittlinie der Ebenen ik, oder der Verbindungslinie der Punkte gh.

Die Elemente t_{ik} des verwandelten Nullsystems sind, mit Berücksichtigung des Sinnes, die Linienmomente $S_{a(gh)}$ der Kante ik des neuen Coordinatentetraeders.

Die Determinante T der Elemente t ist gleich RB^2 oder:

$$T = \begin{vmatrix} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{vmatrix} .$$

Das letztere geht aus der Art der Substitution hervor.

Jetzt können wir leicht die Bedingung finden, die erfüllt werden muss, damit $t_{ik} = S_{a(gh)} = 0$ sei, laut Nr. 65 S. 240 muss die Kante gh des Coordinatentetraeders eine Leitlinie sein.

Soll demnach die Coordinatenverwandlung derart sein, dass von der Determinante T nur die aufsteigende Reihe $t_{14}\,t_{23}$ übrig bleibe, so müssen die Tetraederkanten 12 13 24 34 Leitlinien sein. 14 und 23 sind dann entsprechende Linien, was mit dem schon auf S. 245 gefundenen Resultat vollkommen im Einklang steht. Man gelangt also zur einfachen Form des Nullsystems, indem man je zwei Eckpunkte des Coordinatentetraeders auf zwei conjugirten Linien annimmt.

Durch Annahme dieser vier Eckpunkte ist aber das Nullsystem noch nicht bestimmt. Denn man kann es dadurch ändern, dass man die Coordinaten der Kanten mit beliebigen Factoren multiplicirt. Damit aber das verwandelte System mit dem ursprünglichen congruent sei, müssen die Kantencoordinaten, durch Verbindung der a_{ik}, mit dem auf die Normalform reducirten β, entstanden sein.

67. Das Kräftepaar.

Nachdem wir die Lage zweier conjugirter Linien, in denen Kräfte wirken, und durch welche das Kräftesystem dargestellt werden kann, studirt haben, bleibt noch die Grösse dieser Kräfte zu bestimmen.

Es seien die in den conjugirten Linien m und n wirkenden Kräfte gleich M und N. Die Normalfactoren m und n, welche aus den m_{ik} und n_{ik} gerade so gebildet werden, wie die e Nr. 64 S. 235 aus den l, dann ist, weil die Summe der beiden Kräfte gleich der des ganzen Systems sein soll, für jedes ik

$$m_{ik}\frac{M}{m} + n_{ik}\frac{N}{n} = a_{ik}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung S. 239

$$(m_{ik} + n_{ik})\,\mathfrak{R} = a_{ik}\,S_{am} = a_{ik}\,S_{an}$$

so sieht man, dass bei Veränderlichkeit der m_{ik} und n_{ik}, sie nur dann bestehen können, wenn

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{\mathfrak{R}}{S_{am}} = \frac{\mathfrak{R}}{S_{an}},$$

ist. Mittelst dieser Gleichungen kann also leicht, wenn die Coordinaten der Richtungslinie einer Kraft gegeben oder angenommen sind, die Kraft selbst berechnet werden.

Für Leitlinien ist $S_{al} = 0$, daher die in ihr wirkende Kraft unendlich gross.

Noch auf einem andern Weg können wir zu demselben Resultat gelangen, indem wir den Cubikinhalt $\mathfrak{C}$ des Tetraeders bestimmen, das durch Verbindung der Endpunkte der in irgend einem Maassstab auf ihren Richtungslinien aufgetragenen Kräfte entsteht. Es seien $x_i\ y_i\ z_i\ 1$, $i = 1\ 2\ 3\ 4$ die Coordinaten der Eckpunkte dieses Tetraeders, ω' der Sinus des körperlichen Coordinatenecks, dann ist der sechsfache Cubikinhalt gleich:

$$6\,\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\omega' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1, & \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 - x_3, & y_4 - y_3, & z_4 - z_3, & \end{vmatrix}\omega'.$$

Liegen nun die Punkte 1 2 auf der Kraft M und die Punkte 3 4 auf der Kraft N, so muss

$$\frac{x_2 - x_1}{m_{11}} = \frac{y_2 - y_1}{m_{12}} = \frac{z_2 - z_1}{m_{13}} = \frac{M}{m},$$

und

$$\frac{x_4 - x_3}{n_{11}} = \frac{y_4 - y_3}{n_{12}} = \frac{z_4 - z_3}{n_{13}} = \frac{N}{n},$$

sein. Substituirt man die hieraus abgeleiteten Werthe der Coordinatendifferenzen in die Inhaltsgleichung, und bemerkt, dass die aus den Colonnen ik der Elemente:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ n_{14} & n_{24} & n_{34} & \end{vmatrix}$$

gebildeten Unterdeterminanten gleich m_{ik} und n_{ik} sind, so folgt:

$$6\,\mathfrak{C} = \frac{M}{m} \cdot \frac{N}{n} S_{mn}\,\omega'.$$

$\frac{M}{m} \cdot \frac{N}{n}$ ist aber gleich $\frac{\mathfrak{R}^2}{S_{am}^2}$ und S_{mn} laut Nr. 65 S. 239 gleich $\frac{S_{am}^2}{\mathfrak{R}}$;

demnach ist:

$$6\,\mathfrak{C} = \mathfrak{R}\,\omega'.$$

Die Constante $\mathfrak{R}$ des Nullsystems multiplicirt mit dem Sinus des körperlichen Ecks, ist dem sechsfachen Inhalt des durch die Eckpunkte zweier conjugirter Kräfte gebildeten Tetraeders gleich.

Bezeichnet man den Winkel, den die beiden Kräfte mit einander bilden, mit δ und ihre senkrechte Entfernung mit h, so ist auch

$$6\,\mathfrak{C} = \mathfrak{R}\,\omega' = h\,MN \sin\delta.$$

Bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{N}$ das Moment der Kraft N in Bezug auf einen Endpunkt von M, und mit μ den Winkel, den M mit der Ebene dieses Momentes bildet, so erhält man noch den weitern Ausdruck für den Inhalt dieses Tetraeders:

$$6\,\mathfrak{C} = M\,\mathfrak{N} \sin\mu = \mathfrak{R}\,\omega'.$$

Diese Formel gilt auch noch, wenn die eine der beiden Kräfte eine unendlich ferne ist und zeigt, dass dann an die Stelle der Tetraederbasis einfach die halbe Momentenfläche tritt.

Fallen die beiden conjugirten Kräfte M und N zu einer Leitlinie zusammen, so wird sowohl h als auch δ gleich 0, daher müssen beide Kräfte unendlich gross werden, damit das Product noch endlich bleiben könne; also ist die in der Leitlinie wirkende Kraft als zwei zusammenfallende unendlich grosse Kräfte aufzufassen. In umgekehrtem Sinne kann nur h unendlich gross werden, denn es ist immer $\sin\delta < 1$; dennoch kann nur eine der beiden Kräfte M oder N unendlich klein und fern angenommen werden.

Würden beide Kräfte unendlich klein und fern angenommen werden, so würde $\mathfrak{R}$ gleich 0 werden, und das System müsste sich auf eine einzige, unendlich ferne Kraft reduciren, zu der sich die beiden, in der unendlich fernen Ebene wirkenden Kräfte zusammensetzen lassen.

Hier, wo wir uns mit der Intensität der Kräfte beschäftigen, wollen wir auch noch die aus Nr. 60 S. 215 bekannte Bedeutung der Hauptgleichungen Nr. 65 S. 236 nachweisen. Vom Durchstosspunkt $(x'' y'' z'')$ Fig. 125 S. 233 aus denken wir uns die Kraft A aufgetragen, die Coordinaten des Endpunktes werden dann

$$\left(x''_{11} + l_{14}\frac{A}{e},\ y'' + l_{24}\frac{A}{e},\ z'' + l_{14}\frac{A}{e},\ 1\right)$$

sein.

Substituiren wir diese in die Gleichung der Ebene $(\xi'' \eta'' \zeta'' v'')$ die, als durch den Punkt $(x'' y'' z'')$ gehend, in folgende Form gebracht werden kann:

$$\xi''(x-x'')+\eta''(y-y'')+\zeta''(z-z'')=0,$$

so ist das Resultat der Substitution:

$$(\xi'' l_{14}+\eta'' l_{24}+\zeta'' l_{34})\frac{A}{e}=u''\frac{A}{e},$$

die in irgend einer, aber für alle Kräfte gleichen Richtung, gemessene Erhebung der Kraft A über der Ebene $(\xi''\ \eta''\ \zeta''\ v'')$; man müsste diesen Ausdruck noch mit dem Normalfactor $\frac{\omega'}{E''}$ multipliciren, um die senkrechte Erhebung zu erhalten.

Das aus der vierten Gleichung Nr. 65 S. 237 bestimmte

$$-\mathfrak{R}=a_{41}\xi''+a_{42}\eta''+a_{43}\zeta''=\Sigma u''\frac{A}{e}$$

ist daher eine Grösse, die der Summe der so gemessenen Erhebungen aller Kräfte über die Ebene $(\xi''\ \eta''\ \zeta'')$ gleich ist. Aus demselben Grund ist

$$-\mathfrak{R}x''_m=\Sigma x''u''\frac{A}{e}$$

das statische Moment der mit diesen Erhebungen multiplicirten Durchstosspunkte, und x''_m die Abscisse des Schwerpunktes derselben: $(x''_m\ y''_m\ z''_m\ 1)$ sind demnach die Coordinaten dieses Schwerpunktes.

Das eben Bewiesene gilt natürlich auch dann, wenn nur zwei Kräfte vorhanden sind, also auch von den zwei das System darstellenden Kräften M und N:

Der Nullpunkt jeder Ebene liegt auf der Verbindungslinie der Schnittpunkte mit m und n so, dass seine Entfernungen von denselben sich umgekehrt wie die Erhebungen der Kräfte M und N über der Ebene verhalten.

Wir gehen zum Reciproken, zur Zusammensetzung der Momente über. Bezeichnen, wie oben S. 234 $\xi'_g=l_{ik}x'_k+l_{kh}x'_i+l_{hi}x'_k$ die von einer Linie zur andern variabeln Coordinaten der Ebene, welche aus dem festen Punkt $(x'\ y'\ z'\ 1)$ die Linie l projicirt, $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ die Cosinus der Axen und

$$E^2=-\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \xi' \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \eta' \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \zeta' \\ \xi' & \eta' & \zeta' & \end{vmatrix}$$

einen Factor, den wir den Normalfactor für die Momente nennen wollen, siehe Nr. 64 S. 237, so ist: $\frac{E}{e}$ der Perpendikel vom Punkt $(x'\ y'\ z'\ 1)$ auf die Linie l, und:

$$\mathfrak{A}=\frac{E}{e}A$$

das Moment der Kraft A in Bezug auf den Punkt $(x'\ y'\ z'\ 1)$. Substituiren wir nun in die Gleichungen $\xi'_{mi}=\Sigma\xi'_i\frac{A}{e}$ von Nr. 64 S. 236 für $\frac{A}{e}$ den gleichen Werth $\frac{\mathfrak{A}}{E}$, so erhalten wir als Coordinaten der die Mittelkraft projicirenden Ebene auch:

$$\xi'_{mi}=\Sigma\xi'_i\frac{\mathfrak{A}}{E}.$$

Diese Gleichungen sind von der Grösse der Kraft und den Coordinaten ihrer Richtungslinie ganz unabhängig, und enthalten nur das Moment der einzelnen Kräfte und die Coordinate der Ebene, in der es wirkt.

Denken wir uns die Kräfte reducirt auf eine Kraft N, die durch den Punkt $x' y' z' 1$ geht, und auf eine andere beliebige M, so reducirt sich die Summe der Momente auf das dieser letzteren, und man hat auch:

$$\xi'_{mi} = \xi'_{m_i} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{E_m}, \text{ oder } \mathfrak{M} = E_m .$$

Also: multiplicirt man die Coordinaten der Ebenen, welche die Kräfte aus einem Punkt projiciren, mit den durch ihren Normalfactor dividirten Momenten, so sind die Summen die Coordinaten der Ebene, welche aus dem angenommenen Punkt die nicht durch ihn gehende Mittelkraft projiciren. Ihr Moment ist der mit diesen Coordinaten gebildete Normalfactor.

Bei der Bestimmung dieses $\mathfrak{M}$ ist vorausgesetzt worden, dass die Coordinaten $\xi' \eta' \zeta' \nu'$ in E der Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{R} + a_{41}\xi' + a_{42}\eta' + a_{43}\zeta' = 0$$

von Nr. 67 S. 236 genügen; findet dies nicht statt, so hat man dem dort Gesagten entsprechend, jedes ξ, also auch E mit dem Factor $-\mathfrak{R} : (a_{41}\xi' + a_{42}\eta' + a_{43}\zeta')$ zu multipliciren. Bezeichnen also $\xi' \eta' \zeta' \nu'$ beliebige Coordinaten einer Ebene, so ist das Quadrat des in ihr wirkenden Momentes in Bezug auf ihren Nullpunkt gleich:

$$\mathfrak{M}^2 = - \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \xi' \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \eta' \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \zeta' \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 0 \end{vmatrix} \cdot \left(\frac{a_{12}a_{34} + a_{13}a_{12} + a_{11}a_{23}}{a_{41}\xi' + a_{42}\eta' + a_{43}\zeta} \right)^2 .$$

Die Erhebung der andern Kraft N über diese Ebene oder $N \sin \nu$ ergiebt sich jetzt aus der Gleichung Seite 248:

$$N \sin \nu = (a_{41}\xi' + a_{42}\eta' + a_{43}\zeta') \frac{\omega'}{E'} = e_a \sin a_{4i}\xi' ,$$

wenn wir mit ν und $a_{4i}\xi'$ die Winkel bezeichnen, den die Linie n und eine nach dem unendlich fernen Punkt $a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ 0$ gerichtete Linie mit der Ebene $\xi' \eta' \zeta' \nu'$ bildet.

In Nr. 64 haben wir entsprechende Punkte und Ebenen bestimmt, allein die Grösse der durch den Punkt gehenden und in der Ebene wirkenden Kraft unbestimmt gelassen. Jetzt sind wir im Stande, leichter als es dort hätte geschehen können, auch diese Grössen zu bestimmen.

Es wird bei der dort Fig. 125 S. 233 angenommenen Bezeichnung vorausgesetzt, dass die Coordinaten $\xi'' \ldots$ der angenommenen Ebene der Bedingungsgleichung S. 236: $\mathfrak{R} + a_{41}\xi'' + a_{12}\eta'' + a_{43}\zeta'' = 0$ entspricht, und dass dann die $\xi' \ldots$ und die $x'' \ldots$ aus jenen Gleichungen bestimmt worden seien.

Substituirt man diese Werthe in:

$$m_{ik} = \begin{vmatrix} x'_i & x''_i \\ x'_k & x''_k \end{vmatrix} \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad n_{ik} = \begin{vmatrix} \xi'_g & \xi''_g \\ \xi'_h & \xi''_h \end{vmatrix},$$

so erhält man:

$$m_{ik} + n_{ik} = a_{ik}\,(x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' + v'') = a_{ik}\,b.$$

Vergleicht man diese Summe mit: $(m_{ik} + n_{ik})\,\mathfrak{R} = a_{ik}\,S_{am}$, so folgt:

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{S_{am}}{\mathfrak{R}} = \frac{S_{an}}{\mathfrak{R}} = b.$$

Zur Bestimmung von M und N fehlen jetzt nur noch die beiden Normalfactoren m und n. Setzt man im Ausdruck für m_{ik} $k = 4$, so wird:

$$m_{ik} = m_{i4} = (x'_i - x''_i)\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}x'_i + a_{i1}\xi'' + a_{i2}\eta'' + a_{i3}\zeta'' + a_{i4}v'';$$

und der Normalfactor m kann in die folgende Form gebracht werden.

$$m^2 = -\begin{vmatrix} l_{11} & \omega_{12} & \omega_{13}, & \mathfrak{R}x' + a_{12}\xi'' + a_{13}\eta'' + a_{14}v'' \\ \omega_{21} & l_{22} & \omega_{23}, & \mathfrak{R}y' + a_{21}\xi'' + a_{23}\eta'' + a_{24}v'' \\ \omega_{31} & \omega_{32} & l_{33}, & \mathfrak{R}z' + a_{31}\xi'' + a_{32}\eta'' + a_{34}v'' \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\omega^2},$$

worin l_{ii}, ω_{ik} die Coefficienten der an der durch die Indexe bezeichneten Stelle stehenden Elemente des Sinus des körperlichen Eckes sind. n erhält man aus:

$$n^2 = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \xi'', & a_{34}y' + a_{42}z' + a_{23} \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \eta'', & a_{13}x' + a_{14}z' + a_{31} \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \zeta'', & a_{24}x' + a_{41}y' + a_{12} \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & 0, & 0 \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

In beiden Ausdrücken ist die letzte Zeile gleich der letzten Colonne.

Wie in Nr. 60 S. 218 tragen wir nun von irgend einem Punkt, z. B. vom Ursprung der Coordinaten Kräfte auf, die den Momenten $\mathfrak{R}$ proportional sind und die senkrecht auf der Ebene $(\xi'\,\eta'\,\zeta'\,v')$ stehen. Dann sind die Coordinaten eines Punktes ihrer Richtungslinie gleich:

$$a = l_{11}\xi' + \omega_{12}\eta' + \omega_{13}\zeta',$$
$$b = \omega_{21}\xi' + l_{22}\eta' + \omega_{23}\zeta',$$
$$c = \omega_{31}\xi' + \omega_{32}\eta' + l_{33}\zeta',$$

worin ω_{ik} die Unterdeterminanten im Sinus des körperlichen Eckes ω', also in:

$$\omega'^2 = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}$$

sind, und der Normalfactor der $a\,b\,c$, ist gleich:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\omega_1 + 2ca\omega_2 + 2ab\omega_3} = E\omega'.$$

Zur Bestimmung der Seitenkräfte des Momentes $\mathfrak{A}$ nach der Richtung der drei Coordinatenaxen haben wir:

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \frac{\mathfrak{A}}{e} = \frac{\mathfrak{A}}{E\omega'}.$$

Summiren wir schliesslich alle einzelnen Kräfte, so erhalten wir nach Substitution der obigen Werthe von $a\,b\,c$:

$$\omega' \Sigma X = \omega' X_s = l_{11}\,\xi_m + \omega_{12}\,\eta_m + \omega_{13}\,\zeta_m,$$
$$\omega' \Sigma Y = \omega' Y_s = \omega_{21}\,\xi_m + l_{22}\,\eta_m + \omega_{23}\,\zeta_m,$$
$$\omega' \Sigma Z = \omega' Z_s = \omega_{31}\,\xi_m + \omega_{32}\,\eta_m + l_{33}\,\zeta_m.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass wenn, die so auf Senkrechten zu den projicirenden Ebenen aufgetragenen Kräfte summirt, d. h. wie Kräfte im Strahlenbündel zusammengesetzt werden, dann auch die Mittelkraft S auf der Ebene $(\xi_m\ \eta_m\ \zeta_m\ v_m)$ senkrecht stehn. Als Grösse der Mittelkraft erhält man:

$$\omega' S = \omega' \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\omega_1 + 2ZX\omega_2 + 2XY\omega_3} = \omega' E_m,$$

also:
$$S = E_m = \mathfrak{M},$$

und die Mittelkraft ist gleich dem Moment der nicht durch $(x'\,y'\,z'\,1)$ gehenden Kraft M.

Hinsichtlich der Richtung der Kraft S in ihrem Perpendikel, und des damit zusammenhängenden Zeichens der $\frac{\xi}{E}$, von dem wir noch nicht gesprochen haben, ist zu bemerken, dass die S auf der Seite der entsprechenden Ebene stehen müssen, auf welcher das Moment $\mathfrak{A}$ in einem bestimmten constanten Sinn um sie dreht. Verrückt man dann die Ebene des Momentes parallel mit sich selbst nach der Richtung von S, so zeigt der Sinn dieser Bewegung auf jeder der Coordinatenaxen das Zeichen von $\frac{\xi'}{E}$, $\frac{\eta'}{E}$ und $\frac{\zeta'}{E}$ an.

Hier am Schluss der allgemeinen Entwickelungen erlauben wir uns noch einige Bemerkungen über das gewählte Coordinatensystem. Die Wahl schiefwinkeliger Axen hat sich durch das Vorangehende sicher gerechtfertigt; keine Formel ist dadurch complicirter geworden, indem die Functionen der Axenwinkel nie aus den Rahmen der Normalfactoren, zu denen wir auch noch den Sinus des körperlichen Ecks rechnen, herausgetreten sind. Stellt man sich aber die Frage, ob dies für Tessaralcoordinaten ebenfalls noch der Fall wäre, so muss diese Frage unbedingt bejaht werden. Allein wie wir schon am Anfang der vorigen Nummer bemerkt haben, werden alle Normalfactoren viel complicirter. Die Addition der Kräfte beruht darauf, dass durch den Endpunkt eines Kräftezugs eine Parallele zu einer gegebenen Kraft geführt werde; um dies auch mit Tessaralcoordinaten auszuführen, müssten in alle Formeln die Coordinaten der jeweiligen unendlich fernen Ebene, welche jetzt nicht mehr 0 0 0 1 sind, eingeführt werden, und alle Normalfactoren würden viel mehr Glieder enthalten, und wir glauben uns hier der Entwickelung derselben enthalten zu dürfen. In der vorigen Nummer haben wir aber gezeigt, dass in allen Fällen, wo es sich nur um die Lage conjugirter Kräfte

und Elemente handelte, aus dem einen System ohne Weiteres in das andere übergegangen werden kann. Die allgemeinen üblichen Reductionen eines Systems auf eine Kraft und auf ein Moment ergeben sich als Vereinfachungen dadurch, dass man auch mit der Ebene ($\xi'' \eta'' \zeta'' 1$) in das Unendliche rückt. Dieser Fall soll in der nächsten Nummer behandelt werden.

68. Zusammensetzung der Kräfte im Raum mit Hülfe der unendlich fernen Ebene.

Wählt man zur Zerlegung der einzelnen Kräfte, wie in den vorigen Nummern, einen Punkt in der Endlichkeit, dagegen als Ebene die unendlich ferne Ebene, so erhält man als Seitenkräfte irgend einer zu zerlegenden Kraft, laut Nr. 52 S. 191, die parallel mit sich selbst nach dem Punkt verschobene Kraft in ihrer ganzen Grösse und ein Moment, das gleich ist dem Moment der Kraft in Bezug auf den angenommenen Punkt. Die Bestimmung der Mittelkraft, die durch den Punkt geht, ist nun nichts anderes als die Zusammensetzung der vorhandenen Kräfte, so, als ob sie auf einen Punkt wirkten. Diese Mittelkraft sei M, sie kann sich in ihrer Richtung und Grösse nicht ändern, wo auch der Punkt in der Endlichkeit angenommen werden mag, sie geht also dem Nr. 60 S. 216 Bewiesenen entsprechend immer durch denselben Punkt der unendlich fernen Ebene, und dem Satz, dass die Erhebung der Kraft, die durch den Punkt geht, über die gewählte Ebene unabhängig von der Wahl des Punktes sei, entspricht die Unveränderlichkeit der Intensität von M, weil angenommen werden darf, die ∞ ferne Ebene senkrecht stehe auf allen Strahlen eines Bündels.

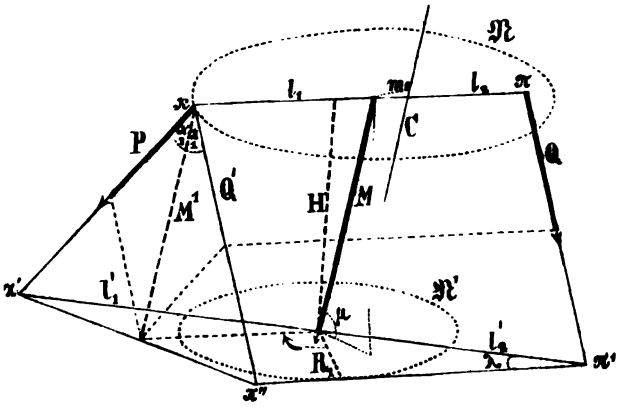
An der Bestimmung der dem gewählten Punkt entsprechenden Ebene, in deren Schnitt mit der unendlich fernen Ebene die unendlich ferne Kraft wirkt, ändert sich nichts. Wie in Nr. 60 S. 219 werden die Momente zusammengesetzt, und das erhaltene Mittelmoment $\mathfrak{N}$ ist das Maass der ∞ fernen Kraft.

Vergleicht man die hier angedeuteten Operationen mit denen, welche die allgemeine Zerlegung von Nr. 60 S. 215 erfordert, so sieht man, dass gerade die Zerlegung der Kraft A, Fig. 122 S. 217, in die zwei Seitenkräfte B und C erspart wird; denn die Seitenkraft B, die durch den gewählten Punkt geht, ist gleich A und zur Bestimmung der Ebene R sind überdies die Momente unentbehrlich. — Da nun auch entsprechende Linien, Punkte und Ebenen

leichter zu bestimmen sind, wenn eine endliche Kraft M und eine unendlich ferne Kraft $\mathfrak{N}$ gegeben ist, als wenn zwei endliche Kräfte M und N gegeben wären, so werden die Kräfte im Raum ausschliesslich mittelst der unendlich fernen Ebene zusammengesetzt. Wie das praktisch auszuführen sei, soll in einer der folgenden Nummern gezeigt werden; vorerst wollen wir aber hier noch untersuchen, wie sich die projectivischen Eigenschaften in diesem Fall gestalten.

Es sei durch Zerlegung der Kräfte nach Richtungen, die durch einen Punkt gehen, und andere, die in einer unendlich fernen Ebene liegen, dann durch Wiederzusammensetzung derselben das System auf die endliche Kraft M, Fig. 127, und die unendlich

Fig. 127.



ferne Kraft $\mathfrak{N}$ reducirt, dann handelt es sich um die Bestimmung der dem Punkt $\varkappa$ entsprechenden Ebene.

Es sei die Ebene $\mathfrak{N}$ des punktirten Kreises die Projectionsebene der unendlich fernen Kraft $\mathfrak{N}$, dann ist die Verbindungslinie l des Punktes $\varkappa$ mit dem Durchstosspunkt der Kraft M eine Leitlinie des Systems, die demnach ganz in der gesuchten Ebene liegt; um diese zu erhalten, haben wir nichts mehr weiter zu thun, als wie die beiden Momente $\mathfrak{N}$ und $\varkappa M$, von ihrer Schnittlinie l ausgehend, zusammenzusetzen. Wir reduciren beide Momente auf die als Basis angenommene Entfernung l_1 des Punktes $\varkappa$ vom Durchstosspunkt $M\mathfrak{N}$; tragen wir von diesem Punkt aus M auf seine Richtungslinie auf, so ist (siehe die Figur) der Perpendikel

H vom Endpunkt M auf l_1 die dieses Moment darstellende Linie. Auf irgend eine den Angaben von $\mathfrak{N}$ entsprechende Weise reduciren wir auch dieses Moment auf die Basis l_1, so dass man hat: $l_1 R_1 = \mathfrak{N}$, dann stellt R_1 das Moment $\mathfrak{N}$ dar. Wir setzen es mit H zusammen, indem wir es vom Endpunkt von H und M aus in der Parallelebene $\mathfrak{N}'$ zu $\mathfrak{N}$ senkrecht auf l_1 auftragen; die gesuchte Ebene QQ' geht dann durch den Endpunkt R_1. Bestimmt man den Schnitt dieser Ebene QQ' mit $\mathfrak{N}'$, so wird dieser mit l_1 parallel laufen, weil $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ parallele Ebenen sind, auch senkrecht auf R_1 stehen, und daher den Kreis $\mathfrak{N}'$, der den Punkt $M\,\mathfrak{N}'$ zum Mittelpunkt und R_1 zum Halbmesser hat, berühren. Die Ebene QQ' berührt daher auch den Kegel, der den Endpunkt von M zur Spitze und den oben bestimmten Kreis $\mathfrak{N}'$ zur Basis hat.

Die Gleichung $l_1 R_1 = \mathfrak{N}$ enthält keine auf die Richtung der Linie l_1 und R_1 in der Ebene $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ bezügliche Elemente, und der jetzt bestimmte Kegel wird daher für alle Punkte K des Kreises $\mathfrak{N}$ gelten. Man kann also allgemein sagen:

Führt man durch die Endpunkte irgend eines in seiner Richtungslinie aufgetragenen M und durch die unendlich ferne Kraft zwei Ebenen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$, beschreibt von den Punkten als Centren in den Ebenen zwei Kreise mit Radien l_1 und R_1, deren Product, wenn der eine derselben auf dem Maassstab der Linien der andern auf dem der Kräfte abgegriffen wird, gleich dem Moment $\mathfrak{N}$ der unendlich fernen Kraft ist; betrachtet man ferner den einen, einerlei welchen, dieser beiden Kreise als Basis eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt des andern frei bleibenden Kreises liegt, so entspricht jedem Punkt des freien Kreises die durch ihn gehende Berührungsebene des Kegels, und umgekehrt. Die Wahl zwischen den zwei möglichen Kreispunkten und Berührungsebenen wird dadurch bestimmt, dass der Winkel $R_1 l_1$ im Drehungssinn von $\mathfrak{N}$ eingetragen sein muss, wie es in der Figur angedeutet ist.

Durch die eben aufgestellten reciproken Beziehungen gewinnt man die deutlichste Anschauung entsprechender Punkte und Ebenen. Halten wir die Leitlinie l für Punkt und Ebene vorerst

fest, so entspricht dem Endpunkt von M in l, wie es sich von selbst versteht, die Ebene $\mathfrak{N}$; entfernt sich nun der Punkt $\varkappa$ in l, so vermindert sich die Neigung der Ebene QQ' gegen M; dem unendlich fernen Punkt von l endlich entspricht die Ebene lM. Da der Punkt $\varkappa$ und die entsprechende Ebene QQ' projectivische Gebilde sind, so sind auch alle Punktgebilde, die Q auf irgend welcher geraden Linie ausschneidet, $\varkappa$ projectivisch; für alle geraden Linien, die in $\mathfrak{N}'$ liegen und durch den Fusspunkt von M gehen, sind die Endpunkte vom M Gegenpunkte (den unendlich fernen Elementen entsprechende) und die Producte entsprechender Entfernungen von denselben wird constant sein. Ist also π, siehe Fig. 127, ein anderer Punkt der Leitlinie l, und l'_1, l'_2 die Entfernungen der Schnittpunkte der entsprechenden Ebene πP und $Q\varkappa$ mit irgend einer Leitlinie in $\mathfrak{N}'$ vom Schnittpunkt M, so hat man: $l_1 l'_2 = l_2 l'_1$. Ist λ der Winkel, den die beiden Linien l und l' mit einander bilden, so ist, siehe Fig. 127, $R_1 = l'_2 \sin\lambda$, und weil $R_1 l_1 = \mathfrak{N}$, ist:

$$l_1 l'_2 \sin\lambda = l_2 l'_1 \sin\lambda = \mathfrak{N};$$

wobei aber zu beachten ist, dass eines der beiden, Product bildenden l auf dem Maassstab der Linien, das andere auf dem Maassstab der Kräfte abzugreifen ist, um ein Moment $\mathfrak{N}$ zu erhalten.

Die Endpunkte irgend zweier Leitlinien l und l', deren Segmente zu beiden Seiten von M der obigen Gleichung entsprechen, werden durch entsprechende Linien P und Q mit einander verbunden. Denn wenn dem Punkt $\varkappa$ die Ebene $\varkappa Q$ entspricht, welche auf l' die Strecke l'_2 abschneidet, so entspricht in gleicher Weise $\varkappa'$ die Ebene $\varkappa' Q$, welche auf l die Strecke l_2 abschneidet. Hat man also für einen Punkt $\varkappa$ einer Linie P die entsprechende Ebene QQ', d. h. ihren Schnitt $\varkappa''\pi'$ mit $\mathfrak{N}'$ construirt, so erhält man einen Punkt π' von Q, wenn man durch den Schnittpunkt $P\mathfrak{N}' = \varkappa'$ die Leitlinie $\varkappa'\pi'$ in $\mathfrak{N}'$ durch den Endpunkt von M zieht, sie schneidet die Ebene QQ' in einem Punkt π' von Q. Den Punkt π erhält man dann dadurch, dass man die Segmente von l und l' proportional macht.

Wenn nicht in Nr. 61 S. 222 schon ganz allgemein bewiesen worden wäre, dass je zwei Paar conjugirte Richtungslinien auf einem Hyperboloid liegen, das ein Paraboloid werden muss, wenn eine der Richtungslinien in's Unendliche rückt, so würde dies aus dem eben Ausgeführten hervorgehen: die beiden proportional

getheilten Leitlinien erzeugen ein Paraboloid; und jeder Erzeugungslinie desselben entspricht wieder eine Erzeugungslinie. Leicht leitet man auch aus obiger Gleichung die gegenseitige Lage dieser conjugirten Erzeugungslinien ab; es folgt aus derselben:

$$l_1 l_2 = \frac{l_1}{l'_1} \cdot \frac{\mathfrak{N}}{\sin \lambda} = \frac{l_2}{l'_2} \cdot \frac{\mathfrak{N}}{\sin \lambda}.$$

Für ein und dasselbe Paraboloid sind aber die Verhältnisse $l_1 : l'_1$ und $l_2 : l'_2$ constant, demnach sind es auch die Producte $l_1 l_2$; conjugirte Erzeugungslinien schneiden also auf den Leitlinien des Paraboloids eine Involution aus, deren Mittellinie M ist.

Da die drei Linien MPQ die unendlich ferne Ebene in einer Erzeugungs-, also einer geraden Linie schneiden, so liegen Parallele zu ihnen, die durch einen Punkt gehen, auch in einer Ebene, und es kann daher in diesem Punkt M direct nach diesen Richtungen zerlegt werden. Fig. 127 geschah dies im Punkt $\varkappa$, wo M' direct nach den Richtungen P und Q' zerlegt, und Q' mittelst einer Parallelen zu l an seinen Ort nach Q gebracht wurde.

Um den Cubikinhalt $\mathfrak{C}$ des von den Endpunkten von P und Q gebildeten Tetraeders zu erhalten, haben wir den Inhalt $[l\,l']$ des durch die Endpunkte $\varkappa\varkappa'\ \pi\pi'$ der Linien $l\,l'$ gebildeten Tetraeders mit den Verhältnissen $\frac{P}{\varkappa\varkappa'}$ und $\frac{Q}{\pi\pi'}$ zu multipliciren. Bezeichnet man den Winkel, den die Mittelkraft M mit dem Moment $\mathfrak{N}$ bildet, mit μ, so ist:

$$[6\,l\,l'] = (l_1 + l_2)\,(l'_1 + l'_2) \sin\lambda \,.\, M \sin\mu,$$

und:

$$\frac{P}{\varkappa\varkappa'} = \frac{l'_2}{l'_1 + l'_2},\quad \frac{Q}{\pi\pi'} = \frac{Q}{\varkappa\varkappa''} = \frac{l'_1}{l'_1 + l'_2} = \frac{l_1}{l_1 + l_2},$$

demnach:

$$6\,\mathfrak{C} = l_1 l'_2 \sin\lambda \,.\, M \sin\mu \,.\, = M\mathfrak{N} \sin\mu.$$

Bei unendlich fernen Kräften verwandelt sich also der Inhalt des Tetraeders in eine Pyramide, die zur Basis die halbe Momentenfläche der unendlich fernen Kraft, und zur Höhe die in ihrer Richtung aufgetragene endliche Kraft hat.

69. Die Centralaxe eines Kräftesystems.

Nr. 61 S. 224 ist bewiesen worden, dass für ein und dasselbe Kräftesystem dieser Cubikinhalt constant sei; ebenso ist M constant, wo auch der feste Punkt gewählt werden mag, wenn nur als Ebene die unendlich ferne Ebene bleibt; für diesen Fall ist also $\mathfrak{R} \sin \mu$ constant. Die unendlich ferne Kraft wird demnach ein Minimum für $\sin \mu = 1$, also $\mu = 90^0$. Diesem besondern Verhältniss entspricht nur eine einzige Lage der Richtungslinie C von M, welche die Centralaxe genannt wird. Sie kann nach Obigem leicht construirt werden, man braucht nur den Punkt zu suchen, welcher der auf M senkrecht stehenden Ebene entspricht. Wir führen die senkrechte Ebene durch den oberen Endpunkt von M, dann liegt der gesuchte Punkt im Schnitt m derselben mit der Momentenebene $\mathfrak{N}$, siehe Fig. 127 S. 254; bezeichnet man die Entfernung des Punktes von M in dieser Linie gemessen mit m_1, so hat man:

$$m_1 \cdot \frac{M}{\sin \mu} = \mathfrak{R},$$

weil $\frac{M}{\sin \mu}$ der Radius des Kegels $\mathfrak{R}'$ ist, den die Ebene berührt; und hieraus folgt:

$$m_1 = \frac{\mathfrak{R} \sin \mu}{M}.$$

Ueber die Seite, nach welcher m_1 aufzutragen ist, kann kein Zweifel walten, wenn man streng verfährt, wie oben angedeutet worden ist. Uebrigens sieht man auch sofort aus der Figur, dass m_1 nach oben aufgetragen werden muss; beschränkt man sich nämlich auf Drehungen, die kleiner als 90^0 sind, so muss die Ebene $\mathfrak{R}$ in entgegengesetztem Sinne gedreht werden, um senkrecht zu werden, als sie gedreht wurde, um nach QQ' zu kommen, demnach muss auch m_1 in entgegengesetztem Sinn als wie l_1 aufgetragen werden. Am Endpunkt von m_1 wurde die Lage der Centralaxe C angegeben.

Die Centralaxe wird von allen Linien kürzester Entfernung zweier conjugirter Kräfte eines Paares geschnitten. Denn denkt man sich die Centralaxe C schon

construirt, so wird die Linie der kürzesten Entfernung einer Kraft P und C eine Leitlinie sein, sie schneidet C und liegt in der auf C senkrecht stehenden Momentenebene; mithin schneidet sie auch die P conjugirte Kraft Q, und steht auch senkrecht auf einer Parallelebene zu P und Q, weil auch C mit derselben Ebene parallel läuft. Die kürzeste Entfernungslinie zwischen den Linien PC ist daher auch die zwischen P und Q; da aber zwei Linien nur eine einzige kürzeste Entfernungslinie haben, so schneiden alle kürzeste Entfernungslinien die Centralaxe C.

Leicht lässt sich daher auch die Centralaxe mittelst eines beliebigen Kräftepaares bestimmen. Theilt man die kürzeste Entfernung der beiden Richtungslinien umgekehrt, wie die Erhebungen der Kräfte über eine Ebene, die senkrecht auf der Centralaxe steht, so erhält man einen Punkt derselben.

Früher haben wir schon gesehen, dass Kräftepaare parallel zur Centralaxe im Raum verschoben werden können und dabei immer conjugirt bleiben. Denken wir uns also alle überhaupt möglichen Kräftepaare so verschoben, dass die Linien ihrer kürzesten Entfernungen in eine und dieselbe Ebene fallen, so folgt, dass wir alle mögliche Lagen conjugirter Elemente studiren können, wenn wir in Fig. 127 S. 254 voraussetzen, M stehe senkrecht auf $\mathfrak{N}$, und eine Parallelebene zu PMQ, z. B. $PM'Q'$ senkrecht auf l_1. Wird ferner $H = M$, so ist, wenn der Winkel, den die Ebene QQ' mit M bildet, mit $\varkappa_1$ bezeichnet wird, $M \operatorname{tg} \varkappa_1 = R_1$; setzt man noch $\mathfrak{N} = Mc$, wo c eine constante Länge bezeichnet, die bisweilen die Einheit des Systems genannt wurde, so erhält man als einfache Beziehung zwischen Punkten $\varkappa$, deren senkrechte Entfernung von der Axe gleich l_1 ist, und der entsprechenden Ebene, welche der Winkel $\varkappa_1$ mit der Axe bildet:

$$l_1 \operatorname{tg} \varkappa_1 = c.$$

Für $l_1 = 0$ wird $\varkappa_1 = 90^0$, für Punkte der Centralaxe geht die entsprechende Ebene durch die unendlich ferne Kraft; für $l_1 = \infty$ wird $\varkappa_1 = 0$, für Punkte der unendlich fernen Kraft geht die entsprechende Ebene durch die Centralaxe; und für $l_1 = c$ wird $\varkappa_1 = 45^0$, d. h. Punkten, deren senkrechte Entfernung von der Axe gleich c ist, entspricht eine Ebene, die mit ihr einen Winkel von 45^0 bildet. Die gegenseitige Lage entsprechender Elemente ist vollständig bestimmt, weil sie ineinander liegen, und die Ebene durch Perpendikel des Punktes auf die Axe geht, während der

Punkt im Perpendikel des Schnittpunktes der Ebene mit der Axe liegt.

Da wir voraussetzen durften, es seien die Linien l die kürzesten Entfernungen der Axe von conjugirten Richtungslinien, so sind durch zwei in derselben Linie l liegende l_1 und l_2 und durch zwei Winkel $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ auch die Lagen dieser Richtungslinien bestimmt, denn in diesem Fall bezeichnet $\varkappa_1$ den Winkel, den die conjugirte Linie mit der Axe bildet. In den Gleichungen:

$$l_1 \, tg \, \varkappa_1 = l_2 \, tg \, \varkappa_2 = c,$$

bezeichnen also auch l_1 l_2 die in die gleiche Richtung fallenden kürzesten Entfernungen zweier conjugirter Linien und $\varkappa_2$ $\varkappa_1$ die Winkel, die sie mit der Axe bilden. $\varkappa_2$ und $\varkappa_1$ haben wir in Fig. 127 S. 254 angedeutet, unter der Voraussetzung, dass in dieser Figur alles senkrecht und nicht schief stehe, wie es gezeichnet ist. Conjugirte Linien bleiben conjugirt, wenn sie um die Axe herumgedreht werden, wobei sie zwei windschiefe Rotationshyperboloide beschreiben; je zwei solcher conjugirter Hyperboloide schneiden sich in zwei reellen Kreisen von gleichem Radius, denn betrachten wir einen Schnitt durch die Centralaxe, so hat die Hyperbel mit der kleinen Scheitelaxe die steilern Asymptoten, wegen der Reciprocität von l_1 und $tg \, \varkappa_1$, und schneidet daher nothwendiger Weise die andere Hyperbel; jede Leitlinie des einen Hyperboloids schneidet nun in einem dieser Kreise eine Erzeugungslinie des andern, und alle Erzeugungslinien des eigenen Hyperboloids, mithin auch die conjugirte jener Erzeugungslinie, sie ist daher ein Leitstrahl des Systems. Jedes Rotationshyperboloid um die Centralaxe enthält eine Schaar Leitstrahlen des Systems.

Macht man $l_1 = l_2$, so wird auch $\varkappa_1 = \varkappa_2$ und die beiden Rotationshyperboloide fallen zusammen; da jetzt je zwei conjugirte Richtungslinien auf diesem Hyperboloid liegen, so ist es eines jener Hyperboloide, von denen Nr. 61 S. 222 die Rede war; conjugirte Richtungslinien schneiden auf dem kleinsten Rotationskreis eine Involution aus, deren Centrum der Mittelpunkt des Hyperboloids ist.

Für $l_1 = l_2 = c$ wird $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 45^0$, die Rotations-Hyperbel des Hyperboloids ist eine gleichseitige.

70. Analytische Beziehungen zwischen der unendlich fernen und der endlichen Kraft eines Paares.

Damit die eine Kraft eines Paares im Unendlichen liege, muss die andere durch den Nullpunkt $a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ 0$ der unendlich fernen Ebene gehen; die Coordinaten dieser Kraft werden daher sein: $a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ m_{12}\ m_{23}\ m_{23}$, die m müssen, damit sie eine gerade Linie darstellen der Gleichung:

$$a_{14}\,m_{23} + a_{24}\,m_{31} + a_{34}\,m_{12} = 0,$$

genügen, können sonst aber willkürlich gewählt werden; hieraus ergeben sich, siehe Nr. 65 S. 239 die Werthe von:

$$S_{am} = S_{an} = a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{23}\,a_{14} = \mathfrak{R},$$

und man hat allgemein:

$$m_{ik} + n_{ik} = a_{ik}.$$

Die Coordinaten der m conjugirten Linie n sind demnach:

$$n_{12} = a_{12} - m_{12},\ n_{13} = a_{13} - m_{13},\ n_{23} = a_{23} - m_{23},$$

und

$$n_{14} = n_{24} = n_{34} = 0.$$

Zur Bestimmung der Kräfte M und N ist (S. 251) $m = e_a$, $n = 0$ und:

$$\frac{M}{e_a} = \frac{N}{0} = 1,$$

woraus sich $M = e_a$, und $N = 0$ ergiebt, wie es sein soll.

Für alle Ebenen, welche durch die unendlich ferne Linie n gehen ist laut Nr. 47 S. 177:

$$\xi' = n_{23},\ \eta' = n_{31},\ \zeta' = n_{12}.$$

Substituirt man diese Werthe in Nr. 67 S. 249 so erhält man:

$$u' = a_{14}\,n_{23} + a_{24}\,n_{31} + a_{34}\,n_{12} = S_{an} = \mathfrak{R}$$

demnach

$$\frac{\mathfrak{R}}{u'} = 1$$

und:

$$\mathfrak{R}^2 = -\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & n_{23} \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & n_{31} \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & n_{12} \\ n_{23} & n_{31} & n_{12} & \end{vmatrix}$$

Endlich ergiebt sich die Erhebung der Kraft M über der Ebene $\mathfrak{N}$, gleich:

$$M \sin \mu = \frac{\mathfrak{R}\,\omega'}{\mathfrak{N}};$$

M aber ist gleich e_a, demnach:

$$\sin \mu = \frac{\mathfrak{R}\,\omega'}{e_a\,\mathfrak{N}}.$$

Genau zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man rein geometrisch vorgehend den Sinus des Winkels bildet, den die Linie a mit der Ebene n einschliesst. Um die Coordinaten der Centralaxe zu erhalten, setzen wir

$$n_{23} = -\frac{\mathfrak{R}}{e^2_a}(a_{41} + a_{12}\omega_3 + a_{43}\omega_2),$$

$$n_{31} = -\frac{\mathfrak{R}}{e^2_a}(a_{41}\omega_3 + a_{42} + a_{43}\omega_1),$$

$$n_{12} = -\frac{\mathfrak{R}}{e^2_a}(a_{41}\omega_2 + a_{42}\omega_1 + a_{43}).$$

Damit die n die Coordinaten bezeichnen, welche auf der Axe die durch den unendlich fernen Punkt $a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ 0$ geht, senkrecht stehe, genügt es, dass die Ebenencoordinaten den eingeklammerten Werthen proportional seien; der Faktor $\mathfrak{R} : e^2_a$ muss beigefügt werden damit:

$$S_{an} = a_{14}n_{23} + a_{24}n_{31} + a_{34}n_{12} = \mathfrak{R} \text{ sei.}$$

Aus diesen Werthen ergeben sich jetzt einfach die Coordinaten der Centralaxe:

$$m_{14},\ m_{24},\ m_{34} = a_{14},\ a_{24},\ a_{34},$$

und

$$m_{23} = a_{23} + \frac{\mathfrak{R}}{e^2_a}(a_{41} + a_{42}\omega_3 + a_{43}\omega_2),$$

$$m_{31} = a_{31} + \frac{\mathfrak{R}}{e^2_a}(a_{41}\omega_3 + a_{42} + a_{43}\omega_1),$$

$$m_{12} = a_{12} + \frac{\mathfrak{R}}{e^2_a}(a_{41}\omega_2 + a_{42}\omega_1 + a_{43}).$$

Substituirt man die obigen Werthe von n in $\mathfrak{N}^2$, so wird:

$$\mathfrak{N}^2 = \frac{\mathfrak{R}^2}{e^2_a}\omega'^2, \text{ oder } \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{R}\omega'}{e_a};$$

woraus sich $\sin\mu = 1$ ergiebt, zur Bestätigung, dass die Centralaxe senkrecht auf der ihr entsprechenden Ebene $\mathfrak{N}$ stehe.

Die übrigen in den beiden vorigen Nummern geometrisch bewiesenen Eigenschaften leiten sich analytisch am leichtesten mittelst Coordinatentransformation ab. Wir legen die neuen Axen der $x'\ y'\ z'$ durch den Punkt $x_1\ y_1\ z_1\ u_1$, und die unendlich fernen Punkte $b_{41}\ b_{42}\ b_{43}\ 0$, $c_{41}\ c_{42}\ c_{43}\ 0$, $a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ 0$, d. h. wir führen die Axe der z durch den Nullpunkt $a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ 0$ der unendlich fernen Ebenen, machen also die bisher mit m bezeichnete Linie zur z' Axe.

Dann haben wir zu setzen:

$$x = \frac{b_{41}}{e_b}x' + \frac{c_{41}}{e_c}y' + \frac{a_{41}}{e_a}z' + x_1,$$

$$y = \frac{b_{42}}{e_b}x' + \frac{c_{42}}{e_c}y' + \frac{a_{42}}{e_a}z' + y_1,$$

$$z = \frac{b_{43}}{e_b}x' + \frac{c_{43}}{e_c}y' + \frac{a_{43}}{e_a}z' + z_1,$$

$$1 = 1;$$

$$0 = \xi + \frac{\beta_1}{e_a e_c}\xi' + \frac{\gamma_1}{e_a e_b}\eta' + \frac{\alpha_1}{e_b e_c}\zeta' \quad ,$$

$$0 = \eta + \frac{\beta_2}{e_a e_c}\xi' + \frac{\gamma_2}{e_a e_b}\eta' + \frac{\alpha_2}{e_b e_c}\zeta' \quad ,$$

$$0 = \zeta + \frac{\beta_3}{e_a e_c}\xi' + \frac{\gamma_3}{e_a e_b}\eta' + \frac{\alpha_3}{e_b e_c}\zeta' \quad ,$$

$$0 = v + \frac{\beta_4}{e_a e_c}\xi' + \frac{\gamma_4}{e_a e_b}\eta' + \frac{\alpha_4}{e_b e_c}\zeta' + \frac{\delta_4}{e_a e_b e_c}v' .$$

Hierin bezeichnen die e, wie oben, die Normalcoefficienten der Coordinaten, welche durch ihre Zeichen angedeutet werden, und in den beiden adjungirten Substitutionsdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} b_{41} & b_{42} & b_{43} & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & \\ a_{41} & a_{12} & a_{43} & \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ & & & \delta_4 \end{vmatrix} = \delta^3_4$$

betrachten wir die Elemente der zweiten als die Coefficienten der Elemente der erstern in diesen.

Nach der Substitution können wir über ein u und ein v verfügen; im gegenwärtigen Fall aber nicht mehr willkürlich, sondern so, dass das Product $\Re\omega'$ Nr. 67 entsprechend aus den neuen Coordinatencoefficienten gebildeten Product gleich sei; denn dieses Product muss als sechsfaches Tetraedervolumen eines Kräftepaares constant sein, es ist eine Invariante.

Bezeichnen wir die aus einem Coefficienten mit den a_{ik} und den Elementen der Determinante links mit Ausschluss der e gebildeten neuen Coefficienten wie in Nr. 66 S. 246 mit t_{ik}, so erhält man ganz wie dort vorgehend:

$$t_{12} = S_{am} = \Re, \; t_{23} = S_{ab}, \; t_{31} = S_{ae}$$

$$t_{14} = t_{24} = 0, \; t_{34} = \delta_4 .$$

t_{14} und t_{24} sind $= 0$ geworden, weil wir die Axe der z' durch den Nullpunkt $a_{41}\; a_{42}\; a_{43}\; 0$ der unendlich fernen Ebene geführt, und dadurch die unendlich fernen Linien $a\; b$ und $b\; c$ zu Leitstrahlen gemacht haben.

Nehmen wir weiter noch die Axen $x\; y$ oder die Punkte $(b_{41}\; b_{42}\; b_{43}\; 0)$ und $(c_{41}\; c_{42}\; c_{43}\; 0)$ in der $(x_1\; y_1\; z_1\; 1)$ conjugirten Ebene n an, so dass sie also den Gleichungen:

$$b_{41}\, n_{23} + b_{42}\, n_{31} + b_{43}\, n_{12} = 0,$$

und

$$c_{41}\, n_{23} + c_{42}\, n_{31} + c_{43}\, n_{12} = 0,$$

genügen, so werden auch die Axen den x' und y' zu Leitstrahlen und demnach auch $S_{ab} = S_{ac} = 0$.

Die Gleichungen des neuen Nullsystems sind jetzt:

$$\frac{\Re e_a e_b e_c}{\delta_4} x'' + \frac{\Re e_b' e_c}{\delta_4} \eta'' \quad , \xi'' = e_a y' \quad ,$$

$$\frac{\Re e_a e_b e_c}{\delta_4} y'' - \frac{\Re e_b' e_c}{\delta_4} \xi' \quad , \eta' = -e_a x' \quad ,$$

$$\frac{\Re e_a e_b e_c}{\delta_4} z'' + e_a \quad , \zeta' = \frac{\Re e_b e_c}{\delta_4}$$

$$\frac{\Re e_a e_b e_c}{\delta_4} - e_a \zeta' \quad ; v' = -\frac{\Re e_b e_c}{\delta_4} .$$

Die Wurzel aus den neuen Determinanten dieser Coefficienten $\Re'$ und der Sinus des neuen körperlichen Eckes o' sind gleich:

$$\Re' = \frac{\Re e_a e_b e_c}{\delta_4}, \; o' = \frac{\delta_4 \omega'}{e_a e_b e_c};$$

darnach ist wie es sein soll $\Re' o' = \Re \omega'$. Auch folgt, dass die Coefficienten von $\eta'' \; \xi'' 1$ und z'' in diesen Gleichungen einfach gleich $\frac{\Re'}{e_a}$ sind. e_a aber ist, wie wir auf S. 261 gesehen haben, die in der Axe der z wirkende Mittelkraft, die wir von jetzt an mit R (statt M) bezeichnen wollen; dann gestalten sich die Gleichungen wie folgt:

$$\xi' = Ry'; \; \eta' = -Rx'; \; \zeta' = \frac{\Re'}{R}; \; v' = -\frac{\Re'}{R} z',$$

reduciren.

Die Division der beiden letzten Gleichungen giebt:

$$\frac{\zeta'}{v'} z' + 1 = 0;$$

d. h. die einem Punkt $x_1 y_1 z_1 1$ entsprechende Ebene schneidet die z Axe in einem Punkt, dessen Ordinate gleich z ist. Die Division der beiden ersten Gleichungen giebt:

$$\xi' x' + \eta' y' = 0;$$

d. h. die Verbindungslinie des gegebenen Punktes und der Durchstosspunkte der z Axe mit der entsprechenden Ebene läuft parallel mit ihrer Spur in der xy Ebene.

Setzt man nun der Fig. 127 S. 254 entsprechend, $z = -\frac{1}{\zeta} = R$, so wird der Perpendikel R_1 vom Ursprung auf den Schnitt:

$$\xi' x + \eta' y + v',$$

gleich:

$$R_1 = \frac{v' o'_3}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 - 2\zeta'\eta' o_3}} = \frac{\Re' o'_3}{R\sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y' o_3}},$$

wenn mit o'_3 und o_3 der sin und cos des Axenwinkels $\widehat{xy}$ bezeichnet wird. Nun ist aber die parallel zur xy Axe gemessene Entfernung des gegebenen Punktes von der z Axe gleich:

$$l_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y' o_3},$$

mithin hat man wie oben Nr. 70 S. 261

$$l_1 R_1 = \frac{\mathfrak{R}'_1}{R} o'_3 = \mathfrak{R},$$

den in der Ebene xy wirkenden Moment, wie oben Nr. 67 S. 255.

Analog Nr. 65 S. 239 hat man zur Bestimmung von Coordinaten conjugirter Kräfte, wenn man

$$a_{12} = \frac{\mathfrak{R}}{R}, \; a_{34} = R$$

und für alle andern Indexe $a_{ik} = 0$ setzt,

$$\frac{S_{am}}{\mathfrak{R}'} = \frac{R m_{12}}{\mathfrak{R}'} + \frac{m_{34}}{R},$$

woraus sich weiter die einfache Beziehung:

$$R^2 n_{12} = \mathfrak{R}' m_{34} \text{ oder: } R^2 m_{12} = \mathfrak{R}' n_{34},$$

und für alle übrigen $m_{ik} = -n_{ik}$ ergiebt.

Die Richtungslinien conjugirter Kräfte haben also, wenn von den Zeichen abgesehen wird, nur zwei von einander verschiedene Coordinaten. Wenn 2 Coordinaten einer Linie, deren Indexe die vier Zahlen 1 2 3 4 enthalten, allein geändert werden, so muss ihr Product constant bleiben; denn die Coordinaten haben der Bedingung: $m_{12} m_{34} + m_{13} m_{42} + m_{14} m_{23} = 0$, zu genügen. Diese Bedingung erfüllen die n, denn es bleibt $n_{12} n_{34} = m_{12} m_{34}$. Die Projection $m_{34} x + m_{41} y + m_{12} = 0$, aus dem Punkt 3 des Coordinatentetraeders, dem unendlich fernen Punkt der z Axe, enthält nur eine der variabeln Coordinaten m_{12} als Constante; bei dieser Aenderung bewegt sich also die Projection der Linie auf der Ebene xy parallel mit sich selbst, und die Entfernung der Projection vom Ursprung ist diesen Constanten m_{12} proportional. Substituirt man ferner in die Gleichungen Nr. 64 S. 234 der Schnittpunkte der Linie mit einer Ebene die constanten Werthe: $0\ 0\ \zeta\ v$, so erhält man den Schnitt der Linie mit einer Parallelebene zur xy Axe, nämlich

$$u' x' = m_{13} \zeta + m_{14} v, \quad u' s' = m_{34} v,$$
$$u' y' = m_{23} \zeta + m_{21} v, \quad u' \quad = m_{43} \zeta.$$

$u' x'$ und $u' y'$ enthalten keinen der variabeln Coefficienten; ihr Verhältniss $\frac{y'}{x'}$ bleibt daher bei der Aenderung constant, und alle Schnittpunkte der Linie liegen auf einem Strahl durch den Punkt $-\frac{v}{\zeta}$ der z Axe d. h.: bei dieser Aenderung beschreibt die Linie m ein Paraboloid, dem die z Axe und auch die unendlich ferne Linie der xy Ebene angehört. Es ist das das Paraboloid von Nr. 68 S. 256, weil ihm auch die Linie n angehört.

Bezeichnen wir mit m_3 die Wurzelgrösse:

$$m_3 = \sqrt{m^2_{31} + m^2_{32} + 2 m_{31} m_{32} o_3},$$

so ist die Entfernung der Spur xy der Linie vom Ursprung gleich $l_1 = \frac{m_3}{m_{34}}$, die Entfernung der Spur der entsprechenden Linie n ist $l_2 = \frac{n_3}{n_{34}}$. Da nun $m_3 = n_3$ und $m_{12} m_{34}$ constant ist, so hat man:

$$l_1 l_2 = \frac{m^2_3}{m_{34} n_{34}} = \frac{\Re m^2_3}{R^2 m_{12} m_{34}} = \text{Const.}$$

Entsprechende Linien schneiden auf einer Erzeugungslinie des Paraboloids eine Involution aus, deren Mittelstrahl die z Axe ist. Nr. 68 S. 257.

Die Grösse der in conjugirten Linien wirkenden Kräfte ergiebt sich laut S. 247.

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{R\Re'}{R^2 m_{12} + \Re' m_{34}},$$

worin m und n die S. 247 angegebene Bedeutung haben.

Zur Bestimmung der Centralaxe in diesem System hat man laut S. 262

$$m_{12} = m_{14} = m_{24} = 0,\ m_{23} = -\frac{\Re'}{R} o_2,\ m_{31} = -\frac{\Re'}{R} o_1,\ m_{34} = R.$$

Die drei ersten Coordinaten irgend einer senkrecht auf ihr stehenden Ebene, oder was dasselbe ist, die Liniencoordinaten $n_{23}\, n_{31}\, n_{12}$ einer conjugirten Linie sind:

$$n_{14} = n_{24} = n_{34} = 0,\ \xi = n_{23} = \frac{\Re'}{R} o_2,\ \eta = n_{31} = \frac{\Re'}{R} o_1,\ \zeta = n_{12} = \frac{\Re'}{R}.$$

Endlich erhält man durch Substitution dieser Werthe in $\mathfrak{R}^2$ S. 261 das Moment $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die Centralaxe, wie S. 262.

$$\mathfrak{C} = \frac{\Re o'}{R}.$$

Die den Nummern 67 und 68 entsprechenden Formeln sind hiermit entwickelt worden, und alle Sätze, deren Beweise sich nicht von selbst hierbei ergeben haben, lassen sich leicht beweisen, so dass wir uns nicht mehr länger damit aufzuhalten brauchen. Dagegen haben wir noch zu zeigen, wie praktisch nach den Regeln der darstellenden Geometrie, die Zusammensetzungen der Kräfte ausgeführt werden können.

71. Graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum.

In Nr. 61 und Nr. 68 haben wir gesehen, dass das zweckmässigste Mittel die Nullebene eines gegebenen Punktes zu bestimmen darin bestehe, die Momente der Kräfte in Bezug auf diesen Punkt zusammenzusetzen. Das ist aber nichts anderes als ausser dem gegebenen Punkt noch die unendlich ferne Ebene anzunehmen um die einzelnen Kräfte in eine parallele gleich grosse Kraft durch den Punkt, und in ein unendlich fernes Moment zu zerlegen. Setzt man dann alle durch den Punkt gehenden Kräfte zu einer endlichen, und alle unendlich fernen Kräfte zu einer eben solchen zusammen, so gelangt man unmittelbar zum Kräftesystem von Nr. 68 Fig. 127 S. 254, mittelst dessen conjugirte Punkte und Ebenen,

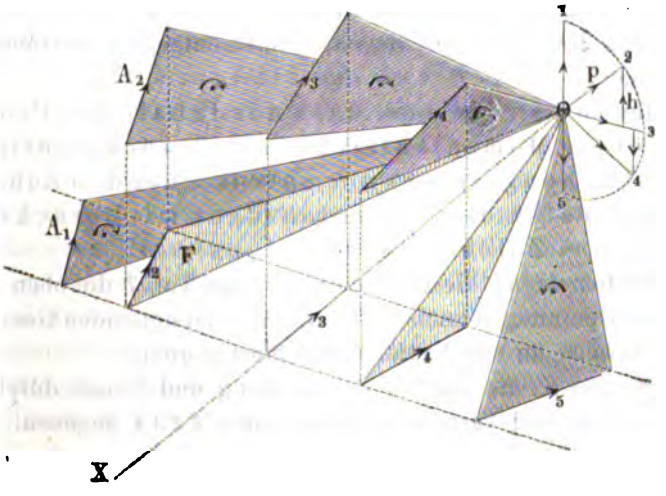
dann Linien graphisch leichter zusammengesetzt werden können, als mittelst zweier gegebenen endlichen Kräfte.

Die endlichen Kräfte werden direct addirt, d. h. die Fig. 96 S. 161 axonometrisch angedeuteten Operationen werden graphisch mittelst zweier Projectionsebenen ausgeführt, wobei es sich von selbst versteht, dass die Streckendifferenzen des Kräftezuges den Projectionen der Kräfte gleich sind.

Laut dem Nr. 61 S. 219 Bewiesenen und S. 253 Angedeuteten werden die Momente gerade so wie Kräfte zusammengesetzt, indem man sie durch Linien darstellt, welche der Momentenfläche proportional sind und senkrecht auf ihr stehen. Sind die einzelnen Kräfte oder Momente, wie es wohl meistens der Fall sein wird, durch ihre Projectionen auf zwei rechtwinkeligen Ebenen gegeben, so ist es nicht nothwendig, die projicirende Fläche einer jeden einzelnen Kraft oder eines jeden Momentes umzuklappen und zu verwandeln, um den Momentenzug zu construiren, sondern es genügt: die Projectionen zu verwandeln, um die Ordinaten-Zunahme des Momentenzuges zu erhalten.

Denken wir uns, es drehe sich die Kraft A_1 (Fig. 128) sammt ihrem Perpendikel p_1, der auf der Ebene OA_1 senkrecht steht und

Fig. 128.



der unendlich fernen Kraft entspricht, die man erhält, wenn A_1 in eine solche und in eine zu ihr selbst parallele Seitenkraft durch O

zerlegt wird, um die Axe OX so, dass sie einen senkrechten Kreiskegel und der Perpendikel eine Ebene beschreibt: so wird in jeder einzelnen Stellung z. B. A_2 der Winkel, den die Ebene OA_2 mit der horizontalen Projectionsebene OA_2A_5 bildet, gleich dem Winkel sein, den der senkrechte Strahl p_2 mit der Verticalen 105 bildet; und es wird sich daher die Momentenfläche OA_2 zu ihrer Projection OF_2 gerade so verhalten, wie der Strahl p_2 zu seiner verticalen Projection h_2, so dass man die letztere einfach durch Verwandeln der Projectionsfläche OF_2 erhält.

Ferner geht auch aus Fig. 128 hervor, dass der Drehungssinn der Projectionsfläche dem Sinn der Perpendikel h entspreche; hat man einmal dem Drehungssinn von A_1 den Sinn von p_1 im Strahl 501 angewiesen, so wird bei der Drehung von A_1 um die Axe OX, h denselben Sinn haben und abnehmen, bis zur verticalen Stellung der Ebene OA_3; in dieser Stellung werden F_3 und h_3 gleich 0 sein, weil p_3 horizontal liegt. Bewegt sich die Fläche über die Verticalebene hinaus, so ändert sich der Drehungssinn der projicirenden Fläche F_4, gleichzeitig aber auch der Sinn der Projection h_4 von p_4; in einer solchen Lage der Kraft A wird die verticale Ordinate des Momentenzugs in Folge Hinzukommens des Strahles p_4 um h_4 abnehmen, nicht zunehmen. Hat sich endlich die Ebene OA um π gedreht und ist die Kraft A in die Horizontalebene nach OA_5 zurückgekommen, so wird der Strahl O_5 gerade in der Verlängerung des Strahles O_1 liegen, d. h. in entgegengesetztem Sinn erscheinen.

Hiermit wäre bewiesen: dass der Inhalt der Projection einer Momentenfläche mit Berücksichtigung ihres Drehungssinnes der entsprechenden Zunahme der Ordinaten des Momentenzuges mit Berücksichtigung des Zeichens proportional sei.

Mit Benutzung dieses Satzes sind auf Taf. 7 die oben angedeuteten Operationen nach den Regeln der darstellenden Geometrie beispielsweise an vier Kräften ausgeführt worden.

Die vier Kräfte sind in der Richtung und Grösse durch ihre horizontalen und verticalen Projectionen 1234 gegeben. Zerlegen wir jede derselben in eine unendlich ferne, und in eine in Richtung und Grösse gleiche, durch den Punkt O gehende Seitenkraft, so addiren sich alle die letztern mittelst des Kräftezuges $O1234M$ nach den bekannten Regeln (Nr. 38 S. 161) zu einer

durch den Punkt O gehenden Mittelkraft OM, die in Richtung und Grösse durch die Linie OM gegeben ist.

Die Richtungen der entsprechenden unendlich fernen Kräfte sind durch Strahlen bestimmt, welche auf den Momentenflächen senkrecht stehen, sie stehen also auch senkrecht auf den Linien, welche in der Momentenfläche parallel zu den Projectionsebenen gezogen sind.

Man erhält die Projection einer horizontalen Linie in der Fläche O_1 z. B., deren Umfang ganz in beiden Projectionsebenen ausgezogen ist, indem man in der verticalen Projection eine Horizontale a_1 zieht und die Schnitte derselben mit dem Umfang der projicirenden Momentenfläche auf die entsprechenden Linien in der Horizontalebene projicirt, wodurch man dort die Projection a der Horizontalen in der Momentenfläche erhält. Auf dieselbe Weise wird die Projection b_1 der Linie, welche in der Momentenfläche zur verticalen Projectionsebene parallel läuft, bestimmt.

Diese Linien, welche zu den Schnitten der Momentenfläche mit den Projectionsebenen parallel laufen, sind bei allen Kräften — . — · — irt. Da die einzelnen Strecken des Momentenzuges auf den Momentenflächen senkrecht stehen, so stehen auch ihre Projectionen auf dieser Linie senkrecht. In beiden Projectionsebenen steht z. B. die Strecke ...3... des Momentenzuges $O\,1\,2\,3\,4\,U$ senkrecht auf — · — · — der Kraft 3.

Die Ordinatenzunahme dieses Zuges senkrecht auf jeder Projectionsebene ist ferner dem Inhalt der Fläche proportional, auf welche sich die Momentenfläche projicirt; in beiden Projectionsebenen sind daher diese auf den gleichen Radius r, wie schon in Nr. 49 S. 187 angedeutet wurde, reducirt, indem bei der Kraft 1 z. B. der Radius von O nach dem Schnitt der Kraft 1 mit dem Kreis r als Basis des Dreiecks $O1$ betrachtet wurde: dann wird der Inhalt der projicirten Momentenfläche durch die Antiprojection h_1 in der Horizontalen und k_1 in der verticalen Projection dargestellt. In welchem Sinne diese Ordinatenänderungen jedesmal zu nehmen sind, ist durch Pfeile angedeutet; dem Drehungssinn der Flächenprojectionen entsprechen die Pfeile auf den Kreisbogen, und die ihnen entsprechenden Sinne der Ordinatenzunahmen sind auf den von ihnen ausgehenden senkrechten zur Grundlinie in der andern Projectionsebene angedeutet.

Diesen Antiprojectionen sind nun die Ordinatenzunahmen des

Momentenzuges, nämlich k'_1 in der verticalen und k_1 in der horizontalen Projection gleich. Da noch ausserdem die einzelnen Strecken auf den Linien — · — · — senkrecht stehen, so sind die aufeinanderfolgenden Endpunkte des Momentenzuges vollständig bestimmt.

Diese Constructionen werden ungenau, wenn die Momentenfläche sich einer Ebene nähert, welche auf beiden Projectionsebenen senkrecht steht. Man kann sich aber dann leicht dadurch helfen, dass man die eine derselben dreht. Dieses ist z. B. bei der Kraft 2 geschehen, wir haben dort die Projection der Horizontallinie a_2 als neue Grundlinie einer neuen verticalen Projectionsebene betrachtet, und diese um jene Grundlinie umgeklappt, es kam dann die neue Projection der Kraft 2 nach 2_1 und der Pol O nach O_1 zu liegen. Die Momentenfläche wurde dann wie früher reducirt, und man erhielt dann als Antiprojection von 2_1 senkrecht auf c_2 die Länge k_2, welche hier der der ganzen Strecke 2 des Momentenzuges gleich ist, weil diese auf der Grundlinie a_2 senkrecht steht.

Zur Bestimmung der verticalen Projection genügt es vollkommen, die Ordinaten-Ab- oder Zunahme durch Reduction der Momentenfläche $O2$ in der Horizontalebene zu bestimmen.

Auf solche Weise können alle Strecken des Momentenzuges $O1234U$ aufgetragen werden, und man erhält als Strahl den Strahl OU in beiden Projectionen, welcher in Richtung und Länge der Richtung und Grösse der Mittelkraft der sämmtlichen unendlich fernen Kräfte entspricht.

Hiermit ist ein Fig. 127 S. 254 ganz analoges Kräftesystem vollständig bestimmt; OM ist in Richtung und Grösse die Mittelkraft M; die auf OU senkrechte und durch O gehende Ebene ist die des Momentes $\mathfrak{M}$, die Spuren wurden nicht eingezeichnet, weil wir nicht mit dieser Ebene, sondern immer nur mit dem Perpendikel OU construiren werden.

Zunächst wollen wir die Centralaxe C und das ihr entsprechende Moment $\mathfrak{C}$ bestimmen; zu diesem Ende haben wir die unendlich ferne Kraft, welche dem Strahl OU entspricht, in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, wovon die eine senkrecht auf OM steht, und die andere in der unendlich fernen Ebene in einer und derselben Ebene mit OM liegt. Die erstere wird durch den Perpendikel von U auf OM dargestellt, die zweite durch die Entfernung

seines Fusspunktes von O. Um diesen Fusspunkt zu bestimmen, denken wir uns durch U eine Ebene senkrecht auf OM gestellt; eine durch U gehende horizontale Linie in dieser Ebene wird durch die Linien u und u_1 projicirt, wovon erstere senkrecht auf OM steht. Eine zur verticalen Projectionsebene parallele Linie wird durch die Linien v und v_1 dargestellt, die durch einen Punkt von $(u\,u_1)$ geht, und von denen v_1 senkrecht auf OM in der Verticalprojection steht. Die Schnitte dieser beiden Linien $(u\,u_1)$ $(v\,v_1)$ mit der verticalen Ebene, welche in der horizontalen Projectionsebene durch OM projicirt wird, sind die Punkte d, d_v; die sie verbindende Gerade liegt gleichzeitig in der Ebene, die senkrecht auf OM steht und in der Verticalebene, die OM projicirt, ihr Schnitt mit OM giebt daher die verticale Projection des gesuchten Fusspunktes U, U_v. Zur Controle kann man die horizontale Projection desselben auf dieselbe Weise bestimmen.

Die senkrecht aufeinander stehenden Entfernungen U_v und U_r dieses Punktes von O und U entsprechen den Momenten der Seitenkräfte der unendlich fernen Mittelkraft, von denen die U_v entsprechende senkrecht auf OM steht; die andere U_r entsprechende liegt jedoch mit OM in einer Ebene, weil U_r senkrecht auf OM steht, wir können daher die Mittelkraft OM mit ihr zusammensetzen. Um die wahren Längen von U_r und U_v, deren wir übrigens zu unserer Construction nicht bedürfen, zu erhalten, wurde noch auf Taf. 7 die Länge OM parallel zur verticalen Projectionsebene gestellt, die wahren Entfernungen OU und UM bestimmt, und mit diesen Längen das Dreieck construirt, von dem U_r die Höhe und U_v das Segment ist. Diese Constructionen bedürfen keiner weitern Erläuterung.

Durch die Zusammensetzung wird OM in der Art nach C versetzt, dass die Momentenfläche von $\mathfrak{C} = OM$ mit Berücksichtigung des Sinnes gleich dem durch U_r dargestellten Moment ist.

Die Perpendikel von den Endpunkten M auf die Radien, die durch die Schnitte von C mit den Verwandlungskreisen gehen, müssen in jeder der Projectionsebenen gleich der Differenz der Endpunkts-Ordinaten von U_r sein, welche senkrecht auf diesen Projectionsebenen stehen. Diese Ordinatendifferenzen sind gleich den Linien h_u und k_u in den horizontalen und verticalen Projectionsebenen. Beschreibt man daher von M aus Kreise mit den Radien $k'_u = k_u$ und $h'_u = h_u$, so bestimmen die Radien der Ver-

wandlungskreise, welche diese Kreise berühren, die Schnitte von C mit den Verwandlungskreisen.

Zur Controle kann man noch untersuchen, ob die Projectionsfläche OC senkrecht auf U_1 steht.

Diese Richtungslinie C ist nun die Centralaxe. Ein Stück von C, das gleich der Mittelkraft der vier Kräfte 1 2 3 4 ist, ist stark ausgezogen. Diese vier Kräfte reduciren sich daher auf diese Kraft C und auf ein Drehungsmoment $\mathfrak{C}$, das mit der Intensität $U_1 r$ senkrecht um diese Axe dreht.

Besonders bequem zur Construction von Kräften ist die Benutzung der Parallelen zu der Horizontalebene durch den Punkt O, wir bestimmen daher zunächst noch den Nullpunkt dieser Ebene, indem wir ganz analog, wie bei der Construction der Centralaxe, vorgehen. Wir zerlegen das Moment oder die unendlich ferne Kraft OU in zwei Seitenmomente, von welchen die eine in der Horizontalebene durch O liegt und die andere durch den unendlich fernen Punkt von M geht. Der Perpendikel, welcher die erstere darstellt, ist die Verticallinie durch O; alle Linien, die senkrecht auf OM stehen und durch den Endpunkt U des Momentenzuges gehen, liegen in der schon construirten Ebene uv. Der Schnittpunkt V dieser Ebene mit der Verticallinie giebt daher den noch unbekannten Eckpunkt des Linienzuges OVU. Er ist der Schnitt der Linie d, d_1 mit der Verticalen durch O, denn von Constructionswegen liegt diese Linie in der gleichen Ebene.

Die Coordinatendifferenzen der Strecken VU sind nun mit Berücksichtigung des Sinnes die Antiprojectionen der Kraft M_1, wenn diese auf die Basis r reducirt wird; mittelst derselben wird die entsprechende neue Lage von M_1 gerade so als wie die von C construirt. Der Nullpunkt einer jeden horizontalen Ebene ist ihr Schnitt mit M_1.

Taf. 7 wurde das Stück der neuen Axe aufwärts von der Horizontalebene durch O stärker ausgezogen, und wir denken uns durch den zweiten Endpunkt eine weitere Horizontalebene gelegt. So entspricht jetzt diese Axe mit ihren zwei Horizontalebenen ganz der Fig. 127 S. 254. Wir wollen jetzt noch die dort angedeuteten Constructionen ausführen und zu einem gegebenen Punkte die entsprechende Ebene bestimmen; wir tragen die Mittelkraft M von ihm aus abwärts auf, führen durch ihre Endpunkte je eine Ebene und bezeichnen mit $\varkappa$ Taf. 7 den obern End-

punkt. Um leicht Linien zu ziehen, die senkrecht auf M_1 stehen, also parallel mit der Ebene uv sind, betrachten wir die Verticalebene durch M_1 als neue Projectionsebene und klappen sie um ihren Schnitt mit der Horizontalebene durch O in diese; es fällt dann M_1 nach M_1' und $\varkappa$ nach $\varkappa_1'$, wir verwandeln die Momente $\varkappa M_1$ in beiden Projectionen auf die Basis r in die Antiprojectionen h_m und k'_m. Mit Berücksichtigung dieser Projectionsdifferenzen ist der Linienzug des Momentes $\varkappa$ gleich $O'N$ und $O'V'N'$, wo $O'V'$ gleich OV gleich dem Moment der Horizontalebene ist, und wo $O'N$ senkrecht auf l_1 steht. Die Ebene K, die durch K geht, und deren Spuren senkrecht auf $O'N$ und $O'N'$ stehen, ist die gesuchte Ebene.

Wäre statt des Punktes die Ebene K gegeben und der entsprechende Punkt $\varkappa$ zu bestimmen, so wäre genau umgekehrt zu verfahren. Der Strahl $O'N'$, der senkrecht auf der verticalen Spur steht, schneidet auf der Linie $V'N'$ den Endpunkt des Linienzuges ab, durch den die Höhen h'_m und k_m gegeben sind, mittelst deren der Punkt $\varkappa$ auf der Parallelen l_1 zur horizontalen Spur bestimmt wird.

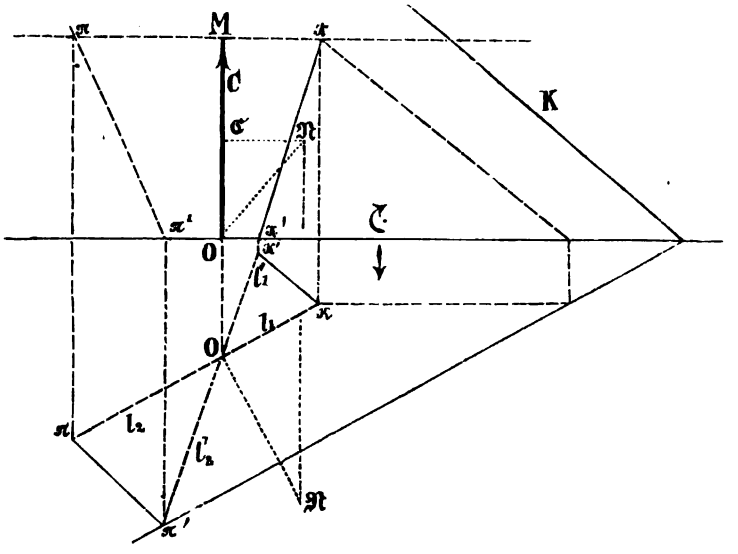
Suchen wir insbesondere den entsprechenden Punkt der Ebene senkrecht auf M_1, so wird $k_m = 0$, d. h. die verticale Projection der Centralaxe fällt mit M_1' zusammen. Mit derselben Linie fällt auch der Strahl ON' zusammen, demnach ist der Perpendikel von V' auf M_1' die Ordinatendifferenz h'_c, welche mit r multiplicirt, gleich der horizontalen Projection M_1 mit der Entfernung der Centralaxe C von ihr sein muss. Dass C auf Taf. 7 durch den Fusspunkt des Perpendikels $V'N'$ geht, ist Zufall und darf daher nicht als Regel zur Bestimmung der Centralaxe betrachtet werden; C würde nicht mehr durch diesen Fusspunkt gehen, sobald ein anderes r als Verwandlungsbasis gewählt würde.

Betrachtet man $\varkappa$ als den Durchstosspunkt einer Linie $\varkappa\varkappa_1$ mit der Horizontalebene durch den obern Endpunkt von M_1, und ist $\varkappa_1$ der Durchstosspunkt mit der Ebene durch den untern Endpunkt, so ist laut Fig. 127 S. 254 der Schnittpunkt π_1 der Linie l' mit der horizontalen Spur der Ebene K ein Punkt der conjugirten Linie $\pi_1\pi$; ihren Durchstosspunkt π mit der obern Ebene erhält man am einfachsten dadurch, dass man $l_2 = l_1 l'_2 : l'_1$ macht. Taf. 7 wurde dieser Punkt auch noch als Schnitt einer Ebene durch π_1 parallel zu $\varkappa\varkappa_1$ und M_1 mit der Linie l_1 bestimmt; diese Con-

struction bedarf keiner weitern Erläuterung. Schliesslich wurden noch alle Linien der umgeklappten Verticalebene durch M_1 in die ursprüngliche Verticalebene zurückgetragen.

Das hier angedeutete Verfahren ist wohl in den meisten Verhältnissen das praktischste; zwar würde es noch einfacher sein, die Normalebene uv zur Centralaxe als Projectionsebene anzunehmen, allein man hätte dann eine förmliche Coordinatenverwandlung vorzunehmen; wie sich aber die Constructionen nach dieser Verwandlung gestalten, zeigt Fig. 129.

Fig. 129.



Die Bezeichnung ist dieselbe als wie in Fig. 127 S. 254, und auf Taf. 7. Zur Bestimmung der dem Punkt $\varkappa$ entsprechenden Ebene K hat man den Perpendikel $O\mathfrak{N}$ so lang zu machen, dass seine Coordinatendifferenz mit Berücksichtigung des Sinnes h_c der Fläche $\varkappa OC$ proportional ist, dann stehen die Spuren von K auf $O\mathfrak{N}$ senkrecht. Ist dann $\varkappa'$ der andere Endpunkt der Linie $\varkappa\varkappa'$, so ergiebt sich ein Punkt der conjugirten Linie $\pi\pi'$ durch Verlängerung von $O\varkappa'$ bis π', und $\pi\pi'$ läuft parallel mit $\varkappa\varkappa'$.

72. Die Zerlegung der Kräfte und das Kräftetetraeder.

In sehr vielen Fällen genügen die in den vorigen Nummern mitgetheilten Methoden, um die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Aufgaben zu lösen. Es handle sich z. B. darum, mittelst einer einzigen Kraft, deren Richtung gegeben ist, allen Kräften zu widerstehen, welche an einer durch zwei feste Punkte gehenden Axe wirken.

Wir nehmen einen der beiden festen Axenpunkte als Pol für die in der vorigen Nummer dargelegte Zusammensetzung der Kräfte, und erhalten eine endliche, durch diesen Punkt gehende Kraft M, und eine unendlich ferne Kraft $\mathfrak{N}$, die in einer Ebene wirkt, welche durch den construirten Normalstrahl $O\mathfrak{N}$ bestimmt werden kann. Ferner legen wir durch den zweiten festen Axenpunkt und die gegebene Widerstandslinie eine Ebene K, ermitteln ihren Nullpunkt $\varkappa$ und ihren Schnitt mit der Ebene $\mathfrak{N}$; zerlegt man nun die Kraft OM nach der Richtung $O\varkappa$ und parallel zum Schnitt der Ebene NK, so ist die erstere OK die Kraft, welche auf den festen Punkt O wirkt, die zweite ist in Richtung und Grösse die, welche im Schnitt der Ebene NK wirkt. Da die Ebene K den zweiten Axenpunkt und die Widerstandslinie enthält, so kann man sie in ihrem Schnitt mit dieser letztern in zwei Seitenkräfte nach den Widerstandslinien und nach dem zweiten festen Axenpunkt zerlegen; jene ist der gesuchte Widerstand und diese der Druck oder Zug auf den zweiten festen Axenpunkt.

Auf ähnliche Weise wird man wohl immer vorgehen müssen, wenn man Kräfte im Raum zusammenzusetzen und dann zu zerlegen hat. In gewissen Fällen wird die folgende allgemeinere Auffassung scheinbar (weil mehr auszuführende Constructionen vorausgesetzt werden) rascher zum Ziele führen. Weiter oben Nr. 56 S. 202 haben wir gesehen, dass ein System von Kräften in der Ebene, nach der Richtung von drei Kräften zerlegt werden kann, die sich nicht in einem Punkt schneiden. Für den Raum giebt es ein ganz analoges Prinzip: Jedes räumliche Kräftesystem lässt sich durch sechs Kräfte darstellen, welche in den Kanten irgend eines Tetraeders wirken.

Zerlegt man nämlich alle Kräfte nach Nr. 60 S. 215 in zwei Seitenkräfte, von denen die eine durch eine Ecke des Tetraeders

geht, und die andere in der gegenüberliegenden Tetraederfläche liegt, so lässt sich jene, weiter nach den Richtungen der drei durch den Punkt gehenden Tetraederkanten, und diese nach den drei in der Fläche liegenden Kanten zerlegen.

Aus der Entstehung dieser Kantenkräfte geht hervor, dass wenn eine Ecke des Tetraeders und die gegenüberliegende Seite festgehalten, die sechs Kanten dann aber beliebig geändert werden; sowohl die drei durch den Punkt gehenden als auch die drei in der Gegenebene liegenden Kräfte, immer nur eine und dieselbe Mittelkraft haben können.

Hält man zwei Gegenkanten, ausserdem noch zwei Ecken der einen oder, was dasselbe ist, zwei Ebenen, die durch die anderen Ecken gehen, fest, so haben je zwei der Kantenkräfte, welche durch einen der festen Punkte gehen, oder in einer der festen Ebenen liegen, eine constante Mittelkraft, wie auch die zwei beweglichen Punkte und Ebenen geändert werden mögen. Denn betrachtet man eine der festen Ebenen und ihre feste Gegenecke als Zerlegungsebene und Punkt, so ist die Kraft, die in der festen Ebene wirkt, constant, im Schnitt dieser constanten Kraft mit der ebenfalls unveränderlichen Kante lässt sich die Kraft nach der Richtung der Kante und der in der festen Ebene liegenden festen Ecke zerlegen; diese letztere Kraft ist die constante Mittelkraft der beiden in der festen Ebene liegenden, veränderlichen Kantenkräfte.

Mittelst dieses Tetraeders lässt sich die am Anfang dieser Nummer gestellte Aufgabe einfacher lösen. Als Ecken des Tetraeders werden die zwei festen Axenpunkte, und zwei beliebige Punkte auf der Widerstandslinie angenommen, die in ihr wirkende Kantenkraft ist der gesuchte Widerstand. Der Widerstand, den die beiden festen Axenpunkte auszuhalten haben, ist die constante Mittelkraft der beiden veränderlichen Kantenkräfte, welche durch ihn gehen. Mit jedem dieser Axenpunktwiderstände lässt sich ein beliebiger Theil der in der Axe selbst wirkenden und in zwei Theile zerlegten Kraft zusammensetzen, und dadurch kann man bewirken, dass die eine der beiden Kräfte jeden beliebigen Winkel mit der Axe bilde. Auch kann jede dieser constanten Mittelkräfte normal zur Axe und nach der Richtung der Axe zerlegt werden. Diese letztern zwei, vermehrt um die ursprünglich schon in der Axe wirkende Kraft, können dann an einem dritten, besonders hierfür construirten Stützpunkt der Axe aufgehoben werden, z. B.

mittelst einer Pfanne oder eines Schulterringes bei den grossen Wendelbäumen, welche Fabriken treiben.

Das Kräftetetraeder ist nur ein specieller Fall der viel allgemeineren Zerlegung der Kräfte in 6 Seitenkräfte, von denen nicht mehr als 3 durch einen Punkt gehen und ebenfalls nicht mehr in einer Ebene liegen dürfen, deren Richtungen aber sonst ganz beliebig angenommen werden können. Die Beschränkung auf das Maximum von drei Richtungslinien durch einen Punkt, oder in einer Ebene ist nothwendig, weil bei Annahme von vier Kräften durch einen Punkt oder in einer Ebene die Mittelmomente des Systems nicht unbedingt in zwei Momente in der Ebene der übrig bleibenden Kräfte zerlegt werden können. Es müssten nämlich die drei Momentenflächen sich in einer Linie schneiden, wenn obige Annahme erfüllt sein soll.

Die allgemeine Zerlegung können wir nur analytisch ausführen.

73. Analytische Zerlegung der Kräfte.

Die analytische Zerlegung einer Kraft M, die durch den Punkt $x_4\ y_4\ z_4\ 1$ geht, oder einer andern N, die in der Ebene $\xi''\ \eta''\ \zeta''\ v''$ liegt, lässt sich jetzt viel leichter ausführen als es früher hätte geschehen können.

Gehen die drei Kräfte durch den Punkt, so dürfen nur die drei $l_{41}\ l_{42}\ l_{43}$ willkürlich angenommen werden, indem alle l durch:

$$\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

gegeben sind.

Es genügen daher die drei Gleichungen:

$$\frac{M}{m} m_{41} = \frac{A}{e} l_{41} + \frac{A'}{e'} l'_{41} + \frac{A''}{e''} l''_{41},$$

$$\frac{M}{m} m_{42} = \frac{A}{e} l_{42} + \frac{A'}{e'} l'_{42} + \frac{A''}{e''} l''_{42},$$

$$\frac{M}{m} m_{43} = \frac{A}{e} l_{43} + \frac{A'}{e'} l'_{43} + \frac{A''}{e''} l''_{43};$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{A}{e\begin{vmatrix} m_{41} & l'_{41} & l''_{41} \\ m_{42} & l'_{42} & l''_{42} \\ m_{43} & l'_{43} & l''_{43} \end{vmatrix}} = \frac{A'}{e'\begin{vmatrix} l_{41} & m_{41} & l''_{41} \\ l_{42} & m_{42} & l''_{42} \\ l_{43} & m_{43} & l''_{43} \end{vmatrix}} = \frac{A''}{e''\begin{vmatrix} l_{41} & l'_{41} & m_{41} \\ l_{42} & l'_{42} & m_{42} \\ l_{43} & l'_{43} & m_{43} \end{vmatrix}} = \frac{M}{m\begin{vmatrix} l_{41} & l'_{41} & l''_{41} \\ l_{42} & l'_{42} & l''_{42} \\ l_{43} & l'_{43} & l''_{43} \end{vmatrix}}.$$

Sind insbesondere $l\,l'\,l''$ die in dem Eckpunkt 4 eines Tetraeders sich schneidenden Kanten 41, 42, 43, so hat man wegen:

$$l'_{ik} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \text{ und } l''_{ik} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} l'_{42} & l''_{42} \\ l'_{43} & l''_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_4 - y_2, & y_4 - y_3 \\ z_4 - z_2, & z_4 - z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = X_1,$$

wenn man unter $X_i\, Y_i\, Z_i\, U_i$ die Unterdeterminanten von:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

versteht. Ebenso findet man den Coefficienten von l_{42} und l_{43} in der Determinante des Nenners von M gleich Y_1 und Z_1; demnach ist diese Determinante gleich: $(x_4 - x_1)\, X_1 + (y_4 - y_1)\, Y_1 + (z_4 - z_1)\, Z_1 = -D$.

Die Determinante im Nenner von A ist gleich:

$$\begin{vmatrix} m_{41} & m_{42} & m_{43} & \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Verbindung der ersten und letzten Zeile giebt die negativen Werthe von m, die Verbindung der zweiten und dritten Zeile die l der Linie 23, oder der Gegenkante von l. Bezeichnen wir daher das Linienmoment von m und diesem $l^{(23)}$ kurz mit $S_{m,23}$, so erhalten wir für die Kräfte, welche in den Kanten wirken:

$$\frac{A}{e S_{m,23}} = \frac{A'}{e' S_{m,31}} = \frac{A''}{e'' S_{m,12}} = \frac{M}{mD}.$$

Die Zerlegung der Kraft N in drei Seitenkräfte, deren Richtungen ein Dreieck 321 bilden, ergiebt sich aus den Gleichungen

$$\frac{N}{n} m_{32} = \frac{A}{e} l_{32} + \frac{A'}{e'} l'_{32} + \frac{A''}{e''} l'_{32},$$

$$\frac{N}{n} m_{13} = \frac{A}{e} l_{13} + \frac{A'}{e'} l'_{13} + \frac{A''}{e''} l''_{13},$$

$$\frac{N}{n} m_{21} = \frac{A}{e} l_{21} + \frac{A'}{e'} l'_{21} + \frac{A''}{e''} l''_{21}.$$

Die Lösung brauchen wir nicht anzuschreiben, sie sieht geradeso wie die der obigen Gleichung aus.

Wird nun das Dreieck als Basis eines Tetraeders betrachtet, dessen Seitenflächen $\xi_i\, \eta_i\, \zeta_i\, v_i$ sind, so erhält man, ganz wie oben vorgehend:

$$\frac{A}{e S_{n,41}} = \frac{A'}{e' S_{42}} = \frac{A''}{e'' S_{43}} = \frac{N}{n \Delta},$$

worin Δ die Determinante $(\xi_1\ \eta_2\ \zeta_3\ 1_4)$ der Ebenen-Coordinaten ist.

Sind M und N conjugirte Kräfte eines und desselben Systems, so könnte man die Werthe von $\frac{M}{m}$ und $\frac{N}{n}$ aus Nr. 67 S. 247 in obige Ausdrücke substituiren, allein auf einfachere Weise werden wir weiter unten zu den treffenden Werthen von A gelangen.

Ein Kräftesystem im Raum lässt sich, wie oben schon bemerkt wurde, durch 6 Kräfte darstellen, welche nach beliebigen Richtungen wirken, von denen aber nicht mehr als wie drei durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen dürfen. Die Kräfte ergeben sich aus der Lösung der sechs Gleichungen:

$$a_{12} = l_{12}\frac{A}{e} + l'_{12}\frac{A'}{e'} + l''_{12}\frac{A''}{e''} + l'''_{12}\frac{A'''}{e'''} + l^{IV}_{12}\frac{A^{IV}}{e^{IV}} + l^{V}_{12}\frac{A^{V}}{e^{V}},$$

$$a_{13} = l_{13}\frac{A}{e} + l'_{13}\frac{A'}{e'} + l''_{13}\frac{A''}{e''} + l'''_{13}\frac{A'''}{e'''} + l^{IV}_{13}\frac{A^{IV}}{e^{IV}} + l^{V}_{13}\frac{A^{V}}{e^{V}},$$

u. s. f. für die weitern Indexe 14, 23, 42, 34.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen bietet nichts Besonderes dar; ganz besonders einfach aber wird diese, wenn die Richtungslinien die sechs Kanten eines Tetraeders sind. Liegen sich z. B. die Kanten l und l^V gegenüber, so multiplicire man zur Bestimmung von A jede Gleichung a_{ik} mit dem l^V, das den Ergänzungsindex a trägt; dann erhält man:

$$S_{a\,l^V} = S_{l\,l^V} \cdot \frac{A}{e},$$

denn alle andern Linienmomente S_{ll} werden gleich 0, weil l^V, mit Ausnahme der Gegenkante l, alle übrigen Kanten schneidet.

Sind die l Unterdeterminanten zweiten Grades von D und Δ, so ist $S_{l\,l^V}$ für alle Gegenkanten constant gleich D oder Δ; in diesem Fall ist:

$$\frac{A}{e} = \frac{S_{a\,l^V}}{D}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit jenem von Nr. 66 S. 246, so folgt: Wird durch Coordinatenverwandlung das System auf irgend ein Tetraeder bezogen, so sind die Coefficienten des Nullsystems die in den Tetraederkanten wirkenden Kräfte, wenn das System nach den Richtungen derselben zerlegt wird.

Wendet man die obige Zerlegung auf das cartesische Coordinatentetraeder selbst an, so findet man in der That alle $e = 1$, $D = 1$. Für die Kanten sind alle l gleich 0 mit Ausnahme des l, welches die Indexe der Enden trägt; für die der Kante ik gegenüberliegende Kante, reducirt sich also $S_{a\,l}$ auf $a_{ik}\ l_{gh} = a_{ik}$. Es ist also $A = a_{ik}$ die in der Coordinatenaxe ik wirkende Kraft.

Hiermit wäre auch die Bedeutung der Coefficienten a_{ik} ermittelt. Bei cartesischen Coordinatenaxen sind die in der x y und z Axe wirkenden Kräfte a_{11} a_{12} a_{13} gewöhnliche endliche Kräfte, die drei in den Ebenen xy, yz, zx wirkenden Kräfte a_{12}, a_{23}, a_{31} sind unendlich ferne und kleine Kräfte, also Drehungsmomente.

Viertes Kapitel.

Die projectivische Verwandtschaft zwischen dem Kräfte- und dem Seilpolygon.

---

74. Collineäre und reciproke Beziehungen.

Da zu jedem Kräftepolygon, es mag irgend eine beliebige Figur bilden, ein Seilpolygon construirt werden kann und umgekehrt, so können wir mit einem derselben jedem beliebigen Linienzug, also auch einem Polygon, folgen, das einer Curve zweiter Ordnung um- oder einbeschrieben ist. Es fragt sich nun aber, ob und wann dann auch das erste Polygon eine Curve zweiter Ordnung werden kann.

Die Frage wäre beantwortet, wenn wir sagen könnten, in welchen Fällen die beiden Polygone projectivisch aufeinander bezogen werden können, denn dann müssen Kräfte- und Seilpolygon gleichzeitig Gebilde zweiter Ordnung werden.

Wollten wir die beiden Gebilde, das Kräfte- und das Seilpolygon, collineär auf einander beziehen, so müssten wir das erstere auf den Kräftebüschel, den Inbegriff aller Kräftelagen, im Seilpolygon beziehen; beide Polygone hätten dann die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein, wären ähnlich und ähnlich gelegen. Wird dann das Seilpolygon construirt, so gelangt man zur Verwandlungsfigur (Fig. 51 S. 90), in welcher $O1\,2_1\,3_1$ etc. das Seilpolygon vorstellen würde. Da aber die verwandelte Fläche dem Moment der Mittelkraft, also auch dem Moment einzelner Kräfte, die sie zusammensetzen, proportional ist, so gelangt man

zum Schluss, dass das Moment einer beliebigen Zahl Kräfte, deren Lage im Seilpolygon dem Kräftepolygon ähnlich ist, dem Flächeninhalt dieses letztern proportional sei.

Dieses Resultat mag interessant sein, allein es führt uns nicht zum Ziel, denn die beiden Polygone $O1\,2_1\,3_1$ und $O1\,2\,3$ (Fig. 51) sind nichts weniger als projectivisch. Wir wollen also der collineären Verwandtschaft nicht weiter nachforschen, sondern es versuchen, die Gebilde reciprok auf einander zu beziehen.

Reciprok können das Kräfte- und Seilpolygon wohl nur in der Art auf einander bezogen werden, dass der Kraft im Kräftepolygon ihr Angriffspunkt im Seilpolygon entspreche, denn es muss doch das dieselbe Kraft Treffende mit einander in Verbindung gebracht werden.

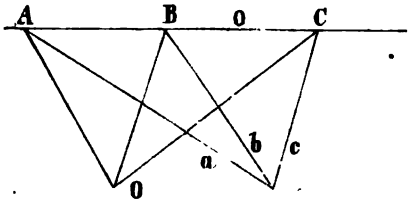
Entspricht jeder Kraft 2, 3, 4... des Kräftepolygons (Taf. 8_5) ihr Angriffspunkt 2, 3, 4... (Taf. 8_3) im Seilpolygon, so entspricht auch umgekehrt jeder Seilpolygonseite 2 3, 3 4 dem Schnittpunkt zweier Kräfte 2 3, 3 4 (Taf. 8_5) im Kräftepolygon u. s. f. Der Bedingung endlich, dass die Strahlen O_e) 2 3, 3 4 (Taf. 8_5) mit 2 3, 3 4 (Taf. 8_3) parallel laufen sollen, können wir nur dadurch genügen, dass wir den Pol O_e (Taf. 8_5) des Kräftepolygons auf die unendlich ferne Gerade des Seilpolygons (Taf. 8_3) so beziehen, dass beide perspectivisch liegen; jeder Strahl O_e) 2 3, 3 4 etc. des Poles O_e schneidet dann die unendlich ferne Gerade in dem ihm zugeordneten Punkt ∞) 2 3, 3 4 etc. des Seilpolygons, d. h. die Strahlen, welche von O_e aus die Punkte 2 3, 3 4 projiciren, laufen mit den diesen letztern zugeordneten Seilpolygonseiten parallel, was bewirkt werden sollte.

Sind die beiden Polygone also aufeinander bezogen, so schneiden sich die Richtungslinien 2 3 4 (Taf. 8_3) aller Kräfte im Seilpolygon, die mit den ihnen entsprechenden Kräftepolygonseiten 2 3 4 (Taf. 8_5) parallel laufen, in dem Punkt O_e, welcher als Punkt des Seilpolygons der unendlich fernen Geraden des Kräftepolygons zugeordnet ist (diesen Satz verdanke ich Herrn Privatdocent *Reye*).

Denn wenn eine gerade Linie / ein Strahlenbüschel mit dem ihr / der ihm zugeordneten Büschel / Geraden perspectivisch liegt, so liegt sie / er auch als Gebilde des

letztern Systems betrachtet, mit dem ihr / der ihm zugeordneten Büschel / Geraden des erstern perspectivisch.

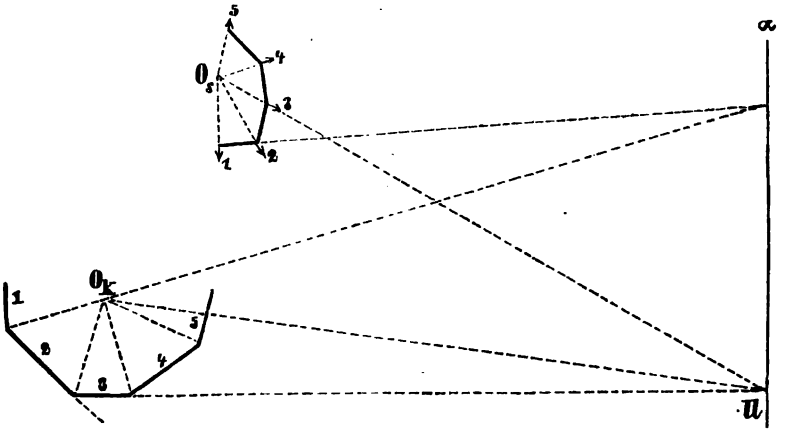
Fig. 130.



Gehen nämlich die drei Strahlen *a b c*, Fig. 130, durch die ihnen entsprechenden Punkte *A B C*, und entspricht der Linie 0 der Punkt *O*, so gehen auch die Strahlen *O*) *A B C* durch die ihnen entsprechenden Punkte 0) *abc*, weil diese Punkte in Folge der perspectivischen Lage identisch sind. Und umgekehrt.

Aus Gründen späterer Anwendungen wollen wir noch zeigen, wie sich dieser Satz bei dem Kräfte- und Seilpolygon, mit der daselbst üblichen Bezeichnung gestaltet. Der Uebersicht wegen nehmen wir, Fig. 131, die unendlich ferne Gerade $U\infty$ im Rahmen

Fig. 131.



des Blattes an, und beziehen, wie oben angegeben, den Strahlenbüschel O_k des Poles des Kräftepolygons so auf die unendlich ferne Gerade ∞U, dass jedem Strahl $O_k U$ des Poles der in ihm liegende Punkt U der unendlich fernen Geraden als Gebilde des Seilpolygons entspricht. Es entsprechen sich also in dem

	Kräfte-	Seilpolygon:
in Folge dieser Annahme	O_k	∞
und	$O_k U$	U

Es muss im Seilpolygon einen Punkt O_∞ geben, welcher der unendlich fernen Geraden als Gebilde des Kräftepolygons entspricht . . . . . ∞ O_∞.

Die Verbindung der beiden letzten Gebilde giebt . U $O_\infty U$

Wurde der Punkt U in der Richtungslinie irgend einer Kraft 3 z. B. angenommen, so muss auch der entsprechende Strahl O_3 in Folge der reciproken Beziehung durch den der Kraft 3 entsprechenden Angriffspunkt der Kraft 3 im Seilpolygon gehen. Mithin gehen die Richtungen aller Kräfte des Seilpolygons durch den Punkt O_3, welcher der unendlich fernen Geraden des Kräftepolygons entspricht.

Wenn also alle Kräfte eines Seilpolygons durch einen Punkt gehen, so können das Kräfte- und das Seilpolygon reciprok aufeinander bezogen werden.

Sind von den beiden Systemen die Pole O O_1, Fig. 132 und 133 gegeben, und wird in einem derselben eine beliebige Gerade a, Fig. 132 angenommen, so muss der entsprechende Punkt A_1, Fig. 133 im andern System auf dem zu a parallelen Strahl durch

Fig. 132.

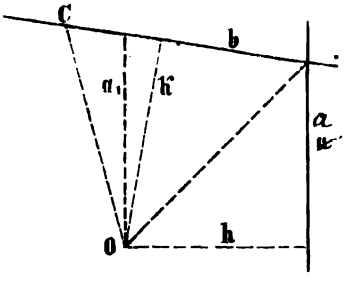
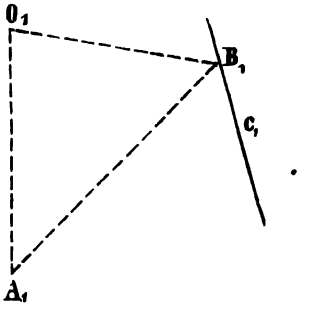


Fig. 133.



O_1 liegen, und kann nunmehr in diesem Strahl willkürlich angenommen werden; ist er aber angenommen, so sind die beiden Systeme unzweideutig auf einander bezogen. Denn der einer zweiten Geraden b, Fig. 132 entsprechende Punkt B_1, Fig. 133, liegt erstens in dem zu b parallelen Strahl O_1 B_1 und zweitens in

der geraden $A_1 B_1$, welche durch A_1 geht und mit dem Strahl parallel läuft, der den Punkt $(a\,b)$ von O aus projicirt, ist daher vollständig bestimmt. Ganz auf dieselbe Weise kann auch umgekehrt, wenn B_1 gegeben ist, die Linie b, endlich auch die jedem Punkt in Fig. 132 entsprechende Gerade in Fig. 133 mittelst des Punktes $a\,b$, und der ihm entsprechenden Geraden $A_1 B_1$ construirt werden. Insbesondere entspricht einem Punkt C auf b die durch den Punkt B_1 gehende und zum Strahl $O\,C$ parallel laufende Linie C_1.

Die 3 durch den Punkt $(a\,b)$ gehenden Linien laufen mit den Seiten des Dreiecks $O_1 A_1 B_1$ parallel, wird daher eine dieser Linien z. B. a, Fig. 132, mittelst deren wir uns b construirt denken, parallel mit sich selbst nach a_1 versetzt, so bildet sie mit den beiden übrigen Linien ein $O_1 A_1 B_1$, Fig. 133 ähnliches Dreieck $[O(ab)]\ b\ a_1$. Fällt man vom Pol O Perpendikel h und k auf die gegebenen Linien a und b, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks $[O(ab)]\ b\,a_1$; $F = a_1 h = b\,k$.

Anderseits hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecks auch: $\frac{a_1}{b} = \frac{O_1 A_1}{O_1 B_1}$, woraus wegen $a = a_1$ folgt:

$$a\,h = b\,k.$$

In zwei auf diese Weise reciprok auf einander bezogenen Systemen, sind die Produkte der Entfernungen entsprechender Elemente von den Polen constant.

Ist die Grösse dieser Constanten $= c^2$ gegeben, so kann man ebenfalls direct die Elemente des einen Systems construiren, welche gegebenen Elementen des andern entsprechen. Ist z. B. a in Fig. 134 gegeben, so fällen wir von O den Perpendikel h auf a, tragen vom Fusspunkt desselben aus c auf a auf, und erhalten vermittelst des rechtwinkeligen Dreiecks, Fig. 134 auf der Verlängerung von h die Entfernung des entsprechenden Elementes A. Die Strecke $O_1 A$ Fig. 135 bildet dann einen immer im gleichen Sinn aufzutragenden Winkel von 90° mit h. In Fig. 135 ist auch die Auflösung der reciproken Aufgabe angedeutet.

Punkten eines und desselben Strahles in einem System entsprechen Parallellinien im andern. Jeder Strahl des Poles schneidet zwei dieser Parallelen $a\,b$ Fig. 134 so, dass $O\,b\,a$ dem Gebilde $O_1 A\,B$ Fig. 135 ähnlich ist. Denn aus $O_1 A . h = O_1 B . k$ folgt:

$$\frac{O_1 A}{O_1 B} = \frac{k}{h} = \frac{O b}{O a}.$$

Fig. 134.

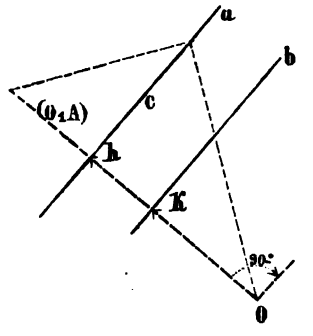
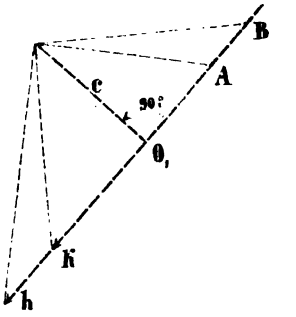


Fig. 135.



Auch dieser Satz leistet bei der Construction verwandter Polygonen gute Dienste.

Hieraus könnte auch geschlossen werden, dass alle solche Seil- oder Kräftepolygone, welche zu einem gegebenen Kräfte- oder Seilpolygone construirt werden können, ähnliche Figuren seien, wenn es nicht schon unmittelbar daraus hervorginge, dass alle diese Figuren die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein haben.

Fasst man das Kräfte- und das Seilpolygon einfach als reciprok verwandte Figuren auf, so können alle Elemente der Ebene als Elemente beider Polygone betrachtet werden. Stellen die Polygone aber ein wirkliches Kräftesystem dar, dann kann, wenn beide Pole in der Endlichkeit liegen, keine Seilpolygonseite durch den Pol gehen. Denn wenn eine Polygonseite durch den Pol ginge, so müssten auch alle andern durch ihn als durch den gemeinsamen Schnitt dieser Polygonseite mit allen andern Kräften gehen. Wenn daher die durch einen Punkt gehenden Kräfte überhaupt durch ein Polygon mit einander verbunden werden, so kann keine Seilpolygonseite durch den Pol gehen. Dagegen können die Kräfte im Kräftepolygon den Pol enthalten; denn ihre Richtungslinien sind an gar keine Bedingung geknüpft.

Dass die Mittelkraft einer beliebigen Zahl aufeinanderfolgender Kräfte durch den Schnitt ihrer äussern Polygonseiten

gehe, wurde in Nr. 44 S. 172 ganz allgemein bewiesen; es lässt sich aber auch speciell für den vorliegenden Fall direct aus der Reciprocität des Kräfte- und Seilpolygons ableiten. Die Mittelkraft 9 1 2 wird im Kräftepolygon (Taf. 8_5) durch die ebenso bezeichnete punktirte Linie dargestellt. Den Endpunkten derselben als Schnitten der Seiten 8 9 und 2 3, entsprechen im Seilpolygon (Taf. 8_3) der Schnitt 9 1 2 der Linien 8 9 und 2 3 als Verbindungslinien der Punkte 8 9 und 2 3; und dem unendlich fernen Punkt (9 1 2) Taf. 8_5 die Verbindungslinie von O_e mit (9 1 2) Taf. 8_3. Sie läuft demnach mit (9 1 2) (Taf. 8_5) parallel, ist also in Richtung und Lage die Mittelkraft von (9 1 2), die durch den Schnitt der ausserhalb 2 und 9 liegenden Polygonseiten 8 9 und 2 3 geht.

Wenn man die Gleichung einer Seilpolygonseite:

$$\left(\Sigma A \frac{a\omega'}{e}\right) x + \left(\Sigma A \frac{b\omega'}{e}\right) y + \Sigma A \frac{c\omega'}{e} = 0$$

und die Gleichung des entsprechenden Punktes des entsprechenden Kräftepolygons:

$$\left(\Sigma A \frac{b}{e}\right) \xi - \left(\Sigma A \frac{a}{e}\right) \eta + 1 = 0$$

anschreibt, so sieht man, dass beide in einander übergehen, wenn man $x = -\eta$, $y = \xi$ setzt; und wenn $\Sigma A \frac{c}{e}$ als Coefficient der constanten Ordinate 1 auch constant bleibt, weil in der Gleichung des Punktes des Kräftepolygons 1 auch constant ist. Soll aber dieses Glied constant bleiben, so darf nur die Gleichung der ersten Seilpolygonseite a_1 ein c enthalten; alle folgenden dürfen kein c enthalten, sie müssen von der Form $ax + by$ sein, d. h. sie müssen durch den Ursprung gehen.

Wenn also alle Kräfte eines Seilpolygons durch einen Punkt gehen, so können das Kräfte- und das Seilpolygon reciprok auf einander bezogen werden.

Der Linie: $ax + by + c = 0$

entspricht dann der Punkt:

$$-a\eta + b\xi + c = 0.$$

Der Perpendikel p vom Ursprung auf die Linie ist gleich $\frac{c\omega'}{e}$. Die Entfernung r des Punktes vom Ursprung ist $= \frac{e}{c}$. Also $pr = \omega'$ oder constant.

Das Product der Entfernung entsprechender Elemente vom Ursprung ist also constant.

Da x und η, y und ξ gleichzeitig $= 0$ und gleichzeitig $= \infty$ werden, so entspricht die unendlich entfernte Gerade des einen Polygons dem Ursprung des andern.

75. Das Kräfte- und das Seilpolygon in Verbindung mit Curven zweiter Ordnung.

Wenn die Richtungslinien aller Kräfte durch einen Punkt gehen, und die beiden Polygone reciprok liegen, so muss, sobald das eine einer Curve zweiter Ordnung um- oder einbeschrieben ist, das andere einer Curve zweiter Ordnung ein- oder umbeschrieben sein. Und dieses letztere Polygon ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Pol des erstern Polygons in, auf, oder ausserhalb der Curve liegt.

Da diesen Kräftepolen die unendlich fernen Geraden der beiden Polygone, ferner den von der einen Curve eingeschlossenen Punkten, die von der andern Curve ausgeschlossenen Linien entsprechen, so ist die unendlich ferne Gerade von der Curve ausgeschlossen, diese also eine Ellipse, wenn der Pol im Innern liegt; liegt der Pol auf der einen Curve, so ist die andere eine Parabel, liegt er endlich ausserhalb, so ist die andere eine Hyperbel.

Diese Verhältnisse sind auf Taf. 8 dargestellt, wo zwei gegenseitig in verschiedener Weise reciprok liegende Hyperbeln, Ellipsen und Parabeln gezeichnet wurden. Es wurden dabei die einbeschriebenen Polygone als Seil-, die umschriebenen als Kräftepolygone behandelt. Taf. 8_1 wurden drei Pole O_h O_p und O_e ausserhalb, auf und in der Hyperbel angenommen und die reciproken Hyperbel Taf. 8_2, Parabel Taf. 8_4 und Ellipse Taf. 8_3 gezeichnet, natürlich liegen die entsprechenden Pole O_A dieser letzten drei Figuren ausserhalb der Curven. Dann wurde noch zum Pol O_e Taf. 8_3 die Ellipse Taf. 8_5 und zum Pol O_p Taf. 8_4 die Parabel Taf. 8_6 gezeichnet, so dass auf diesem Blatt alle reciproken Beziehungsarten der drei Curven auf einander mit Ausnahme der Ellipse zur Parabel zu finden sind.

Bevor wir aber die Constructionen dieses Blattes weiter erläutern, wollen wir noch auf die folgenden reciproken Beziehungen der vorkommenden Punkte und Linien aufmerksam machen.

Es entspricht,

Jedem Element der einen Curve:	Das folgende Element der andern:
Jedem Strahl eines Poles.	Der in ihm liegende unendlich ferne Punkt.
Zwei Curvenpunkten desselben.	Die durch diesen Punkt gehenden also zum Strahl parallelen Tangenten.
Den Tangenten an diese.	Die Berührungspunkte dieser.
Ihrem Schnittpunkt.	Der sie verbindende Durchmesser.
Der Polaren des Polygonpoles.	Der Mittelpunkt der Curve.
Zwei conjugirten Punkten dieser Polaren.	Zwei conjugirte Durchmesser, welche mit den Strahlen parallel laufen, welche die Punkte der Polaren aus dem Pol der andern Curve projiciren.
Den Endpunkten des durch den Pol gehenden Durchmessers.	Die zu dem Durchmesser parallelen Tangenten.
Den Endpunkten der durch den Pol gehenden, und dem Durchmesser conjugirten Sehne.	Die zur Sehne parallelen Tangenten.
Den unendlich fernen Punkten irgend einer Sehne.	Die Strahlen, welche vom Pol aus die den Sehnen entsprechenden Punkte projiciren, und demnach mit diesen Sehnen parallel laufen.
Den in den Asymptoten liegenden unendlich fernen Punkten der Curven.	Die zu den Asymptoten parallelen Tangenten durch den Pol.
Den beiden durch die Asymptoten getrennten Armen der Curve.	Die durch die Berührungspunkte dieser Tangenten getrennten Theile der Curve.
Tief in die Curve schneidenden Sehnen.	Weit ausspringende Winkel.

Ohne einander gegenübergestellt werden zu können, folgen noch aus Obigem: dass die Richtungen der zwei durch O_1 und O gehenden Durchmesser in beiden Curven in Bezug auf ihren Mittel-

punkt conjugirt sind. Ferner: da conjugirte Strahlen des einen Poles mit conjugirten Durchmessern der andern Curve parallel laufen, Gebilde von conjugirten Elementen aber stets projectivisch sind, so sind auch die Strahlenbüschel projectivisch, welche vom einen Pol und vom Mittelpunkt der andern Curve aus, die Punkte der einen Curve und die Berührungspunkte der entsprechenden Tangenten der andern Curve projiciren. Diese beiden Strahlenbüschel werden von je zwei Linien, deren Richtungen conjugirt sind, in ähnlichen Gebilden geschnitten, denn in beiden Gebilden entsprechen sich dann die unendlich fernen Punkte.

Als Anwendung der obigen Sätze haben wir Taf. 8 fünf Paare reciproker Curven gezeichnet. Von Taf. 8_1 ausgehend haben wir, um die dem ausserhalb der Curve liegenden Pol O_h entsprechende Hyperbel 8_2 zu erhalten, durch O_h Taf. 8_1 den Durchmesser u, die ihm conjugirte Sehne v, den ihm conjugirten Durchmesser n und die Polare m vom O_h gezeichnet. Als Kräftepolygon wurden dann ausgezogen die Tangenten an die 6 Curvenpunkte in den drei Linien $m\,n\,v$, die beiden Asymptoten und die beliebige Tangente 4, was im Ganzen 9 Seiten giebt, von denen 8 paarweise durch die Schnittpunkte u mit den Linien $v\,n\,m\,\infty$ gehen.

Nehmen wir Taf. 8_2 den Pol O_h an, so entsprechen den 4 Parallellinien $v\,n\,m\,\infty$ die 4 Punkte $\infty\,N\,M\,O_h$, welche auf den Parallelen durch O_h so liegen, dass das Gebilde $N\,M\,O_h$ dem Gebilde $u)m\,n\,v$ ähnlich ist (Nr. 74 S. 284); auf der Tafel wurden die Distanzen $N\,M\,O_h$ gerade halb so gross als wie die von $u)m\,n\,v$ angenommen. Taf. 8_1 schneiden sich die 4 Linien $5\,9\,m\,u$ in einem Punkt, also liegen Taf. 8_2 die 4 Punkte $5\,9\,M\,U$ auf einer geraden Linie, auf der Parallelen zu u durch M. Die Lage der Punkte 5 und 9 wird vollends dadurch bestimmt, dass die Strahlen O_h 5 und 9 Taf. 8_2 mit den Tangenten 5 und 9 Taf. 8_1 parallel laufen müssen. Genau reciprok folgt, dass die beiden Tangenten $N)3\,5$ Taf. 8_2 mit den Strahlen $O_h)3\,5$ Taf. 8_1 parallel laufen müssen, wodurch die Punkte 3 und 8 auf $O_h\,U$ Taf. 8_2 bestimmt sind. Endlich laufen die Tangenten $O_h)1\,6$ Taf. 8_2 mit den Asymptoten der Taf. 8_1 und die Asymptoten durch M Taf. 8_2 mit den Tangenten $O_h)2\,7$ parallel. Hat man in beiden Figuren nichts weiter als die bis jetzt erwähnten Elemente gezeichnet, und wirft man einen Blick auf die Zeichnungen, so sieht man, dass jetzt von beiden Curven gleichartig gelegene Elemente vorhanden sind, nämlich auf drei parallelen

Sehnen; drei Paar Punkte mit ihren Tangenten und die Asymptoten. Dieses Verhältniss lässt sich übersichtlich durch das folgende Schema darstellen:

Es entsprechen sich:

Taf. 8_1					Taf. 8_2				
	Den Tangenten.		Den parallelen Sehnen.			Die Punkte.		Die Durchmesserp.	
Asymptoten	1	6	n	u	Auf den Poltangenten	1	6	N	U.
Durch den Pol	2	7	v		„ „ Asymptoten	2	7	V	
An die Scheitel	3	8	∞		„ der Polsehne	3	8	O_h	
Der Polsehne	5	9	m		die Scheitelpunkte	5	9	M	
Je vier Linien auf einer Zeile schneiden sich in einem Punkt.					Je vier Punkte auf einer Zeile liegen in einer geraden Linie.				
Dem Winkel $1n6$, dessen Strahlen die Curve schneiden.					Die Strecke $1N6$ von der Tangenten an die Curve gezogen werden können.				

Aus der letzten Reciprocität geht hervor, dass die in der Curve liegenden unendlich fernen Strecken nicht zusammenfallen, sondern von den beiden conjugirten unendlich fernen Punkten U und V liegt der eine in der einen und der andere in der andern Curve.

Um den beliebigen Punkt 4 mit seiner Tangente zu erhalten, wurde nach Nr. 74 S. 284 der Strahl $O_h 4$, Taf. 8_2, parallel zur Tangente 4, Taf. 8_1, und auf diesem Strahl der Punkt 4 durch die Linie $M4$ ausgeschnitten, welche mit dem Strahl, Taf. 8_2, parallel läuft, der aus O_h den Schnittpunkt der Tangente 4 mit m projicirt. Die Tangente an 4, Taf. 8_2, läuft parallel mit dem Strahl $O_h 4$, Taf. 8_1.

Nachdem die Polygone gezeichnet waren, wurde Taf. 8_2 die Richtungslinie der Kräfte, die alle durch O_h gehen, eingezeichnet, und noch angedeutet, in welchem Sinn die Hyperbel in Anspruch genommen ist. Man sieht, in einem Arm ist sie gepresst, im andern gespannt.

Wird der Pol O_p, Taf. 8_1, auf der Hyperbel angenommen, so erhält man die Parabel Taf. 8_4. Der Pol O_p, Taf. 8_1, wurde auf n gewählt, um immer die gleichen conjugirten Richtungen zu erhalten. Taf. 8_4 wurde durch O_h eine Parallele zu den Tangenten 8 nach dem unendlich fernen und nach dem Punkt 3 gezogen, und

der der Tangente 3 entsprechende Punkt 3 willkürlich darauf angenommen. Die Parallele zu n durch 3 ist die Scheiteltangente der Parabel; die Parallelen $O_h)1\,6$ zu den Asymptoten sind Tangenten, deren Berührungspunkte dadurch bestimmt sind, dass ihre Abscissen gleich der halben Subtangente sind. Die den Tangenten 2 4 5 7 entsprechenden Punkte wurden direct durch den Schnitt ihrer Projectionsstrahlen aus O_h und 3 construirt, von denen der erstere mit der entsprechenden Tangente und der zweite mit dem Strahl parallel läuft, welcher mit O_h, Taf. 8_1, den Schnitt der Tangenten mit der Tangente 3 projicirt. Eine Tangente, Taf. 8_4, würde parallel laufen mit einem Strahl, welcher Taf. 8_1 aus O_h den Berührungspunkt projicirt. Die Taf. 8_4 eingezeichneten Pfeile beziehen sich auf das Kräftepolygon Taf. 8_6, nicht 8_1.

Um eine Ellipse zu erhalten, wurde Taf. 8_1 der Pol O_e auf n im Innern der Hyperbel angenommen, dann die conjugirte Sehne $O_e\,9$ und ihr Pol $(n\ m_1)$ construirt. Taf. 8_3 wurde dann $O_h\,3\,8$ ähnlich $O_e\,8\,3$ gemacht; im vorliegenden Fall ist das Verhältniss dieser Gebilde genau wie 2 zu 1. Auf den punktirten Tangenten 3 und 8, Taf. 8_3, wurden die Schnittpunkte mit den Tangenten 9 und 9′ durch Strahlen von O_h projicirt, welche mit den Sehnen 9 8, 9 3 und 9′ 8, 9′ 3, Taf. 8_1, parallel laufen. Die Berührungspunkte liegen in der Mitte der Tangenten 9 und 9′, Taf. 8_3. Die Parallelen $O_h)1\,6$ zu den Asymptoten sind Tangenten, deren Berührungspunkte nach den bekannten Regeln aus 3 und 8 projicirt werden können.

Taf. 8_3 wurde ferner der Pol O_e im Innern angenommen und damit die Ellipse Taf. 8_5 construirt. $8\,O_e\,3$ wurde gleich $3\,O_e\,8$ gemacht; dann laufen die Strahlen, welche aus O_e, Taf. 8_5, die Schnitte der aufeinander folgenden Tangenten 1 3 6 8 1 projiciren mit den Sehnen, Taf. 8_3, der gleichnamigen Punkte parallel. Der umgekehrte Satz giebt die Länge der Sehne $O_e 9$, Taf. 8_5, die Tangente 9 und die Polare m_1 von O_e. Die zwischen liegenden Tangenten 2 4 5 7 wurden direct construirt.

Endlich wurde der Pol O_p, Taf. 8_4, auch noch auf der Parabel in 3 angenommen und damit die Parabel Taf. 8_6 construirt. Nach den bisherigen Erörterungen bedarf diese Construction keiner weiteren Erklärungen mehr.

Dagegen ist in projectivischer Beziehung bemerkenswerth, dass wenn der eine Pol auf der Curve liegt, er mit allen Gebilden

der Curve perspectivisch liegt, weil er ein Punkt der Curve ist. Einer beliebigen Zahl Punkte der Curve sind daher projectivisch:

die Tangenten an diesen Punkten,
der Strahlenbüschel, welcher sie vom Pol aus projicirt,
die Schnitte ihrer Tangenten mit irgend einer Tangente,
der Strahlenbüschel, welcher diese Schnitte von irgend einem Punkt, also auch vom Pol aus projicirt,
die entsprechenden Punkte und Tangenten der Parabel und die mit ihnen perspectivisch liegenden Gebilde.

Insbesondere erzeugen noch ähnliche Gebilde:

der Schnitt aller Tangenten mit der zur Poltangente parallelen Tangente,
der Schnitt des Strahlenbüschels, welcher vom Pol aus die Berührungspunkte projicirt, mit derselben Tangente,
die Schnitte der entsprechenden Paralleltangenten mit irgend einer dieser Tangenten,
der Parallelstrahlenbüschel, welcher die entsprechenden Punkte der Parabel projicirt,
der Strahlenbüschel, welcher von irgend einem Punkt der Parabel aus dieselben Punkte auf eine zur Poltangente parallelen Linie projicirt.

Als besondere Lagen des Poles wollen wir noch untersuchen, wie sich die Curven verhalten, wenn der Pol in ihrem Mittelpunkt, auf dem Umfang oder im Unendlichen liegt.

76. Der Mittelpunkt der Curve als Pol der Polygone.

Liegt der Pol der einen Curve im Mittelpunkt, so liegt er auch in jedem Durchmesser, mithin auch der Pol der andern Curve in dem jeder Richtung conjugirten Durchmesser, d. h. ebenfalls im Mittelpunkt der Curve.

Da jetzt die Polare des Poles mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, und zwei conjugirte Punkte derselben zwei conjugirten Durchmessern der andern Curve entsprechen, so sind je zwei Durchmesser der einen Curve, welche mit conjugirten Durchmessern der andern parallel laufen, selbst conjugirt. Die beiden Curven sind also immer gleichzeitig Ellipsen oder Hyper-

beln; erstere sind sich ähnlich, letztere liegen in den Supplementwinkeln paralleler Asymptoten.

Wird berücksichtigt, dass alle Kräfte- und Seilpolygone, welche zu einem Seil- oder Kräftepolygon construirt werden können, ähnlich sind, so folgt, dass bei gehöriger Aenderung des Maassstabes der Linien oder Kräfte dieselbe Ellipse, welche dem einen Polygon umschrieben ist, auch dem andern einbeschrieben sein kann.

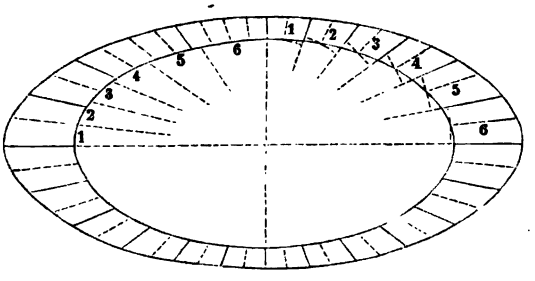
Von der Hyperbel gilt dasselbe, sobald man sich den offenen Asymptotenwinkel durch die Supplementhyperbel ausgefüllt denkt.

In diesen Fällen ist die Spannung in jeder Seilpolygonseite (wir denken uns das Seilpolygon um-, das Kräftepolygon einbeschrieben) gleich dem halben mit ihr parallel laufenden Durchmesser.

Jede Kraft wird dann durch die Sehne der Ellipse dargestellt, welche die Endpunkte der Durchmesser verbindet, die mit den Seilpolygonseiten parallel laufen, durch deren Schnittpunkt die Kraft geht.

Fig. 136 soll diese Verhältnisse anschaulich machen; sie

Fig. 136.



stellt das Gleichgewicht von central wirkenden Pressungen oder Spannungen dar, welche über eine elliptische Hülle vertheilt sind.

Wir theilten den Umfang der Ellipse, hier den der innern Curve, in Bogenstücke, welche senkrecht auf die Richtung der Kräfte, also in der Richtung der kleinen punktirten Bogen gemessen, einander gleich sind. Denken wir uns dann die Intensität der auf die Ellipse wirkenden Kräfte durch den Inhalt der Lamellen dargestellt, welche über jedem Bogentheil stehen, so muss die mittlere Höhe, 1, 2, 3... dieser Lamellen den Sehnen 1, 2, 3... (resp.

Bogen) der Ellipse proportional (hier gleich) sein, welche die Endpunkte der Durchmesser verbinden, die den Durchmessern, zwischen denen die Lamelle liegt, conjugirt sind. Streng genommen sollten diese Höhen halb unter, halb über den, die mittlere Breite darstellenden Bogen geschlagen werden; es geschah nicht, weil die Figur zu ungefällig geworden wäre.

Die Spannung der elliptischen Hülle am Ende irgend eines Durchmessers endlich, ist gleich der Länge des halben conjugirten Durchmessers.

Wird die Ellipse ein Kreis, so werden die gleich breiten Lamellen conjugirter Sehnen oder Bogenstücke selbst gleich lang und zwar gleich der Breite der Lamelle, und die Spannungen in allen Punkten der Kreishülle werden gleich dem constanten Radius. In diesem Fall, der bei dem Druck von Flüssigkeiten auf die Wände kreisrunder Gefässe häufig vorkommt, verhält sich also der Druck auf irgend einen Theil des Bogenumfanges zur Spannung im Bogen, wie die Länge dieses Bogentheiles zum Radius.

77. Die Formeln für reciproke Curven zweiter Ordnung.

Wir wollen hier die Formeln für Curven zweiter Ordnung in reciproken Systemen entwickeln.

Liegen die Punkte xy auf der Curve zweiter Ordnung:

$$S = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

so umhüllen die Linien ξ, η die Curve zweiter Klasse:

$$\Sigma = a_{11}\eta^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\xi^2 - 2a_{13}\eta + 2a_{23}\xi + a_{33} = 0.$$

Man braucht nur die Discriminante Δ der beiden Gleichungen anzuschreiben, um sich zu überzeugen, dass sie und der Coefficient A_{33} von a_{33} in ihr gleich sind und gleiche Zeichen haben, und nur A_{12} A_{13} mit a_{12} a_{13} ihre Zeichen wechseln.

Nun ist aber S eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse, je nachdem A_{33} : —, 0 oder + ist. Diese Zeichen bedeuten aber, dass der Ursprung von Σ von der Curve ausgeschlossen sei, auf der Curve liege oder eingeschlossen sei.

Das Umgekehrte gilt ebenso, denn der Ursprung von S ist von der Curve ausgeschlossen, liegt auf ihr oder ist eingeschlossen, je nachdem $a_{33}\Delta$: —, 0 oder + ist. Bei Σ aber bedeutet es, dass die ξ, η, 1 eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse umhüllen.

Alle weitern auf Nr. 75, Seite 288 zusammengestellten Sätze ergeben sich einfach, indem man die Gleichungen der treffenden Gebilde links in S oder Σ ausdrückt und dann durch Vertauschung von x und y mit $-\eta$ und ξ die Gleichungen

der rechts stehenden Gebilde in Σ oder S erhält. Auf diese Weise lassen sich beinahe alle Gebilde der analytischen Geometrie in das Reciproke verwandeln, und die Zahl der auf Seite 288 aufgezählten Sätze beliebig vermehren.

Fällt der Pol des einen Kegelschnitts mit dem Mittelpunkt zusammen, so sind in demselben die Coefficienten a_{13}, a_{23} der ungeraden Potenzen von x und $y = 0$; die ungeraden Potenzen fallen dann auch im andern Kegelschnitt aus. Fällt also der Pol der einen Curve mit ihrem Mittelpunkt zusammen, so ist auch der Mittelpunkt der andern Curve der Pol des Polygons (Nr. 76 S. 292).

Die Gleichung des Strahlenbüschels zweiter Ordnung, welcher S umhüllt, ist dann:

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \xi \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \eta \\ 0 & 0 & a_{33} & 1 \\ \xi & \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \xi \\ a_{21} & a_{22} & \eta \\ \xi & \eta & -\frac{1}{a_{33}} \end{vmatrix} =$$

$$a_{33}\left[-a_{11}\eta^2 + 2a_{12}\xi\eta - a_{22}\xi^2 - \frac{A_{33}}{a_{33}}\right] = 0.$$

Die Coefficienten dieser letztern Gleichung stimmen bis auf das constante Glied, mit denen von Σ überein, mithin sind in diesem Fall die beiden Kegelschnitte ähnlich und ähnlich gelegen (S. 293). Setzt man jetzt noch $a_{11} = a_{22}$ und bei rechtwinkeligen Coordinaten $a_{12} = 0$, so erhält man die Grösse der Spannungen in kreisförmigen Röhren.

Werden in den Polargleichungen der Kegelschnitte x_1 und y_1 einerseits und ξ_1, η_1 andererseits gleich ∞ gesetzt, so reduciren sie sich auf:

$$P = S_x x_1 + S_y y_1 \text{ und } \Pi = \Sigma_\xi \xi_1 - \Sigma_\eta \eta_1,$$

worin $S_x = \frac{dS}{2\,dx}$; $S_y = \frac{dS}{2\,dy}$; $\Sigma_\xi = \frac{d\Sigma}{2\,d\xi}$ und $\Sigma_\eta = \frac{d\Sigma}{2\,d\eta}$ sind. P und Π gehen in einander über, wenn x und $x_1 = -y$ und y_1, und y und $y_1 = \xi$ und ξ_1 gesetzt werden; die beiden Polargebilde entsprechen sich demnach. Der Gleichung P genügen die Coordinaten des Mittelpunktes $x = \frac{A_{13}}{A_{33}}$ und $y = \frac{A_{23}}{A_{33}}$, wo A_{ik} die Unterdeterminanten der Discriminaten bezeichnen, indem sie die Werthe S_x und S_y gleichzeitig gleich 0 machen. P ist demnach die Gleichung eines Durchmessers. Ebenso genügen Π die Coordinaten $-\eta = \frac{A_{13}}{A_{33}}$ und $\xi = \frac{A_{23}}{A_{33}}$ der Polaren des Ursprungs, welche gleichzeitig Σ_ξ und $\Sigma_\eta = 0$ machen. Durchmessern des einen Polygons entsprechen Punkte der Polaren des Coordinatenanfangs im andern Polygon. Demnach auch conjugirten Durchmessern des einen Polygons parallel laufende conjugirte Strahlen des andern Polygons.

Um weiter zu beweisen, dass:

diese beiden involutorischen Strahlenbüschel von Linien, die mit conjugirten Elementen pa-

rallel laufen, in ähnlichen Gebilden geschnitten werden (S. 289),

bringen wir P und Π in die Form:

$$P = a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)x_1 + a_{12}\left[\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)y_1 + \left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)x_1\right] + \\ + a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)y_1 = 0,$$

$$\Pi = a_{11}\left(\eta - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)\eta_1 - a_{12}\left[\left(\eta + \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)\xi_1 + \left(\xi - \frac{A_{23}}{A_{23}}\right)\eta_1\right] + \\ + a_{22}\left(\xi - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)\xi_1 = 0.$$

Wir schneiden nun beide Büschel durch Linien von conjugirter Richtung, indem wir annehmen, die Richtungen der Coordinatenaxen seien conjugirt, und $a_{12} = 0$ setzen. Das giebt dann:

$$\lambda = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)} = -\frac{\xi_1}{\eta_1} = -\frac{a_{11}\left(\eta + \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(\xi - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)}.$$

Für ein bestimmtes Verhältniss λ giebt nun:

$\frac{y_1}{x_1} = \lambda$ das Coordinatenverhältniss eines unendlich fernen Punktes des ersten Polygons.

$-\frac{\xi_1}{\eta_1} = \lambda$ das eines durch diesen unendlich fernen Punkt und den Ursprung gehenden Strahles des zweiten Polygons.

$\frac{x - \frac{A_{23}}{A_{33}}}{y - \frac{A_{23}}{A_{33}}} = -\frac{\lambda a_{22}}{a_{11}}$ das Coordinatenverhältniss des dem unendlich fernen Punkt $\frac{y_1}{x_1}$ conjugirten Durchmessers des ersten Polygons. x und y können hierin beliebige Punkte des Durchmessers, also auch die in ihm liegenden Curvenpunkte sein.

$-\frac{\eta + \frac{A_{23}}{A_{33}}}{\xi - \frac{A_{23}}{A_{33}}} = -\frac{\lambda a_{22}}{a_{11}}$ die Gleichung eines Punktes der Polaren des Ursprungs des zweiten Polygons, denn die Coordinaten $\eta = -\frac{A_{13}}{A_{33}}$ und $\xi = \frac{A_{23}}{A_{33}}$ der Polaren genügen ihr. Der Strahl, der diesen Punkt vom Ursprung aus pro-

jicirt, läuft parallel mit dem entsprechenden Durchmesser, denn für $x, y, \eta, \xi = \infty$ ist das Coordinatenverhältniss beider $= -\frac{\lambda a_{22}}{a_{11}}$.

Schneidet man jetzt die beiden ersten Büschel durch eine Parallele zur Ordinatenaxe, indem man $-\frac{1}{\xi_1} = x_1 = H$ einer constanten Poldistanz setzt, so erhält man die jedem λ entsprechenden Ordinaten des Schnittpunktes:

$$\frac{1}{\eta_1} = y_1 = H\lambda.$$

Schneidet man die beiden letzten Büschel durch eine Parallele zur Abscissenaxe, in der Entfernung c vom Mittelpunkt, indem man $y - \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{1}{\eta_\infty} = c$ setzt, so erhält man:

$$\frac{1}{\xi_\infty} = x - \frac{A_{13}}{A_{33}} = -\frac{a_{22}}{a_{11}} c\lambda.$$

Diese vier Büschel, namentlich aber $\frac{1}{\eta_1}$ und $x - \frac{A_{13}}{A_{33}}$ schneiden also auf den Parallelen zu den Coordinatenaxen ähnliche Punktreihen aus, woraus der oben ausgesprochene Satz folgt.

Die eben erörterten Beziehungen bestehen fort, auch wenn der Pol des einen Polygons, der des Kräftepolygons z. B. in das Unendliche rückt, d. h. wenn alle an dem Kegelschnitte wirkenden Kräfte parallel laufen. Man hat sich dann das ganze Polygon im Unendlichen zu denken, und der Schnitt der Parallelen zur y-Axe mit dem dritten Büschel der ξ_1, η_1 kann als ein verjüngter Theil des unendlich grossen Polygons, als das wirkliche Kräftepolygon betrachtet werden.

Die Beziehung zwischen diesem geradlinigen Kräftepolygon und den entsprechenden Curvenpunkten ist demnach gegeben durch die Gleichung:

$$H\lambda = y_1 = \frac{1}{\eta_1} = -\frac{a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)} H.$$

Jetzt bezeichnet in dieser Gleichung: H die in der Richtung der x-Axe gemessene Spannung im Seilpolygon, den Horizontalschub oder die Horizontalspannung bei Gewölben und Ketten; also den horizontalen Abstand des Pols des Kräftepolygons, von der Linie, auf der die Kräfte selbst aufgetragen werden. $y_1 = \frac{1}{\eta_1}$ bezeichnet die vom Endpunkt von H ab gemessene Ordinate des Punktes des Kräftepolygons, welche den Curvenpunkten x und y des Seilpolygons entspricht. Die Gleichung selbst übersetzt sich wie folgt in Worte: Das Kräftepolygon ist jedem Schnitt des Strahlenbüschels ähnlich, welcher aus dem Mittelpunkt der Curve ihre einzelnen Punkte auf eine Linie projicirt, deren Richtung der Richtung der Kräfte conjugirt ist. Die auf die Strecke dx treffende Belastung wird durch das entsprechende dy_1 gegeben. Die Belastung pro Längeneinheit ist demnach $= \frac{dy_1}{dx}$ der Belastungshöhe, wir bezeichnen sie mit p und erhalten:

$$p = \frac{dy_1}{dx} = -\frac{a_{11}\left[y - \frac{A_{23}}{A_{33}} + \left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)\frac{S_x}{S_y}\right]}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^2},$$

nun ist aber:

$$\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)S_x + \left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)S_y + \frac{D}{A_{33}} = 0,$$

wo D die Discriminante des Kegelschnitts bezeichnet, und wegen $a_{12} = 0$:

$$S_y = a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right),$$

demnach

$$p = \frac{a_{11} D H}{a^2_{22} A_{33}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^3}.$$

Trägt man diese Höhen über den Gewölben oder unter den Ketten auf, wie es in der nächsten Nummer geschehen wird, so erhält man die dort construirten Belastungscurven. Bezeichnet man die Belastungshöhe im Scheitel des mit den Kräften parallel laufenden Durchmessers mit h_0 und die halbe Länge dieses Durchmessers selbst mit b, so erhält man, weil für den Scheitel $y - \frac{A_{23}}{A_{33}}$ gleich b ist, die Gleichung:

$$h_0 = \frac{a_{11} D H}{a^2_{22} A_{33} b^3},$$

zwischen p_0 H b, und dann:

$$p = \left(\frac{b}{y - \frac{A_{23}}{A_{33}}}\right)^3 p_0.$$

Bei Hyperbeln wächst der Nenner des Bruches von b bis in's Unendliche, bei Ellipsen nimmt er von b ab bis 0, umgekehrt also verhalten sich die Werthe von h.

Bei der Parabel ist der Factor von $h_0 = 1$ die Belastung der Parabel also constant.

Werden die Belastungshöhen in der Richtung vom Mittelpunkt weg, nach aussen bei Ellipsen, nach innen bei Hyperbeln, aufgetragen, so dass also die Gleichung der Belastungscurve:

$$y' = y + p$$

wird, so kann dieselbe Inflectionspunkte haben; von besonderem Interesse ist es nun zu wissen, wann diese Inflectionspunkte zusammenfallen, es ist dann in diesem vierfachen Punkt die Belastungscurve auf eine längere Strecke geradlinig, siehe die zwölfte Curve Taf. 9_1. Wir bestimmen also den zweiten Differentialquotienten von y':

$$\frac{dy'}{dx} = \left[1 - \frac{3 b^3 p_0}{\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^4}\right]\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = \left[1 - \frac{3b^3 p_0}{\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^4}\right]\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{12b^3 p_0}{\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

In den Inflectionspunkten muss $\frac{d^2y'}{dx^2} = 0$ sein, im Scheitel aber ist $\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ von 0 verschieden, und $y - \frac{A_{23}}{A_{33}} = b$, demnach muss, wenn dort $\frac{d^2y'}{dx^2}$ gleich 0 werden soll,

$$1 - 3\frac{p_0}{b} = 0,$$

oder

$$p_0 = \frac{1}{3}b$$

sein.

Die Ellipse hat bei kleineren p_0 reelle, bei grösseren keine reellen Inflectionspunkte, umgekehrt die Hyperbel.

Will man bei einem von $\frac{1}{3}b$ verschiedenen p_0 die Inflectionspunkte bestimmen, so hat man in $\frac{d^2y'}{dx^2}$ zu substituiren:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{S_x}{S_y} = -\frac{a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{D}{S_y^3} = \frac{D}{a^3_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^3},$$

und aus:

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = 0 = \left[1 - \frac{3b^3 h}{\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^4}\right]\frac{D}{a^3_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^3} + \frac{12a^2_{11}b^3 p_0\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)^2}{a^2_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^5},$$

die betreffenden Curvenpunkte zu bestimmen.

Bei der Parabel kann von diesen Inflectionspunkten der Belastungscurven keine Rede mehr sein, überhaupt scheint keine der bisherigen Formeln auf die Parabel zu passen; doch kann man durch passende Transformation auch für die Parabel eine Beziehung zwischen der Belastungshöhe, dem Parameter und den Kräften ableiten.

Es sei: $x^2 = 2ay$ die Gleichung der Parabel, dann ist $a_{11} = 1$, $a_{23} = a$ und alle übrigen Coefficienten $a_{ik} = 0$. Ferner $D = -a^2$, $A_{13} = -a$, die Substitution dieser Werthe in die erste Gleichung von p giebt:

$$p = \frac{a_{11} DH}{a^2_{22} A_{33}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^3} = \left(a_{11} - \frac{a^2_{12}}{a_{22}}\right)^2 \cdot \frac{H}{a} = \frac{H}{a}.$$

Die constante Spannung in der Richtung des den Kräften conjugirten Durchmessers ist also gleich dem Parameter, multiplicirt mit der constanten Belastungs-

höhe. Auf ganz anderem Wege werden wir später noch zu demselben Satz gelangen.

Des Zusammenhanges wegen haben wir hier alles die Curven zweiter Ordnung Betreffende vereinigt, und müssen daher die geometrischen Beweise der letzten Sätze noch nachholen.

78. Ein unendlich ferner Punkt als Pol des einen Polygons.

Sobald der Pol des Seilpolygons z. B. im Unendlichen liegt, so wird das Kräftepolygon zu einer geraden Linie, wie es sich von selbst versteht, weil dann alle Kräfte gleiche Richtung haben.

Diese gerade Linie hat man als Inbegriff zweier zusammenfallenden Linien zu betrachten; denn zieht man durch den Pol des Kräftepolygons eine gerade Linie nach einem Punkt A desselben und zwei parallele Tangenten an die Curve des Seilpolygons, die wir mit a und b bezeichnen wollen, so muss nach Nr. 74 S. 284 $ab\infty$, BAO ähnlich sein, wenn wir mit O den Pol des Kräftepolygons bezeichnen; sind nun $a\infty$ und $b\infty$ unendliche Strecken, AO dagegen endlich, so kann die Aehnlichkeit nur bestehen, wenn A und B zusammenfallen; jeder Punkt der geraden Linie, welche das Kräftepolygon darstellt, ist daher ein Doppelpunkt und dieses reducirt sich auf eine und nicht etwa auf zwei gerade Linien, die man sich symmetrisch zu O gelegen denken möchte.

Ist nun die Curve des einen Polygons eine Ellipse oder eine Parabel, so ist die das andere Polygon darstellende Gerade unbegrenzt; denn zieht man durch den Pol O Parallelen zu allen möglichen Tangenten der Ellipse, so erfüllen sie den ganzen Strahlenbüschel O. Ist dagegen die Curve des einen Polygons eine Hyperbel, so reducirt sich das andere auf eine Strecke, deren Schein vom Pol aus dem Supplement des Asymptotenwinkels gleich ist, weil die Strecke der unendlich fernen Geraden, welche in der Hyperbel (zwischen den Asymptoten) liegt, von keiner Tangente geschnitten werden kann.

Die Strecke selbst ist eine unendliche zusammenhängende, wenn der unendlich ferne Pol in der Hyperbel liegt, weil dann die unendlich ferne Strecke im Supplement des Asymptotenwinkels nicht durch ihn getrennt wird; dagegen eine durch das Unendliche laufende, aus zwei getrennten Armen bestehende, wenn der unendlich ferne Pol ausserhalb der Hyperbel liegt, weil dieser

dann die unendlich ferne Gerade im Supplement des Asymptotenwinkels in zwei Strecken trennt.

Liegt endlich der unendlich ferne Pol auf einer Hyperbel, so reducirt sich die Gerade des andern Polygons auf eine Linie, die parallel zur Asymptote läuft; die im Supplement des Asymptotenwinkels liegende Strecke des Kräftepolygons wird daher vom unendlich fernen, und von einem endlichen Punkt begrenzt. Ausserdem finden noch alle Nr. 75 S. 288 aufgezählten projectivischen Beziehungen statt.

Zur Construction der einzelnen Punkte des Kräftepolygons selbst ist es wohl am einfachsten, das Nr. 75 S. 289 erwähnte Verhältniss zu benutzen, wonach das Kräftepolygon jedem Schnitt des Strahlenbüschels projectivisch ist, welcher aus dem Mittelpunkt der Curve ihre einzelnen Punkte auf eine Linie projicirt, deren Richtung der Richtung der Kräfte conjugirt ist.

Um das eben Gesagte an zwei Beispielen zu erläutern, haben wir (Fig. 137 und Fig. 138) ein solches Kräftepolygon für eine

Fig. 137.

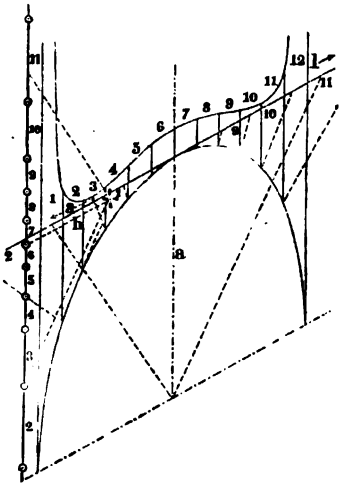
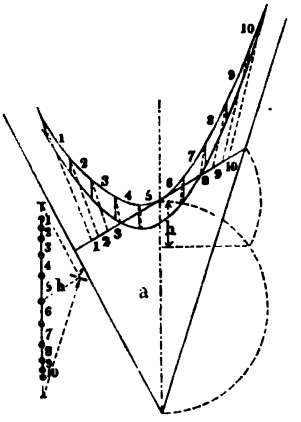


Fig. 138.



Ellipse und eine Hyperbel, unter denen man sich ein elliptisches Gewölbe oder eine hyperbolische Kette vorstellen kann, construirt.

Wir nehmen an, die verticalen Kräfte bestehen aus über den Bogen vertheilten Belastungen und zerlegen diese in gleich breite Lamellen, dann muss die Höhe derselben den einzelnen Kräften des Kräftepolygons proportional sein, wenn ihr Flächeninhalt die

Belastung darstellen soll. Diesen Kräften aber sind alle Segmente proportional, welche vom Strahlenbüschel abgeschnitten werden, der die einzelnen Curvenpunkte auf Linien projicirt, deren Richtung der der Kräfte conjugirt ist. Wir haben also die (punktirten) Strahlen bis zur Scheiteltangente gezogen, und auf dieser die Lamellenhöhe abgegriffen; die den einzelnen Lamellen zugeordneten Segmente sind da gleichartig numerirt, wo sie nicht gerade mit den entsprechenden Lamellen zusammenfallen.

Aus den Figuren geht hervor, dass die Belastungen der elliptischen Curve in's Unendliche zunehmen müssen, weil ihr Mittelpunkt in der Curve liegt, demnach Strahlen in allen Richtungen, also auch in der Richtung des Trägers der Kräfte vorkommen. Die Kräftesegmente der hyperbolischen Kette nehmen gegen die Asymptoten in's Unendliche ab, weil der Mittelpunkt ausserhalb der Curve liegt und die unendlich vielen Lamellenbasen zuletzt die Richtung der Asymptote annehmen. Alle ihnen entsprechenden Segmente aber summiren sich zur endlichen zwischen den Asymptoten liegenden Strecke. Etwas Weniges vorgreifend machen wir hier darauf aufmerksam, dass bei parabolischen Curven diese Segmente weder ab- noch zunehmen und die Belastung daher eine gleichförmige wird.

Um die Pressungen und Spannungen im Bogen und in der Kette unmittelbar in Grösse und Richtung dem Kräftepolygon entnehmen zu können, hat man die Träger der Kräftesegmente nur in die Richtung der Kräfte zu bringen, um ein richtig orientirtes Kräftepolygon zu erhalten. Zur Bestimmung der Lage des Poles muss die Richtung von wenigstens 2 Strahlen bekannt sein. In Fig. 138 wurde er durch den Schnitt der 3 Strahlen, welche mit der Scheiteltangente und den beiden Asymptoten parallel laufen, bestimmt; in Fig. 137 durch den Schnitt der Strahlen, welche mit der Scheiteltangente, mit der Tangente an dem Punkt (2 3) oder mit dem (2 3) conjugirten Durchmesser und mit dem Durchmesser (2 3) parallel laufen; der Schnittpunkt dieses letztern mit dem Kräftepolygon wird im Segment 1 1 durch den Schnitt des conjugirten Durchmessers mit der Scheiteltangente bestimmt. Die Länge eines jeden Strahles giebt nun die Spannung oder Pressung im entsprechenden Bogenelement gleicher Richtung an.

Um auch noch die in der Richtung der Scheiteltangente gemessene Poldistanz h (Fig. 137) direct zu erhalten, bemerken wir,

dass das Dreieck, welches dieselbe mit irgend einem Strahl (2 3) z. B. mit dem Träger der Kräfte bildet, dem Dreieck ähnlich ist, welches der mit der Richtung der Kräfte parallel laufende Durchmesser a, der zum Strahl parallele, also dem entsprechenden Durchmesser (2 3) conjugirte Durchmesser und das Stück l der Scheiteltangente bilden, ähnlich ist; wird daher die Strecke l gleich a gemacht, so muss auch h gleich der entsprechenden Strecke (3 4 5 6), also auch gleich der Strecke sein, welche der conjugirte Durchmesser (hier 2 3) auf der Scheiteltangente abschneidet. Werden also vom Scheitelpunkt aus die Längen a und h, in entgegengesetzter Richtung bei der Ellipse, in gleicher Richtung bei der Hyperbel aufgetragen, so liegen ihre Endpunkte auf conjugirten Durchmessern. Die directe Construction dieser beiden Durchmesser führt wohl jederzeit am schnellsten zur Poldistanz h, und sie wurde Fig. 137 nur deshalb nicht ausgeführt, weil sie über den Rahmen der kleinen Figur hinausgefallen wäre.

Daraus, dass die Endpunkte der Strecken a und h auf der Scheiteltangente dem involutorischen Punktsystem angehören, welches durch den Schnitt aller conjugirten Durchmesser mit der Scheiteltangente entsteht und in dem daher der Scheitel, von dem aus a und h aufgetragen wurden, dem unendlich fernen Punkt conjugirt ist, kann noch weiter geschlossen werden, dass das Product ah constant sei. Bei der Ellipse, wo a und h in entgegengesetzten Richtungen aufgetragen werden und daher das Punktsystem keine Ordnungspunkte hat, ist dieses Product negativ. Bei der Hyperbel dagegen, wo a und h in gleichem Sinn aufgetragen werden und wo die Schnitte der Asymptoten mit dem Träger der Kräftesegmente die Ordnungspunkte bestimmen, ist ah gleich dem Quadrat der Entfernung dieser Punkte vom Scheitel.

Bei der Hyperbel kann man daher auch sagen: das Quadrat des halben (endlich begrenzten) Kräfteträgers ist die mittlere Proportionale zwischen a und h. Eine hieraus abgeleitete Construction ist Fig. 138 eingezeichnet, allein sie ist weitläufiger als die weiter oben angegebene Construction; dasselbe wäre auch der Fall, wenn man bei der Ellipse die mittlere Proportionale irgend zweier conjugirten Strecken und aus diesen dann h bestimmen wollte.

Schliesslich erinnern wir noch, dass je zwei Tangenten sich, als äussere Polygonseiten, auf der Mittellinie des Belastungsdruckes aller zwischen ihren Berührungspunkten vertheilten Lasten

schneiden. Der Schnitt der Tangente bei 2 3 mit der Scheiteltangente 6 7, liegt auf der Mittellinie des Druckes (Verticalen durch den Schwerpunkt), den die Lamellen zwischen 2 3 und 6 7, also die Lamellen 3 4 5 6 (3 4 5 bei der Hyperbel) ausüben. Die Tangente bei (2 3) ist nur in Fig. 137 angedeutet.

In der Praxis sind diese Druckcurven wichtig, weil sie zeigen, wie Gewölbe belastet werden müssten, damit ihre Stützlinie eine Curve zweiter Ordnung werde. Da die meisten Gewölbe die Form eines Kreises oder einer Ellipse erhalten, so haben wir Taf. 9_1 gezeigt, wie die Belastungscurven sich bei einem elliptischen Gewölbe ändern, wenn die Belastungshöhe h_0 im Scheitel geändert wird. Der Allgemeinheit wegen bestimmen wir diese Belastung (Taf. 9_1) für eine halbe Ellipse, die über einem beliebigen, der Richtung der Kräfte, d. h. hier der Verticalen conjugirten Durchmesser steht. Die Belastung dachten wir uns durch Verticallinien in eine Zahl gleichbreiter Lamellen getheilt, deren Mittellinien aufgetragen wurden.

Wir haben die erste Belastungscurve 1 dadurch erhalten, dass wir auf die Parallele P zur Scheiteltangente die Lamellengrenzen von O aus projicirt, und die erhaltenen Strecken über den treffenden Bogen als Lamellenhöhen aufgetragen haben; indem man P parallel zu sich selbst und dem zur Richtung der Belastung conjugirten Durchmesser verschiebt, erhält man die übrigen Belastungshöhen. Taf. 9_1 wurden die Belastungscurven für die 2-, 4-, 6-, 8-, 10-, 12- und 23fache Belastung einfach dadurch construirt, dass die Segmente von P eben so viele Male nach einander aufgetragen wurden.

Ausser dem schon über die Form der Belastungscurven Gesagten machen wir noch darauf aufmerksam, dass für die Belastungscurven mit kleiner Höhe im Schlusssteine die Curven 1—10 auf Taf. 9_1, bei dem Schluss in dem gleichen Sinne wie die Ellipse, bei den Widerlagern aber, in entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind. Zwischen den in entgegengesetztem Sinne gekrümmten Curventheilen liegen natürlicher Weise die Inflectionspunkte. Mit wachsender Belastung nähern sich diese Inflectionspunkte dem Scheitel, und der Krümmungshalbmesser des Curvenstücks zwischen denselben wird immer grösser.

Wird die Belastungshöhe im Scheitel $= {}^1/_3$ der verticalen Ellipsenaxe, so fallen laut Nr. 77 S. 299 die Inflectionspunkte im

Scheitel zusammen, der Krümmungshalbmesser daselbst wird unendlich gross. Vier Punkte fallen dann zusammen und die Curve scheint dort auf einer ziemlichen Strecke geradlinig zu sein. Dieses Verhältniss wird durch die Curve 12 dargestellt.

Die Geometrie als solche hat natürlich kein Mittel, um zum Zahlenverhältniss $^1/_3$ zu gelangen; wir können daher hier nur auf die analytische Ableitung von Nr. 77 verweisen.

Um zur Anschauung zu bringen, welche Form ein freitragender elliptischer Bogen, z. B. ein Strebebogen, haben müsse, haben wir den Raum zwischen der Ellipse und dem Bogen 1 schraffirt; man sieht, dass diese schraffirte Figur so ziemlich der Form gleicht, welche die alten Architekten ihren Strebebogen gaben; die Thürmchen, die immer über die Widerlager gestellt werden, entsprechen ganz den unendlich langen Belastungshöhen daselbst, Taf. 9_1. Jene Baumeister hatten also ein vollkommen richtiges Gefühl von der Form, die sie ihren Bogen aus Stabilitätsgründen geben mussten.

So viel uns bekannt ist, war Herr Prof. *Bauernfeind* in München der erste, der im IV. Bande der Stuttgarter Eisenbahnzeitung 1846, Nr. 34, S. 299 die Gleichung der Belastungscurven für Kegelschnitte aufgestellt hat.

79. Der unendlich ferne Punkt einer Parabel als Pol des einen Polygons.

Wir vereinigen die Ellipse und Hyperbel zur Parabel, indem wir mit dem Mittelpunkt der Curve in der Richtung der Kräfte in's Unendliche rücken.

Hierbei verweilen wir einen Moment im Mittelpunkt der Erde, bloss um zu constatiren, dass alle gleichförmig belasteten Gewölbe und Ketten als Ellipsen und Hyperbeln betrachtet werden können, deren Mittelpunkte mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfallen.

Denken wir uns nun, dieser liege im Unendlichen, so werden diese Curven Parabeln, durch deren unendlich fernen Punkt gleichzeitig die Richtung aller Kräfte geht. Der Strahlenbüschel derselben liegt daher perspectivisch mit der Curve, es gilt also alles in Nr. 75 S. 292 Gesagte; da endlich auch die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Curve wird, so werden alle überhaupt

vorkommenden einförmigen projectivischen Gebilde, deren bis jetzt Erwähnung geschah, ähnlich, weil in allen der unendlich ferne Punkt oder die unendlich ferne Tangente der Curve entsprechende Elemente bestimmt.

Insbesondere also sind ähnlich:

Der Parallelstrahlenbüschel, welcher in der Richtung der Kräfte (des unendlich fernen Pols) die einzelnen Parabelpunkte projicirt;

Die Segmente, in welche die Tangenten an diesen Punkten jede andere Tangente theilen;

Die Segmente, in welche die Gerade des Kräftepolygons vom Strahlenbüschel des Kräftepols getheilt wird, dessen einzelne Strahlen mit jenen Tangenten parallel laufen.

Die Parabel des Kräftepolygons hat man sich jetzt als auf zwei parallele Gerade reducirt vorzustellen, von denen eine durch den Pol der Kräfte geht, weil dieser jetzt perspectivisch, also in der Curve selbst liegt. Der Nr. 78 S. 300 gegebene Beweis ist jetzt nicht mehr gültig, weil in den Gebilden $a\,b\,\infty$, b mit ∞ zusammenfällt, mithin wird $a\,b$ gleich $a\,\infty$, d. h. die Entfernung je zweier Curvenpunkte wird, parallel zur Richtung der Kräfte gemessen, gleich der Poldistanz.

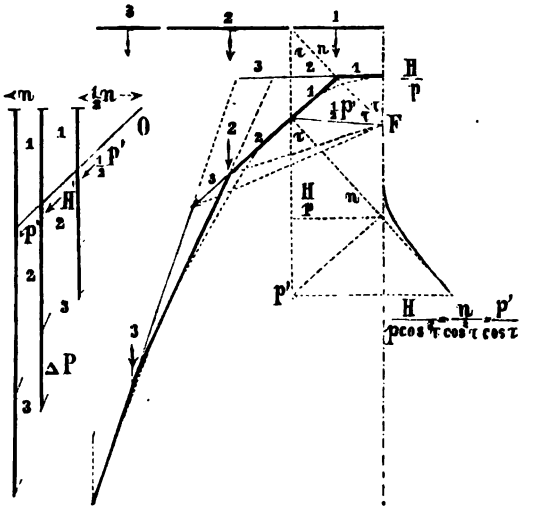
Aus der Aehnlichkeit des durch die Curvenpunkte bestimmten Parallelstrahlenbüschels und der Segmente des Kräftepolygons folgt noch, dass, wenn erstere äquidistant sind, auch die einzelnen Kräftesegmente gleich sein müssen (vergleiche Nr. 77 S. 299); die Belastung aller in der Richtung irgend einer geraden Linie gemessenen, gleich langen Strecken ist demnach auch gleich gross, die Parabel erscheint daher als die Curve der gleichmässigen Belastung.

Der Schnitt irgend zweier Parabeltangenten liegt immer in der Mitte zwischen den Durchmessern ihrer Berührungspunkte; denn betrachtet man diese beiden Durchmesser als Seiten eines einer Curve zweiter Ordnung einbeschriebenen Dreiecks, so sind sie durch die Tangente ihres Schnittpunktes hier die unendlich ferne Gerade, und durch den Schnittpunkt der beiden übrigen Tangenten harmonisch getrennt. Der Mitteldruck einer gleichmässig belasteten Strecke geht daher immer durch ihre Mitte. Hieraus folgt auch noch, dass das Aehnlichkeitsverhältniss zwischen den geraden Gebilden, welche durch

den Schnitt aller Tangenten und den Parallelstrahlenbüschel aller ihrer Berührungspunkte mit irgend einer Tangente entsteht, gleich 1 : 2 ist.

Hat man Fig. 139 das Seilpolygon einer gleichförmigen Belastung mit Hülfe des Kräftepolygons construirt, indem man die

Fig. 139.



mit Pfeilen angedeuteten Kräfte 1 2 3 in der Mitte der oben gezeichneten Belastungsstrecken und dann das Kräftepolygon links am Ende eines Horizontalschubs oder einer Poldistanz *H'*, denselben Strecken proportional annahm: so schneiden sich alle Seilpolygonseiten als Parabeltangenten in ähnlichen Gebilden. Da das Kräftepolygon den fortlaufenden Belastungsstrecken proportional, und diese doppelt so gross als die Scheitelstrecken sind, und gerade so gross als wie die Strecken der Leitlinie, siehe die Figur, so ist auch das Kräftepolygon den Punktgebilden ähnlich, in welchen sich alle Tangenten gegenseitig schneiden. Da ferner die Strahlen, welche vom Brennpunkt *F* aus die Schnitte einer Tangente mit allen andern projiciren, mit allen diesen letzteren, d. h. mit den Seilpolygonseiten, die mit den Strahlen *O* Δ *P* parallel laufen, gleiche Winkel bilden, so sind die Strahlenbüschel *F* und *O* congruent; die Strahlen der Büschel *O* und *F* bilden constante Winkel miteinander: demnach ist das Kräftepolygon

mit seinem Pol O, dem Punktgebilde irgend einer Tangente mit dem Brennpunkt F ähnlich, und congruent mit einem dieser Gebilde.

Dies Verhältniss giebt uns ein Mittel, für jedes parabolische Seilpolygon leicht den Brennpunkt zu construiren; man braucht nur eine Parallele zu ΔP so zu ziehen, dass die Segmente 1, 2, 3 zwischen den Strahlen O gleich den entsprechenden Segmenten irgend einer Tangente sind, und dann von irgend einem Theilpunkt ausgehend den Winkel $F(1\,2)3$ gleich dem Winkel $O(1\,2)3$, und die Strecken $F(1\,2)$ der Strecke $O(1\,2)$ gleich zu machen, so wird F der gesuchte Brennpunkt sein. Hiermit sind auch alle andern Constructionselemente gegeben.

Hat man hiefür insbesondere den Strahl nach dem Berührungspunkt der treffenden Tangente gewählt, wie es Fig. 139 geschah, so dass der entsprechende Strahl im Kräftepolygon parallel mit der Tangente läuft; betrachtet man diese als Abscissenaxe, und die Richtungslinie der Kräfte als Ordinatenaxe, so wird laut Nr. 77 S. 299 die Gleichung der Parabel:

$$x^2 = 2\frac{H'}{p}y = 2p'x$$

sein.

$\frac{H'}{p} = p'$ ist aber nichts anderes, als die doppelte Entfernung des Berührungspunktes vom Brennpunkte, die wir soeben construirt haben, denn man hat im Kräftepolygon, siehe Fig. 139:

$$\frac{H}{\frac{1}{2}p'} = \frac{p\,\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x},$$

woraus $p' = \frac{H}{p}$ folgt; was mit dem geometrischen Satz übereinstimmt, dass allgemein in der Parabelgleichung auch für schiefwinkelige Coordinatenaxen, die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt, selbst wenn diese Entfernung nicht in der Axe liegt, gleich dem halben Parameter sei.

In Fig. 139 wurde die Tangente an den Axenscheitel gezogen, und die anliegenden Tangentensegmente mit 1 bezeichnet, diese Segmente wurden auf allen Tangenten von F aus unter dem gleichen Winkel projicirt. Bezeichnet man diesen Winkel mit τ, so ist dies auch der Winkel, den die als Kräftepolygon markirte Tangente mit der Scheiteltangente bildet, und es ist offenbar:

$$\frac{H}{p} = p' \cos^2 \tau.$$

Ebenso erhält man die Länge der Normalen:

$$n = \frac{H}{p \cos \tau} = p' \cos \tau.$$

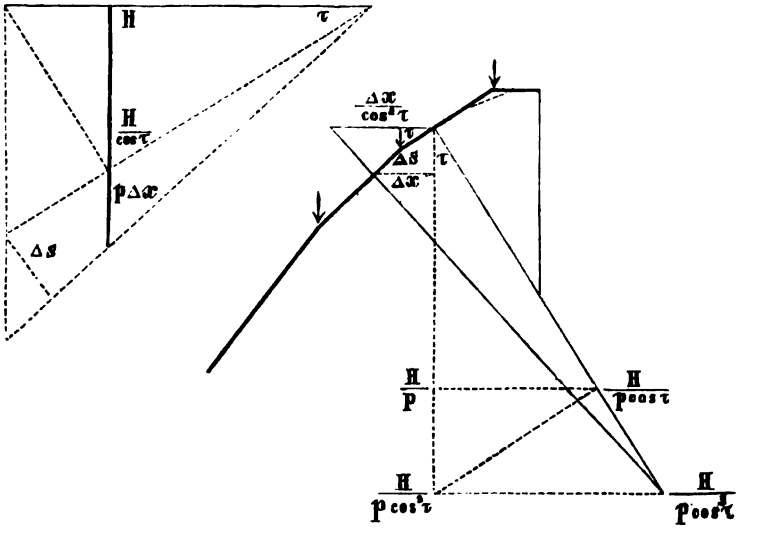
Alle diese Verhältnisse sind in der Figur hervorgehoben.

80. Der Krümmungshalbmesser der Seilpolygone paralleler Kräfte.

Von der Bestimmung dieses Krümmungshalbmessers kann natürlich nur dann die Rede sein, wenn keine concentrirten, sondern nur vertheilte Belastungen vorkommen.

Errichtet man Fig. 140 in den Berührungspunkten oder in den Lamellengrenzen sehr nahe aufeinander folgender Seilpolygon-

Fig. 140.



seiten zwei Perpendikel, so kann der Schnitt derselben als der Krümmungsmittelpunkt des Seilpolygons für die treffende Stelle betrachtet werden. Ist Δx die Abscissendifferenz der beiden Berührungspunkte, p die Belastung pro Längeneinheit, so ist $p \Delta x$

die in der Mitte der Lamelle wirkende Kraft. Zieht man jetzt durch den einen der beiden Berührungspunkte eine Senkrechte zur Richtung der Kräfte, so ist das Dreieck, welches die zwei aufeinander folgende Normalen mit derselben bilden, dem Dreieck ähnlich, das die auf jenen Normalen senkrecht stehenden Strahlen des Kräftepolygons mit der Belastung $p\,\Delta x$, siehe Fig. 140, des entsprechenden Curvenelementes bilden. Nun ist, wenn mit τ der Winkel zwischen dem Curvenelement und den in der Regel horizontalen Normalen zu den Kräften bezeichnet wird, die Länge eines dieser Strahlen $= \frac{H}{\cos \tau}$, und die Länge der oben erwähnten Horizontalen $= \frac{\Delta x}{\cos \tau}$, was ein Blick auf die Figur zeigt. Die Länge der Normalen aber ist gleich dem gesuchten Krümmungshalbmesser r, wenn sie zusammenfallen, man hat daher:

$$r : \frac{\Delta x}{\cos^2 \tau} = \frac{H}{\cos \tau} : p\,\Delta x,$$

oder

$$r = \frac{H}{p \cos^3 \tau}.$$

Diese Ableitung ist übrigens identisch mit der allgemein üblichen geometrischen Ableitung der Länge des Krümmungshalbmessers.

Dieser Krümmungshalbmesser lässt sich nun auch sehr leicht construiren. Trägt man auf einer Verticalen, einer Parallelen zu den Kräften durch den Curvenpunkt von diesem aus die Länge $\frac{H}{p}$ auf, so schneidet, siehe Fig. 140, eine Horizontale durch den Endpunkt von $\frac{H}{p}$ auf dem Krümmungshalbmesser r die Länge $\frac{H}{p \cos \tau}$ ab. Eine Antiparallele (Nr. 3 S. 15), die senkrecht auf r steht, schneidet auf der Verticalen $\frac{H}{p \cos^2 \tau}$ und endlich eine Horizontale durch den Endpunkt der letzten Länge auf r den Krümmungshalbmesser $\frac{H}{p \cos^3 \tau}$ ab.

Für die Tangente, welche auf der Richtungslinie der Kräfte senkrecht steht, ist $\tau = 0^0$ und $\cos \tau = 1$, demnach:

$$\frac{H}{p} = r \text{ oder } H = pr.$$

Dieses Verhältniss hat Hr. Prof. *Bauernfeind* in dem schon Seite 305 citirten Aufsatz dazu benutzt, um appraximativ die Gewölbstärken zu bestimmen.

Ist die Belastung p eine gleichförmige, so ist $\frac{H}{p}$ constant, das Seilpolygon also eine Parabel. In diesem Fall ist, wie ein Blick auf Fig. 139 S. 307 zeigt, der Krümmungshalbmesser:

$$r = \frac{H}{p \cos^3 \tau} = \frac{n}{\cos^2 \tau} = \frac{p'}{\cos \tau},$$

und mit derjenigen der drei Grössen $\frac{H}{p}$, n, p', die man gerade unter der Hand hat, kann der Krümmungshalbmesser construirt werden, wie es in der Figur geschah.

Ist die Belastung der Länge des Seiles selbst proportional, so ist $p = \frac{p_1}{\cos \tau}$, wenn man mit p_1 die Belastung im Scheitel bezeichnet, und man hat dann $r = \frac{H}{p_1 \cos^2 \tau}$. Die obige Construction vereinfacht sich in diesem Fall noch etwas, indem man das constante $\frac{H}{p_1}$ sogleich auf r an der Stelle auftragen kann, wo früher $\frac{H}{p \cos \tau}$ aufgetragen wurde; zwei Reductionslinien genügen dann, um auf derselben Linie $\frac{H}{p_1 \cos \tau}$, d. h. den Krümmungshalbmesser zu erhalten. In diesem Fall ist die Curve eine Kettenlinie, die wir noch später werden kennen lernen.

Nachdem wir die Krümmungsmittelpunkte zeichnen können, sind wir auch im Stande, für ein beliebiges Belastungsgesetz die Evolute des Seilpolygons zu construiren, welche mit ihren Spitzen die Eigenthümlichkeiten des Seilpolygons oder vielmehr der Drucklinie besser zur Anschauung bringt als diese selbst.

Taf. 9_2 haben wir die Drucklinie eines halbkreisförmigen Gewölbes mit geradliniger horizontaler Belastungslinie mit ihrer Evolute gezeichnet. Die Belastung denken wir uns durch Verticallinien in Lamellen zerlegt, deren Mittellinien punktirt wurden.

Die aneinander gereihten halben Längen dieser Mittellinien bilden das Kräftepolygon P'. Da die Normallinien, die wir zur Darstellung der Evolute ziehen müssen, länger als die Curvenelemente der Drucklinien sind, und parallele Linien genauer als senkrechte gezogen werden können: haben wir das Kräftepolygon um einen Viertelskreis gedreht, sodass die Curvenelemente senkrecht auf den ihnen entsprechenden Strahlen stehen, die Normallinien aber parallel mit ihnen laufen. Der Horizontalschub H wurde durch Probiren so bestimmt, dass die Drucklinie die obere horizontale Begrenzungslinie im Scheitel und die untere kreisförmige zwischen den Strahlen 23 und 24 berühren würde, wenn erstere in das Gewölbe hinein gezeichnet worden wäre; der Deutlichkeit wegen aber wurde sie so weit vertical und parallel mit sich selbst verschoben, bis sie ganz aus dem Gewölbe herausgetreten war.

Indem jetzt bei dem Ziehen jeder einzelnen Druckpolygonseite gleichzeitig auch die Normale parallel mit dem entsprechenden Strahl des Kräftepolygons HP' bis zur vorausgehenden Normalen und theilweise weiter gezogen wurden, erhielt man die Figur Taf. 9_2. Man ersieht aus derselben, dass die Evolute zwei Rückkehrpunkte bei A und bei B haben kann; A ist ein Rückkehrpunkt, weil sich rechts Alles gerade wie links wiederholt. Im Scheitel ist der Krümmungshalbmesser der Evolute ein relatives Maximum, ein absolutes Minimum ist er in dem der Spitze B entsprechenden Punkt 12—13, und von dort wächst er bis in's Unendliche.

Die Brechungspunkte des Gewölbes liegen da, wo die Normalen der Laibungen des Gewölbes und die der Drucklinie desselben zusammenfallen. So wie Taf. 9_2 die relative Lage des Gewölbes und der Drucklinie gezeichnet ist, gehen durch den Mittelpunkt O des Gewölbes drei Tangenten an die Evolute, nämlich die Normalen 0; 12, 13 und 18, 19. Bei der ersten und letzten ist die Evolute am weitesten vom Gewölbekreis entfernt, bei der mittelsten steht sie ihm am nächsten. Es hat nun durchaus keine Schwierigkeit, sich das Verhältniss in der wahren Lage der Drucklinie vorzustellen. Rücken wir z. B. das Gewölbe in seine wahre Lage so herunter, dass die horizontale Belastungslinie den Scheitel der Drucklinie berührt, so kommt der Mittelpunkt der innern Laibung nach O' herunter. Durch diesen Punkt kann man die drei Normalen bei 0, bei 4, 5 und bei 23, 24 auf die Drucklinie ziehen.

Im ersten Punkt steht die Drucklinie der äussern horizontalen Begrenzungsfläche am nächsten, weil aus dem Punkt ∞, dem Mittelpunkt der geraden Begrenzungslinie, nur eine einzige Normale an die Drucklinie gezogen werden kann. Dasselbe findet auch noch statt, solange der Krümmungsmittelpunkt der äussern Wölbfläche unter den Punkt A hinunterfällt. Ist die äussere Laibung mit der innern concentrisch, so steht die Drucklinie jener bei dem Punkt 4 5 am nächsten, und der äussere obere Brechungspunkt fällt nicht mit dem Scheitel zusammen. Dasselbe findet überhaupt nur statt, wenn der Krümmungsmittelpunkt der äussern Laibung zwischen A und C fällt, denn nur durch einen Punkt dieser Strecke können zwei von der Verticallinie verschiedene Normalen an die Drucklinie gezogen werden: weil der Schnittpunkt der Normalen mit der Verticallinie die Strecke $\cdot ACA\infty$ beschreibt, während die Normale selbst die Evolute beschreibt, sodass nur die Punkte der Strecke AC zweimal bestrichen werden. In 23, 24 liegt der untere Brechungspunkt.

81. Allgemeine reciproke Beziehungen zwischen dem Seil- und dem Kräftepolygon.

Die bisher besprochenen reciproken Beziehungen zwischen dem Seilpolygon und dem Kräftepolygon sind ohne aus der Ebene herauszutreten abgeleitet worden; will man aber diese Polygone als Projectionen räumlicher Linienzüge betrachten, so können diese Linienzüge jederzeit als reciproke Gebilde eines Nullsystems aufgefasst werden. Dies wurde zuerst nachgewiesen durch Prof. *Clerk Maxwell* in den *Philosophical Magazine* 1864 S. 250, und weiter ausgebildet durch *Cremona* in seinem schönen Werkchen: *„Le figure reciproche nella Statica Grafica, Milano Bernardoni* 1872". Hier folgen wir vorzugsweise diesem letztern.

Wir nehmen in einem Nullsytem einen räumlichen Linienzug 1 2 3, Fig. 140, an und schneiden ihn durch eine Ebene N; der Schnitt wird ein Polygon sein, durch dessen Ecken die einzelnen Linien des Zuges gehen. Die reciproke Figur 141 wird wieder aus einem Linienzug bestehen und aus Strahlen, welche dessen Ecken aus dem der Ebene N entsprechenden und in ihr liegenden Nullpunkt O projiciren. Projicirt man nun diese beiden räum-

lichen Gebilde aus dem unendlich fernen Punkt der Centralaxe auf irgend eine Ebene, so erhält man (siehe die Figuren) zwei Polygone, welche im Verhältniss von Seil- und Kräftepolygon zu einander stehen. In beiden Polygonen wurden die Polygonseiten durch stärkere Linien hervorgehoben.

In Nullsystemen werden entsprechende Linien durch Parallelebenen aus dem unendlich fernen Punkt der Centralaxe projicirt, daher laufen die Projectionen des Linienzuges Fig. 141 mit denen des Zuges von Fig. 142 parallel. Wir betrachten diese Projectionen

Fig. 141. Fig. 142.

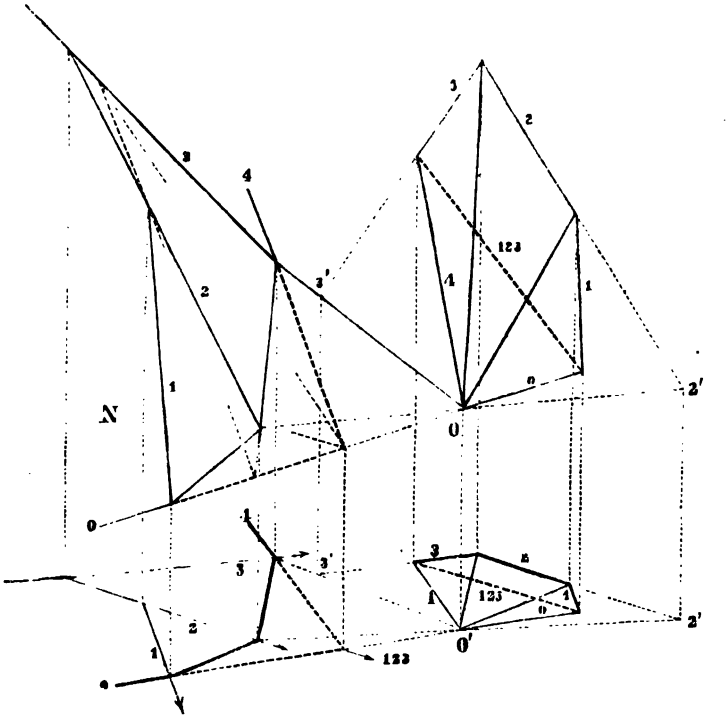


Fig. 141 als Richtungslinien von Kräften in einer Ebene und die Projection von Fig. 142 als das entsprechende Kräftepolygon. Fasst man weiter die Projection des Schnittpolygons in der Ebene N als ein Seilpolygon auf, das diese Kräfte mit einander verbindet, so sind die Projectionen der entsprechenden Strahlen des Büschels O die Spannungen in diesen Seilpolygonseiten, denn

sie gehen alle durch den Pol O' und laufen mit den Seilpolygonseiten parallel.

Es ist auch klar, dass man zu je einem Seil- und Kräftepolygon in einer Ebene unendlich viele reciproke Linienzüge zeichnen kann. Man kann zunächst die Ebene N ganz willkürlich annehmen und erhält durch Projection des Seilpolygons und des Poles O' auf sie die Durchstosspunkte der einzelnen Linien des Zuges in Fig. 141, und den Pol O in Fig. 142. In dieser letztern Figur sind nun ebenfalls die Durchstosspunkte $2'$, $3'$ des Kräftepolygons mit der Ebene N gegeben, denn sie liegen auf den Strahlen, welche von O aus die entsprechenden Durchstosspunkte der Figur 141 projiciren; diese Strahlen sind Leitlinien des Systems, weil sie in der Nullebene liegend durch den Nullpunkt gehen. Da sich also diese Strahlen und die treffenden Linien des Zuges schneiden, so sind auch die Schnittpunkte der Strahlen O' in der Projection mit den Kräftepolygonseiten die Projectionen dieser Durchstosspunkte, man braucht sie daher nur rückwärts auf die Strahlen O zu projiciren, um diese Durchstosspunkte zu erhalten. Nachdem so alle Durchstosspunkte in den Fig. 141 und 142 gegeben oder construirt sind, kann man noch einen Punkt des Linienzuges auf dem Mantel des Projectionsprismas der Kräfte willkürlich wählen; er bestimmt durch seine Verbindung mit dem entsprechenden Durchstosspunkt eine Linie des Zuges; die Verbindung der Schnitte dieser Linien und der Kanten der nächsten Prismenseite mit den entsprechenden Durchstosspunkten geben zwei weitere Zuglinien, u. s. f. bis zur ersten und letzten Zuglinie.

Die Projection der Verbindungslinien der Punkte 01 mit 34 in Fig. 142 ist die Mittelkraft 123 im Kräftepolygon; ihr entspricht die Schnittlinie der Ebenen 01 und 34 in Fig. 141 (wo auch die Construction dieser Schnittlinie angedeutet ist), sie geht durch den Schnitt der äussersten Seilpolygonseiten. Also geht die Mittelkraft einer beliebigen Zahl von Kräften, die durch ein Seilpolygon mit einander verbunden sind, durch den Schnitt der äussersten Polygonseiten.

Nimmt man 123 in Fig. 141 und 142 in entgegengesetztem Sinn, so sind die Kräfte im Gleichgewicht und die Polygone erscheinen geschlossen. Kräfte, die im Gleichgewicht sind, geben geschlossene Seil- und Kräftepolygone.

Vertauscht man in Fig. 142, vom Punkt 01 ausgehend, die Reihenfolge in der Addition der einzelnen Linien des Zuges, so gelangt man laut Nr. 38 S. 162 immer zu dem gleichen Endpunkt 34. In Fig. 141 sind demnach die erste und die letzte Ebene 01 und 34, also auch ihre Schnittlinie mit ihrer Projection, unverändert geblieben. Die Mittelkraft einer beliebigen Anzahl Kräfte ist von der Reihenfolge ihrer Zusammensetzung unabhängig, sie ist das Resultat einer Addition.

Aendert man die Ebene N mit ihrem Nullpunkt, so erhält man in der Projection einen andern Pol O'_1 des Kräftepolygons und ein anderes Seilpolygon. Je zwei Polygonseiten der Schnittebenen N und N_1 schneiden sich, denn sie liegen in der gleichen Ebene zweier aufeinanderfolgender Seiten des Zuges; ihr Schnitt kann daher nur in dem Schnitt der beiden Ebenen NN_1 liegen. Da dies vom Schnitt je zweier entsprechenden Polygonseiten gilt, so folgt, dass alle diese Schnitte in einer geraden Linie liegen; in der Projection werden sie daher auch auf einer geraden Linie liegen, woraus der Nr. 46 S. 176 bewiesene Satz folgt: dass die entsprechenden Seiten zweier Seilpolygone, welche dieselbe Reihenfolge von Kräften mit einander verbinden, sich auf einer geraden Linie schneiden. Auch versteht es sich von selbst, dass diese Schnittlinie und die ihr entsprechende Verbindungslinie der beiden Pole im Kräftepolygon nichts anderes ist, als wie die Mittelkraft der in irgend zwei Seilpolygonen wirkenden Kräfte, von denen die eine negativ zu nehmen ist.

Einer unendlich fernen Geraden entspricht im Nullsystem eine zur Centralaxe parallele Gerade; bewegt sich also die Ebene N parallel zu sich selbst, so wird ihr Nullpunkt O eine Parallele zur Centralaxe beschreiben; da aber aus dem unendlich fernen Punkt der Centralaxe projicirt wird, so wird die Projection des Linienzuges von Fig. 141 S. 314, also das Kräftepolygon sich nicht ändern. Die Seilpolygonseiten aber werden alle mit einander parallel laufen, weil sie sich im Unendlichen schneiden. Auf diese Weise erhält man alle Seilpolygone, die mit einem und demselben Kräftepolygon construirt werden können. Die Mittelkraft der in zwei entsprechenden Seilpolygonseiten wirkenden gleichen Kräfte, von denen die eine negativ zu nehmen ist, ist für alle Kräfte eine und dieselbe unendlich ferne Kraft, ein und dasselbe Moment.

Mit Hülfe des Nullsystems konnten hier alle auf den gegen-

seitigen Zusammenhang bezüglichen Eigenschaften des Kräfte- und Seilpolygons einfach und leicht entwickelt werden, und man könnte diese Beweise an die Stelle der Nrn. 41, 42, 44, 45 und 46 setzen, wenn das Verständniss des Nullsytems überall vorausgesetzt werden dürfte. In constructiver Beziehung leistet es jedoch keine Dienste, indem, wie wir gesehen haben, die Polygone erst gezeichnet sein müssen, um einen im Nullsystem möglichen Linienzug zu erhalten; immerhin haben Betrachtungen, die sich an das Nullsystem knüpfen, zur cyclischen Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte geführt, welche an einem Fachwerk wirken, und diese Reihenfolge führt zu den bei Weitem schönsten und elegantesten Figuren, wie wir in der nächsten Nummer zeigen wollen.

82. Fachwerke mit constanter, sonst aber beliebiger Belastung.

Es sei Taf. 10_1 ein Fachwerk, an dessen Knotenpunkten beliebige constante Kräfte wirken. Auf die verschiedenen Arten von Fachwerken werden wir später zurückkommen, bemerken aber, dass die Constructionen *Maxwell's* und *Cremona's*, die wir jetzt erläutern wollen, nur dann möglich sind, wenn die Kräfte auf Knotenpunkte wirken, die auf einem, alle Constructionstheile umfangenden Rande liegen. Ferner müssen die Kräfte im Gleichgewicht sein; sind daher 0 1 2 ... 7 die gegebenen Kräfte, so müssen diese erst zusammengesetzt, und dann nach den Richtungen der Widerlagerreactionen A und B zerlegt werden, siehe Nr. 55 S. 199. Jetzt ist erst ein neues geschlossenes Kräftepolygon zu construiren in der Reihenfolge A 1 3 5 7 B 6 4 2 0 A, wo dem Druckbogen die ungeraden, dem Spannbogen die geraden Ziffern so zugewiesen wurden, dass die Füllungsglieder einen fortlaufend numerirten Zug bilden. Mittelst dieses kann man ein beliebiges Seilpolygon und dann nach den Regeln der vorigen Nrn. einen räumlich geschlossenen Linienzug der Kräfte analog Fig. 140 construiren, und auf diesen die Knotenpunkte des Fachwerks projiciren; werden dann die im Fachwerk verbundenen Punkte auch auf dem Linienzug mit einander verbunden, so erhält man ein Vielflach, das aus so vielen Flächen besteht, als das Fachwerk Fächer be-

sitzt, und das ringsum von der developpabeln ringförmigen Fläche des Linienzuges begrenzt ist. Vergleicht man diese Figur mit Fig. 140, so erscheint die jetzt geschlossene ringförmige developpable Fläche nicht mehr durch die Ebene N, sondern durch das Vielflach begrenzt, das dem Fachwerk entspricht.

Wir construiren nun im Nullsystem das reciproke Gebilde. Es besteht, vergleiche Fig. 141, aus dem geschlossenen, nicht ebenen Linienzug der Kräfte; an die Stelle des Poles O aber tritt ein Vieleck, das so viele Ecken hat, als das in Fig. 140 den Knotenpunkten entsprechende Vielflach Flächen hatte, und an die Stelle der Projectionsstrahlen von O treten die den Strecken des Druck- und Spannbogens entsprechenden Linien. Jedem Knotenpunkt des Fachwerks entspricht ein ebenes Vieleck von so viel Seiten, als im Knotenpunkt Constructionstheile und Kräfte zusammentreffen.

Die Projection Taf. 10_2 dieses Gebildes ist nun der gesuchte Kräfteplan. Er besteht aus dem mit starken Linien ausgezogenen geschlossenen Zug der Kräfte, die einzelnen Linien desselben tragen die Nrn. der Kräfte; aus den Eckpunkten, welche den Flächen des durch die Füllungsglieder gebildeten Vielflachs entsprechen. Jedem Füllungsglied, Taf. 10_1, als Schnittlinie zweier aufeinander folgenden Flächen des Vielflachs entspricht Taf. 10_2 die Verbindungslinie zweier aufeinander folgenden Ecken des Vielecks. Diese Ecken erscheinen daher ebenfalls durch einen fortlaufenden Linienzug mit einander verbunden, der dem Zug der Füllungsglieder entspricht. Den einzelnen Strecken des Zug- und Druckbaums, welche zwei gerade oder ungerade Ecken des Zuges der Füllungsglieder mit einander verbinden, entsprechen die Trennungslinien der Flächen, welche jedem dieser Eckpunkte entsprechen, und welche zwischen den Linienzügen der Füllungslinien und der Kräfte liegen.

Jedem Fach Taf. 10_1 des Fachwerks, als Fläche betrachtet, entspricht Taf. 10_2 ein Eckpunkt des Zuges der Füllungsglieder, den Eckpunkten des Kräftezuges dieser Figur entspricht Taf. 10_1 ein Dreieck, das aus einer Strecke des Zug- oder Druckbaums und den beiden anstossenden Kräften besteht; also ein Dreieck, das die Projection eines Elementes der developpabeln Fläche ist. Da alle diese Flächen Dreiecke sind, so schneiden sich in jedem Eckpunkt der Taf. 10_2 nur drei Linien, nämlich eine Bogenstrecke

und zwei äussere Kräfte, oder zweier in den Füllungsgliedern wirkenden Kräfte. Die zwei Kräfte tragen die Zeichen der Knotenpunkte, welche die Bogenstrecke Taf. 10_1 verbindet, und die Ecke des Linienzuges liegt dieser Strecke gegenüber. Mit Ausnahme der ersten und letzten Strecke *AO* und *7B* liegt die Nr. des Linienzuges zwischen den der beiden Kräfte. Mittelst dieser Anhaltspunkte lassen sich also leicht die zusammengehörigen Bogenstrecken finden.

Jedem Knotenpunkt der Taf. 10_1 entspricht in Taf. 10_2 ein geschlossenes Polygon von so viel Seiten, als im Knotenpunkt Constructionstheile und Kräfte zusammentreffen. Jede Kraft erscheint nur als Seite eines dieser Polygone, dagegen jeder Constructionstheil als Seite zweier Polygone; hinsichtlich des durch den Sinn der Kraft bestimmten Sinnes der Polygonfläche wird der Constructionstheil beidemal in entgegengesetztem Sinn umfahren, nämlich die Bogenstrecken trennen zwei aufeinander folgende Kräfte gleichen Sinnes, sie können daher bezüglich der beiden Kräfte nicht den gleichen Sinn haben; der Zug der Füllungsglieder ist für alle Polygone, welche auf den Kräften stehen, die dem gleichen Bogen angehören, in gleichem Sinn befahren, dagegen in entgegengesetztem für die, welche dem andern Bogen angehören.

Betrachtet man daher alle diese Polygone als die der Kräfte, welche auf den treffenden Knotenpunkt wirken, so sind diese Kräfte an jedem Knotenpunkt im Gleichgewicht, weil alle Polygone geschlossen sind. Ist demnach das Fachwerk so construirt, dass den äusseren Kräften nur durch ein System innerer Kräfte das Gleichgewicht gehalten werden kann, so ist Taf. 10_2 der Kräfteplan dieses Systems; und jeder einzelne Constructionstheil hat einfach den zwei an seinen Endpunkten wirkenden, entgegengesetzt gleichen Kräften zu widerstehen. Auf Taf. 10_1 wurden die Kraftlinien derjenigen Constructionstheile, welche rückwirkend in Anspruch genommen sind, durch einen Schattenstrich, den gespreizten Querschnitt darstellend, ausgezeichnet.

Summirt man die Flächen aller Polygone, welche das Gleichgewicht an den Knotenpunkten darstellen, so fallen die sämmtlichen Linien, welche den Constructionstheilen entsprechen, als Grenzlinien aus, weil sie in entgegengesetztem Sinn befahren sind, die Flächensumme der Polygone ist daher gleich der Fläche des

geschlossenen Kräftepolygons. Dieser Satz ist noch einleuchtender, wenn man sich die Fläche durch ein einfaches Planimeter, Fig. 76 und 77 S. 125, bestrichen denkt; der eine Stift beschreibt den Linienzug der Füllungsglieder einmal hin und einmal her, um in seine ursprüngliche Lage zurückzukommen, die bestrichene Fläche ist $= 0$, der andere Stift umfährt dabei das geschlossene Kräftepolygon.

Führt man durch ein Fachwerk irgend einen Schnitt, so wird das Gleichgewicht auf keiner Seite des Schnittes gestört, wenn man an den durchschnittenen Constructionstheilen die in ihnen wirkenden Pressungen und Spannungen anbringt: denn geschieht es, so sind alle Kräfte im Gleichgewicht, welche an den Knotenpunkten wirken, und auf den geschnittenen Constructionstheilen sitzen. Lässt der Schnitt eine Zahl im Kräftepolygon aufeinander folgender Kräfte auf einer, die übrigen auf der andern Seite, so wird dies Gleichgewicht ebenfalls durch Taf. 10_2 bestätigt; nämlich die Endpunkte des Kräftezuges der auf einer Seite liegenden Kräfte können durch den Zug der geschnittenen Constructionstheile mit einander verbunden werden, und bilden dann ein geschlossenes Polygon. Für den Taf. 10_1 angedeuteten Schnitt wird z. B. in Taf. 10_2 das Gleichgewicht dargestellt: durch das Füllungsglied 3 4, durch die beiden anstossenden Spann- und Druckbogenstrecken 3 5 und 2 4, endlich durch den Kräftezug 2 0 *A* 1 3 oder 5 7 *B* 6 4, je nachdem man das Gleichgewicht auf der rechten oder auf der linken Seite des Schnittes in's Auge fasst. Hat man wie im vorliegenden Fall nur drei Constructionstheile geschnitten, so kann man auch zur Controle die in ihnen wirkenden Kräfte direct nach Nr. 56 bestimmen.

Wie aus dem Obigen hervorgeht, ist es durchaus nicht nothwendig, zur Construction der Figuren Taf. $10_{1\,2}$ auf das Nullsystem zurückzugreifen; im Gegentheil, es muss das Seilpolygon erst construirt werden, um den ihm entsprechenden räumlichen Linienzug zu erhalten, und die beiden Polygone unterscheiden sich von gewöhnlichen Kräfte- und Seilpolygonen nur durch die Reihenfolge der zusammenzusetzenden Kräfte, die so einzig schöne Kräftepläne liefert. Einen Nachtheil aber hat diese Reihenfolge, es muss erst das Gleichgewicht der äussern Kräfte durch ein besonderes Seil- und Kräftepolygon hergestellt werden, wozu die von *Cremona* in seine Figuren eingezeichnete und einem bestimmten Pol ent-

sprechenden Seilpolygone nicht dienen können, weil von vorn herein die in den Kräftezug einzuschaltenden Widerlagerreactionen nicht bekannt sind. Im Allgemeinen wird man daher entweder zwei Kräftepolygone zeichnen oder so construiren müssen, wie es auf Taf. 16 der ersten Ausgabe dieses Werkes geschah. In allen Fällen aber, wo die äussern Kräfte von vorn herein bekannt sind, giebt es keine schönere und zweckmässigere Disposition der Kräftepolygone. Wir werden sie daher ausschliesslich im Laufe dieses Werkes zur Bestimmung der vom Eigengewicht nicht symmetrischer Fachwerke herrührenden inneren Kräfte, oder auch für die krahnartigen Constructionen benutzen, und geben Taf. 10 noch als Beispiele einige derartige Kräftepläne, die mit Ausnahme des *Pauli*'schen Trägers ebenfalls der *Cremona*'schen Schrift entnommen sind.

Taf. $10_{3\,4}$ ist der Kräfteplan eines *Pauli*'schen Trägers. Die vertical aufwärts wirkenden Widerlagerreactionen A und B sind gleich dem, als bekannt vorauszusetzenden halben Trägergewichte, mit der Kraft A beginnend wurden von deren obern Endpunkte ab die Belastungen des Spannbogens 0 2 4 .. 1 2, dann B und schliesslich die des Druckbogens 13′ 11 9 ... 1 aufgetragen, da nur verticale Belastungen angenommen wurden, so klappt das geschlossene Kräftepolygon zu einer geraden Linie zusammen. Durch die Trennungspunkte der Kräfte werden Parallellinien zu den entsprechenden Bogenstrecken geführt, und dann bei 1 oder 13 beginnend, die Bogenkräfte durch den Linienzug 1 ... 13, dessen Strecken mit den treffenden Constructionstheilen parallel laufen, abgeschnitten. In der Zeichnung wurden die Belastungen des Spannbogens und die des Druckbogens verschieden gross angenommen, wäre das nicht geschehen, so hätte man verschwindend kleine Kräfte in den Füllungsgliedern erhalten. In Fachwerken wie in dem vorliegenden sind in der Regel Gegenbänder in den Fächern vorhanden; bei der Disposition der Figuren Taf. $10_{3\,4}$ giebt die eine Hälfte der Zeichnungen die Kräfte, welche in der einen Schaar, und die andere Hälfte giebt die Kräfte, welche in der andern Schaar wirken.

Taf. $10_{5\,6}$ ist der Kräfteplan eines Hängwerks, es unterscheidet sich vom *Pauli*'schen Träger nur durch die symmetrische Disposition der Füllungsglieder und der Mittelpfosten. Die ausgeführten Constructionen bedürfen keiner weitern Erläuterung.

Taf. $10_{7\,8}$ ist der Kräfteplan einer versteiften Kette. Die in den äussersten Kettengliedern wirkenden Spannungen AB ergeben sich dadurch, dass ihre verticale Seitenkraft gleich der halben Summe aller Belastungen sein muss; sind sie dem entsprechend bestimmt, so kann das Kräftepolygon construirt werden, das im vorliegenden Fall ein verschlungenes Viereck ist, und hierauf, wie in den früheren Beispielen die in den Constructionstheilen wirkenden Kräfte.

Noch einfacher ist der Kräfteplan des Krahnen Taf. $10_{9\,10}$. Das Kräftepolygon besteht nur aus der nicht geschlossenen Verticallinie der Belastungen. Von der an der Spitze 0 wirkenden Kraft ausgehend, können alle Kräfte construirt werden, käme der Boden nicht, so könnte man dieses krahnartige Fachwerk in das Unendliche fortspinnen. Das Kräftepolygon kann mit den Mittelkräften der auf dem Boden aufsitzenden Constructionstheile geschlossen werden.

DRITTER ABSCHNITT.

MOMENTE PARALLELER KRAEFTE.

Erstes Kapitel.

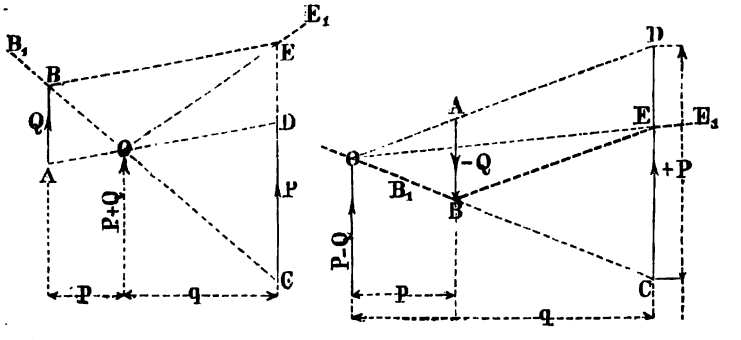
Parallele Kräfte.

83. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte.

Mittelst der Momente können wir bereits schon parallele Kräfte zusammensetzen; in der Praxis aber werden sie am zweckmässigsten mit Hülfe eines Seilpolygons zusammengesetzt. In diesem Kapitel sollen nun die praktischsten Methoden auf einige häufig vorkommende Fälle angewendet werden.

Um zwei Kräfte P und Q (Fig. 143), die in den parallelen Richtungen AB und CD wirken, zusammenzusetzen, vertausche

Fig. 143.



man zur Construction ihrer Mittelkraft ihre Richtungen, und trage mit Berücksichtigung des Zeichens Q in AB und P in CD auf, so geht die Mittelkraft durch den Schnitt O der beiden Linien BC

und DA, welche die vier Punkte in der Art zu einem Viereck $ABCD$ ergänzen, dass dessen Umfang von den Kräften P und Q in demselben Sinn umfahren wird.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, hat man nur die Kraft Q mittelst der Parallelen BE zu AD in der Art auf ihre ursprüngliche Richtung CD nach DE zu projiciren, dass sich dort die P und Q mit Berücksichtigung des Sinnes zu CE addiren. Dann kann man $OCDE$ als ein Kräftepolygon und B_1BEE_1 als das entsprechende Seilpolygon betrachten, dessen Mittelseite BE mit OD parallel läuft, und dessen äussere Seiten sich in O schneiden, also ist O ein Punkt der gesuchten Mittelkraft. Die Grösse der Mittelkraft ist gleich $P + Q$ oder gleich CE.

Aus der Figur 143 und aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke OAB und OCD geht ferner hervor, dass die Richtung der Mittelkraft zweier paralleler Kräfte mit der der Kräfte selbst übereinstimmt, zwischen die Richtungen derselben fällt, wenn beide in gleichem Sinne (bezüglich der unendlich fernen Geraden) dagegen jenseits dieser Richtungen und zwar auf die Seite der grössern Kraft (hier P, deren Richtung mit AB zusammenfällt) fällt, wenn sie im entgegengesetzten Sinne wirken und dass endlich das Verhältniss der Entfernung der beiden Kräfte P und Q von O also

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AO}{DO} = \frac{p}{q}$$

gleich dem umgekehrten Verhältniss der beiden Kräfte $= \frac{Q}{P}$ ist.

Dieser letztere Satz geht auch aus den Lehren von den Momenten, wonach $Pp = Qq$ sein muss, hervor.

Die häufig vorkommende reciproke Aufgabe, eine in Richtung und Grösse gegebene Kraft in zwei parallele Seitenkräfte zu zerlegen, die nach gegebenen Richtungen wirken, ist in obiger Fig. 142 ebenfalls gelöst. Durch einen Punkt O der Mittelkraft ziehe man zwei Strahlen OC und OE nach der auf der einen der beiden gegebenen Richtungen aufgetragenen und zu zerlegenden Kraft CE. Zieht man dann durch O einen Strahl OD parallel zur Linie BE, welche die Schnittpunkte der beiden Strahlen mit den gegebenen Richtungen der Seitenkräfte verbindet, so theilt dieser Strahl in D die gegebene Mittelkraft CE mit Berücksichtigung des Sinnes in die beiden Seitenkräfte CD und DE.

Braucht man nicht beide Seitenkräfte P und Q, sondern nur die eine derselben, Q z. B., das in der Richtung CD wirkt (in der wir P aufgetragen haben), so erhält man sie unmittelbar als Segment der Verticallinie zwischen O und BE. Dass diese Länge gleich DE gleich Q sei, geht aus dem Parallelismus der Linien OD und BE hervor.

84. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte in der Ebene.

Sind mehr als zwei Kräfte in einer Ebene zusammenzusetzen, so ist es am zweckmässigsten, das Seilpolygon regelmässig zu construiren, was auch schon bei zwei Kräften vortheilhaft ist, wenn man ihrer Momente bedarf. Da parallele Kräfte sich erst in unendlicher Ferne schneiden, so kann man natürlich die erste der Kräfte nicht bis zu ihrem Schnitt mit der zweiten verlängern und als Pol im Kräftepolygon den Anfang der ersten Kraft annehmen, sondern es muss dieser Pol ausserhalb der geraden Linie angenommen werden, auf die sich das Kräftepolygon reducirt, weil die Richtungen aller Kräfte zusammenfallen. Jede Parallele zum Strahl des Anfangs der ersten Kraft kann dann als erste Seilpolygonseite betrachtet und das Seilpolygon nach den früheren Regeln construirt werden.

In Fig. 144 und 145 (siehe S. 328) ist eine solche Zusammensetzung ausgeführt worden. Die in Fig. 145 aufgetragenen 4 Kräfte liegen in einer geraden Linie, die mit dem Pol O das Kräftepolygon bildet. Im Seilpolygon (Fig. 144) laufen die einzelnen Polygonseiten mit den entsprechenden Strahlen, z. B. die Seiten zwischen 2 und 3 mit dem Strahl O (2 3), die äussersten Polygonseiten mit den äussersten Strahlen parallel.

Durch den Schnitt zweier Seilpolygonseiten erhält man einen Punkt der Mittelkraft der zwischen ihnen wirkenden Kräfte, deren Richtung und Grösse durch das Kräftepolygon gegeben ist. Häufig ist die Mittelkraft der 1, 2, 3.. ersten Kräfte zu bestimmen, dann gestaltet sich die Construction wie Fig. 144, wo diese Mittelkräfte durch (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4) angedeutet sind.

Wirken die 4 Kräfte an einem Balken oder an einer andern Construction und handelt es sich darum, den Druck auf die Stütz-

punkte A und B zu bestimmen, so hat man (nach Nr. 83 S. 326 Fig. 142, vergleiche auch Nr. 55) nur die Mittelkraft (1 2 3 4) in

Fig. 144.

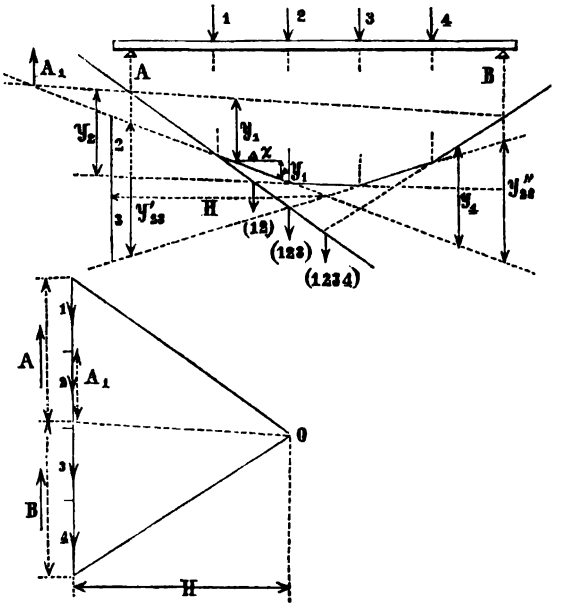


Fig. 145.

zwei Seitenkräfte nach den Richtungen A und B zu zerlegen. Diess geschieht, indem man die äussersten Polygonseiten bis zu ihrem Schnitt mit den Parallelen durch A und B verlängert, und das Polygon durch die Schlusslinie AB schliesst. Der zu AB parallele Strahl $O(AB)$ (Fig. 145) im Kräftepolygon theilt dann die Summe (1 2 3 4) in die zwei Seitenkräfte A und B.

Stellt man das Gleichgewicht dadurch her, dass man diese Seitenkräfte in umgekehrter Richtung wirken lässt, wie es in Figur 145 durch die Pfeile angedeutet ist, so stellen diese Kräfte A und B den Gegendruck der Widerlager dar; wie es das Gleichgewicht verlangt, ist die Summe der 6 Kräfte $A\,1\,2\,3\,4\,B$ im Kräftepolygon $= 0$ und das Seilpolygon, in welchem die Linie AB jetzt eine Seite zwischen A und B darstellt, geschlossen (Nr. 53 S. 193).

Bei Brückenconstructionen ist es häufig nothwendig, die Mittelkraft aller ausserhalb eines bestimmten Querschnitts y_1 z. B.

wirkenden Kräfte zu kennen; man nennt diese Kräfte scheerende, in so fern man sie sich in dem Querschnitt selbst wirkend denken kann. Diese Kräfte sind im vorliegenden Fall A und 1. Durch Verlängerung der Polygonseiten ausserhalb A und ausserhalb 1 (Nr. 44 S. 172) erhält man einen Punkt der Richtungslinie von (A 1) und das Kräftepolygon giebt die Summe A_1 von (A 1), wie es in beiden Polygonen angedeutet ist.

Aus der Construction geht auch hervor, dass die Summe der ausserhalb des Querschnittes y_1 wirkenden Kräfte durch zwei Strahlen des Poles O, Fig. 145, auf der Linie der Kräfte ausgeschnitten wird, die parallel mit den Polygonseiten ausserhalb der aufeinanderfolgenden Kräfte laufen. Man kann daher auch ohne auf das Kräftepolygon, Fig. 144, zurückzugreifen, direct auf Fig. 144 die zwischen zwei Polygonseiten wirkenden Kräfte construiren; es werden dieselben auf einer Secante, die parallel zu den Kräften in der Entfernung H vom Schnitte der äussern Polygonseiten geführt wird, ausgeschnitten. — Diese Construction ist für die Kräfte 2 3 in Fig. 144 angedeutet. Das Dreieck zwischen den äusseren Polygonseiten 1 2, 3 4 und der stark ausgezogenen Verticalen 2 3 ist congruent mit dem entsprechenden Dreieck O (2 3) des Kräftepolygons Fig. 145.

Ferner ist auch die Summe der Segmente $y'_{23} + y''_{23}$, Fig. 144, welche zwei Polygonseiten auf den Verticalen durch die Widerlager abschneiden, den zwischen ihnen wirkenden Kräften $2 + 3$ proportional; denn zieht man durch den Schnitt einer Polygonseite mit einer Verticalen eine Parallele zur andern Polygonseite, so bilden diese beiden Linien mit der Verticalen durch das andere Widerlager, deren Segment zwischen ihnen gleich $y'_{23} + y''_{23}$ ist, ein Dreieck, das dem Kräftepolygon ähnlich ist; und ihm gleich wird, wenn dessen Poldistanz gleich der Spannweite $2l$ genommen wird. Man hat demnach:

$$y'_{23} + y''_{23} = (2 + 3)\frac{2l}{H}.$$

Aus dieser Ableitung geht hervor, dass diese Summe sich in eine Differenz verwandelt, wenn der Schnitt der Polygonseiten ausserhalb der Oeffnung liegt, wie es z. B. bei der Schlusslinie der Fall ist.

Hätte man die Poldistanz gleich $2l$ genommen, so wäre, wie schon bemerkt wurde, die Segmentensumme einfach gleich der

Summe der zwischen den Polygonseiten wirkenden Kräfte. Insbesondere schneiden in diesem Fall die beiden äussersten Polygonseiten die beiden Widerlagerreactionen je auf der Verticalen des andern Widerlagers ab, denn die Segmente zwischen der Schlusslinie und der einen dieser äussersten Polygonseiten sind immer gleich Null.

Ist die Poldistanz nicht gerade gleich $2l$, aber $2l : H$, doch eine runde Verhältnisszahl, so können dennoch die Segmentsummen der Widerlagerverticalen als die Reactionen darstellend betrachtet werden, nur hat man sie auf einem in jenem Verhältniss veränderten Maassstab abzugreifen.

Wir machen hier darauf aufmerksam, dass, wie es aus der Figur hervorgeht, die Summe der ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräfte mit der durch den Strahl O (AB) im Kräftepolygon bezeichneten Kraft, hier 3, ihr Zeichen wechselt. Also die Kräfte $(A\,1\,2)$ und $(A\,1\,2\,3)$ haben entgegengesetzte Zeichen und liegen auf entgegengesetzten Seiten des Polygons. Betrachtet man die Schlusslinie AB als Abscissenaxe, so liegt in 3 der Punkt, für welchen die Ordinate des Seilpolygons ein Maximum ist. In diesem Punkt ist die Tangente an das Seilpolygon natürlich parallel zur Schlusslinie, die Mittelkraft der ausserhalb wirkenden Kräfte ist eine unendlich kleine und ferne und ist gleich 0.

Das Seil- und Kräftepolygon, wie es hier in Fig. 144 und 145 gezeichnet ist, giebt unmittelbar die Gleichgewichtsbedingungen eines belasteten Bogenhängewerks (Fig. 146) oder einer Kettenbrücke (Fig. 147). Die Strahlen von O sind die Spannungen in den entsprechenden Bogenstücken oder Kettengliedern.

Fig. 146.

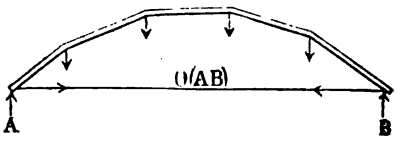
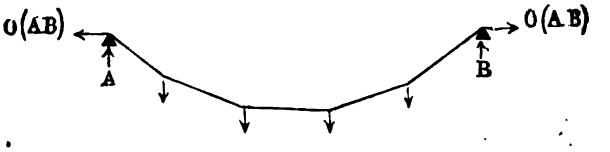


Fig. 147.



Der ganz allgemein bewiesene Satz, dass die Aenderung in der Reihenfolge der Zusammensetzung keinen Einfluss auf das Endresultat ausübe, gilt natürlich auch von parallelen Kräften. Man kann daher z. B. bei Kräfteplänen von Brücken, wie wir später sehen werden, zuerst das constante Polygon des Eigengewichtes auftragen, und die wechselnde zufällige Belastung immer nur zuletzt beifügen.

Schliesslich ist zu bemerken, dass laut Nr. 79 S. 305 diese Polygone Parabeln umhüllen, wenn die Belastungen gleichmässig in irgend einer geraden Richtung gemessen vertheilt sind.

85. Momente paralleler Kräfte in der Ebene.

Setzt man bei Anwendung der in Nr. 49 S. 185 entwickelten Construction zur Bestimmung des Momentes einer beliebigen Zahl aufeinander folgender paralleler Kräfte die Länge H (Fig. 105 S. 185), das heisst die Kraft oder den Hebelarm, auf welchen man alle Momente reduciren will, gleich dem senkrechten Abstand des Punktes O von der Richtungslinie der Kräfte im Kräftepolygon, so werden die beiden zu Q und zu Q_1 (Fig. 104) parallelen Linien OA und OA_1 mit der Richtungslinie der Kräfte und mit der Richtung der Linie $h + h_1$, die senkrecht auf H steht, zusammenfallen. Das Maass des Momentes $h + h_1$ wird gleich dem Segment sein, das die Seilpolygonseiten ausserhalb der gegebenen Kräfte, auf der zu ihnen parallelen Linie abschneiden, in Bezug auf welche das Moment bestimmt werden soll. So ist z. B. Fig. 144 S. 328

das Moment der Kräfte	$A1$	$A12$	234
in Bezug auf die Querschnitte	y_1	y_2	y_4
gleich den Producten	$y_1 H$	$y_2 H$	$y_4 H$

wo der eine Faktor, jedoch beliebig welcher, als Kraft und der andere als Hebelarm abgegriffen werden muss. Der Drehungssinn der Momente kann natürlich immer nur der Richtung und Lage der Mittelkraft bezüglich dieses Querschnittes entnommen werden. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass dieses Verfahren mit der Multiplication von Nr. 4 S. 25 Taf. 3_1 identisch ist.

Direct kann der Satz auch bewiesen werden, indem man die in den beiden äussersten Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte in ihrem Schnitt mit der Verticalen in Bezug auf welche das Moment

bestimmt werden soll, in den Horizontalschub H und in eine verticale Kraft zerlegt; das Moment der beiden letzteren ist gleich Null, und das der beiden parallelen H gleich H mal dem Segment der Verticalen.

Sind Momente als Kräfte in das Seilpolygon einzuschalten, so ist laut Nr. 52 S. 191 die Seilpolygonseite um so viel parallel mit sich selbst zu verschieben, dass ihre Spannung multiplicirt mit ihrer Distanz, oder was bei parallelen Kräften dasselbe ist, das Segment, das sie auf einer Parallelen zu den Kräften abschneiden, multiplicirt mit der Poldistanz gleich dem einzuflechtenden Moment sei. Es geht dies aus dem Verhältniss:

$$S : h = \frac{\mathfrak{P}}{h} : s,$$

der beiden ähnlichen mit diesen Buchstaben bezeichneten Dreiecke Fig. 149 und 150 hervor, wo zwischen die Reactionen der Auf-

Fig. 148.

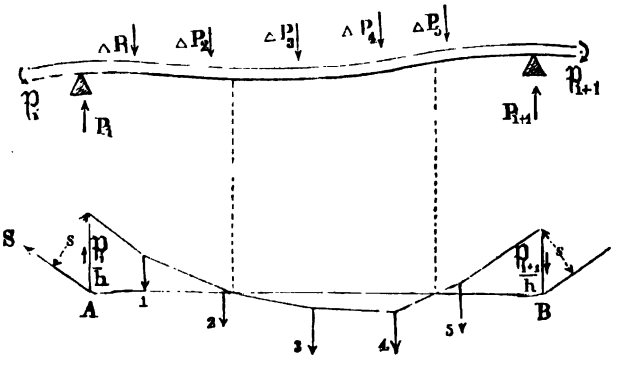
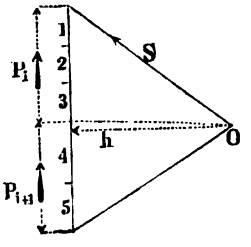


Fig. 149.

Fig. 150.



lager und die äussersten Seilpolygonseiten die Momente $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_{i+1}$ eingeschaltet wurden. Es kann Fig. 148 das Stück eines continuirlichen Balkens zwischen dem i und $i+1$ ten Pfeiler darstellen. Das Moment $\mathfrak{P}_i$ über dem $i$ten Pfeiler wurde negativ (-) angenommen; es muss daher das $\frac{\mathfrak{P}_i}{h}$ in

Fig. 149 so aufgetragen werden, dass nach der Verschiebung der ersten Seilpolygonseite S, auf der die Richtung der Kraft durch einen Pfeil angedeutet ist, sie in diesem Sinne ↻ um einen ihrer Punkte drehe; $\frac{\mathfrak{P}_i}{h}$ ist also aufwärts aufzutragen. Das Polygon wird hierauf bis zum Pfeiler $i+1$ bei B gezeichnet wie jedes andere, dort aber wird das Seilpolygon um eine dem Moment $\mathfrak{P}_{i+1}$ entsprechende Höhe $\mathfrak{P}_{i+1} : h$, parallel zu den Kräften gemessen, verschoben. Bei B wurde, wie die Figur 148 zeigt, ein positives Moment ↺ angenommen, das in entgegengesetztem Sinn, als wie das bei A dreht, die letzte Seilpolygonseite ist daher abwärts zu verschieben.

Die äussersten Polygonseiten schneiden die Pfeilerreactionen bei A und B, die Verbindung dieser Punkte giebt daher die Schlusslinie; eine Parallele zu denselben durch den Pol in Fig. 150 schneidet auf dem Kräftepolygon die Pfeilerreactionen P_i und P_{i+1} aus.

Alles, was in der vorigen und in dieser Nummer von dem Polygon Fig. 144 S. 328 gesagt wurde, gilt auch von diesem; führt man einen Schnitt durch den Balken, so schneiden sich die äussersten Polygonseiten auf der Mittellinie der an dem abgetrennten Stück wirkenden Kräfte, und auf irgend einer Secante parallel zu den Kräften schneiden die geschnittenen Polygonseiten Segmente aus, welche mit der Poldistanz multiplicirt das Moment der abgetrennten Kräfte bezüglich eines Punktes der Secante geben. In Fig. 149 schneidet das Seilpolygon zweimal die Schlusslinie. Man überzeugt sich leicht, dass in diesen Punkten das Moment sein Zeichen ändert. Es geht daselbst durch 0, ohne dass es die Kräfte thun, demnach muss es sein Zeichen wechseln, und führt man Schnitte rechts und links von diesen Punkten, so liegen die Mittellinien der ausserhalb dieser Schnitte wirkenden Kräfte zwischen den Schnitten, sie drehen daher in entgegengesetztem Sinne, wenn die Kraft innerhalb der Schnitte ihr Zeichen nicht gewechselt hat. Umgekehrt darf man auch schliessen: damit ein Moment sein Zeichen wechsle, muss es durch 0 gehen, weil unendlich grosse Momente bei Constructionen unzulässig sind. Da nun auch Flächen, siehe Fig. 76 S. 125, nur dann ihr Zeichen wechseln, wenn ihr Umfang zwischen der positiven und negativen

Fläche sich kreuzt, so kann man von Polygonen paralleler Kräfte, die im Gleichgewicht sind, allgemein sagen:

Trennt man einen Theil geschlossener Seilpolygone, welche im Gleichgewicht befindliche parallele Kräfte mit einander verbinden, durch Schnitte parallel zu den Kräften ab: so ist das Moment der abgetrennten Kräfte bezüglich dieses Schnittes positiv oder negativ, je nachdem die durchschnittene Fläche des geschlossenen Seilpolygons positiv oder negativ von einem Stifte umfahren würde, der dem Seilpolygon in der Richtung der in ihnen wirkenden Kräfte folgte. Für Punkte ausserhalb des Schnittes hat das Moment dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem dieser Punkt auf derselben oder der entgegengesetzten Seite der Mittelkraft der abgetrennten Kräfte, d. h. der Parallelen durch den Schnitt der geschnittenen Polygonseiten, liegt.

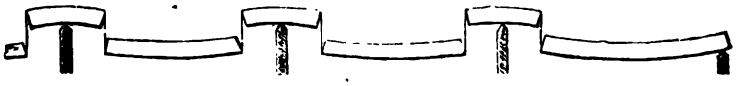
In diesem Sinne kann man die Fläche eines geschlossenen Seilpolygons paralleler Kräfte eine Momentenfläche nennen. Von Seilpolygonseiten im Allgemeinen gelten diese Sätze nicht, weil die Richtung der Mittelkraft veränderlich ist.

Sind die Kräfte, welche in Fig. 149 zusammengesetzt wurden, solche, die an einem Balken, Fig. 148, im Gleichgewicht sind, so wird die Biegung des Balkens, den wir uns vorher gerade dachten, immer mit dem Sinn des Momentes oder der Momentenfläche im Einklang sein. Theilen des Polygons, die über der Schlusslinie liegen, entsprechen Balkenstrecken, die abwärts gebogen sind, und umgekehrt, wie die Figuren es andeuten. Den Punkten, in welchen die Momente gleich 0 sind, entsprechen daher Balkenquerschnitte, auf deren beiden Seiten die Balken in entgegengesetztem Sinn gebogen sind; in diesen Querschnitten selbst findet gar keine Biegung statt.

Diese Punkte heissen Inflectionspunkte; in ihnen könnte man die Streckbäume des Balkens schneiden, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn nur dafür gesorgt würde, dass die Querschnitte nicht aneinander vorübergleiten können. Dies könnte z. B. durch Unterstützung oder einfach dadurch geschehen, dass man das Balkenstück zwischen den beiden Inflectionspunkten

an dem Balkenstücke über den Pfeilern aufhinge; dieses Verhältniss wird vielleicht am deutlichsten durch Fig. 151 dargestellt.

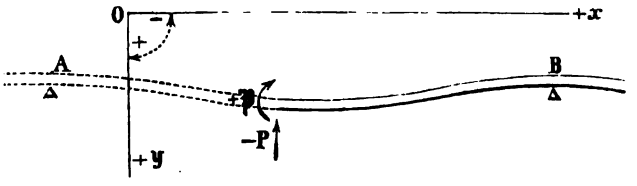
Fig. 151.



Wir dachten uns ein Balkenstück über jeden Pfeiler gelegt und an seinen Endpunkten das Mittelstück jeder Oeffnung aufgehängt.

Betrachtet man einmal die Kräfte, die auf der einen Seite, und das andere mal die, die auf der andern Seite eines durch eine Construction geführten Schnittes wirken, als die abgetrennten, so erhält man nach Nr. 53 S. 193 entgegengesetzte Zeichen für die Mittelkraft und ihr Moment. Es ist nun für die Kräftepläne ganz einerlei, welche Seite als die abgetrennte betrachtet wird; immerhin wird es nützlich sein, unter gewöhnlichen Verhältnissen, stets die gleiche Seite abzutrennen, man wird sich schneller vergegenwärtigen können, wie diese Kräfte und die Widerstände der geschnittenen Constructionstheile wirken. Wenn daher nichts Besonderes bemerkt wird, so werden wir uns immer den auf der Seite $-x_\infty$ liegenden Theil der Construction abgetrennt, und durch die an den geschnittenen Constructionstheilen wirkenden Kräfte ersetzt denken. Da wir gewöhnlich auch $+x_\infty$ rechts annehmen, so wird Fig. 152 dieses Verhältniss klar machen. Die

Fig. 152.



abgetrennte Balkenstrecke wurde punktirt, und die Mittelkraft der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte durch $+\mathfrak{P}$ und $-P$ angedeutet.

Sehr wichtig ist es, den Punkt oder den Querschnitt zu ermitteln, für welchen das Moment der ausserhalb desselben wirkenden Kräfte ein Maximum ist, und den wir den Maximalmomentenpunkt oder Querschnitt nennen wollen. Man

erhält denselben, indem man (Fig. 144) eine Tangente parallel zur Schlusslinie AB an das Seilpolygon zieht. So wie die Figur gezeichnet ist, geht dieselbe durch den Eckpunkt 3, und fällt mit keiner Polygonseite zusammen; denken wir uns jedoch das Polygon als Curve, wie sie bei Zusammensetzung vertheilter Lasten entsteht, so wird die Tangente mit der unendlich kleinen Polygonseite zusammenfallen, die mit der Schlusslinie AB parallel läuft und deren Spannung im Kräftepolygon (Fig. 145) durch den Strahl $O\,(AB)$ angegeben ist. Dieser Punkt fällt demnach mit dem Punkt zusammen, dessen wir schon in der vorigen Nr. 84 S. 328 erwähnt haben, und man kann daher ganz allgemein sagen:

Beim Maximalmomentenpunkt reducirt sich die Summe der ausserhalb desselben wirkenden Kräfte auf eine unendlich kleine und ferne Kraft, sie ändert hier ihr Zeichen, und ihre Mittellinie springt durchs Unendliche gehend, von einer Seite des Seilpolygons auf die andere hinüber.

In Anwendung auf einen belasteten Balken kann man auch sagen: der Maximalmomentenquerschnitt liegt da, wo das Gewicht des von ihm abgeschnittenen Balkenstückes gleich dem Gewicht ist, mit dem er das Widerlager belastet.

Das Maass der ausserhalb des Maximalmomentenquerschnitts wirkenden unendlich fernen Kraft ist demnach gleich dem Product des Auflagerdrucks mit der Entfernung zwischen ihm und der ihm gleichen Mittelkraft der am abgeschnittenen Balkenstück wirkenden Kräfte.

Ist speciell der Balken gleichförmig mit der Last p auf die Längeneinheit belastet, so fällt die Richtung sämmtlicher am Balken wirkenden Kräfte laut Nr. 79 S. 306 in die Mitte zwischen die Auflager, die Reactionen der Auflager sind daher gleich gross und der Maximalmomentenquerschnitt liegt ebenfalls in der Mitte zwischen den Auflagern.

Bezeichnen wir die Länge der von ihm abgeschnittenen gleichlangen Balkenstücke, d. h. die halbe Spannweite mit l, so ist der Auflagerdruck gleich der Summe der am abgeschnittenen Balkenstück wirkenden Kräfte gleich pl, die Entfernung der Mittelkraft dieser letztern vom Auflager ist gleich $\frac{1}{2}l$, und das Maximalmoment ist nach Obigem gleich $pl \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}pl^2$.

Endlich folgt noch aus einem Blick auf Fig. 145 S. 328, dass die Summe der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes z. B. y_1 wirkenden Kräfte gleich den Kräften ist, die zwischen diesem Punkt und dem Maximalmomentenpunkt angreifen; bei concentrirten Lasten, wie z. B. der Kraft 3 im vorliegenden Fall, hat man sich diese natürlich in zwei Theile durch den Punkt (AB) getheilt zu denken, wovon der eine dem Balkenstück diesseits, der andere dem jenseits des Maximalmomentenpunktes zuzutheilen ist. Die Kraft 2 mehr diesem Theil der Kraft 3, bildet also die Summe A_1 der ausserhalb des Querschnittes y_1 wirkenden Kräfte. Denkt man sich den Querschnitt y_1 fortschreitend, jedoch so, dass dabei keine Angriffspunkte von Kräften überschritten werden, so entspricht einer Aenderung der Lage um die Länge Δx (s. Fig. 144 S. 328) eine Aenderung des Momentes der ausserhalb wirkenden Kräfte von $\Delta x\,(A1)$, denn wo auch $A1$ bezüglich y_1 liege, so ändert sich, wenn keine neuen Kräfte hinzukommen, dessen Hebelarm um Δx. Setzt man daher für irgend einen Querschnitt die Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte $= P$ und ihr Moment $= \mathfrak{P}$, wo beide Buchstaben noch mit den Zeichen der Querschnitte und Kräfte versehen werden können, so hat man, weil dieses Moment auch gleich $H\,\Delta y_1$ ist, ganz allgemein

$$\frac{\Delta \mathfrak{P}}{\Delta x} = H \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = P.$$

Die Gleichung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{P}{H}$$

geht übrigens auch aus der Aehnlichkeit der Figuren hervor, welche diese Längen im Seil- und im Kräftepolygon bilden und ist identisch mit den Verhältnissen Nr. 4 S. 23.

Ganz dem oben Gesagten entsprechend wird $\mathfrak{P}$ ein Maximum, wenn

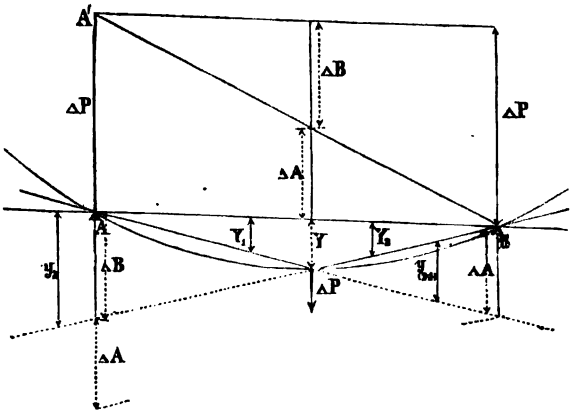
$$\frac{\Delta \mathfrak{P}}{\Delta x} = P = 0$$

ist, d. h. wenn die Summe der ausserhalb des Querschnittes wirkenden Kräfte $= 0$ ist oder, wie wir uns vorhin ausdrückten, wenn sie sich auf ein Kräftepaar reducirt.

86. Aenderung der Summe und des Momentes (P und $\mathfrak{P}$) der ausserhalb eines festen Querschnittes auf einen Balken wirkenden parallelen Kräfte durch weitere dazu kommende Kräfte.

Da die parallelen Kräfte und ihre Momente sich einfach addiren, so können wir eine jede zu den 4 Kräften (Fig. 144 S. 328) kommende Kraft für sich behandeln, ihre Wirkungen auf einen gegebenen Querschnitt untersuchen, und diese Wirkungen zu den vorhandenen Kräften addiren. Führt man daher die Constructionen in Fig. 153 für eine hinzugekommene Kraft ΔP genau Fig. 144 und 145 (S. 328) entsprechend aus, so vergrössern sich die Pressungen auf die Widerlager A und B direct um die Drücke ΔA und ΔB von Fig. 153, die Momentenordinaten werden sich eben-

Fig. 153.



falls um die entsprechenden y_1 y_2 und y_{24} ändern, und die entsprechenden Ordinaten in Fig. 144 würden um diese Ordinatendifferenzen grösser geworden sein, wenn ΔP gleich in den Verband mit hereingekommen wäre.

Da wir über die Grösse der Poldistanz H und die Lage des Kräftepolygons frei verfügen können, so wurde der Einfachheit wegen die Poldistanz gleich der Spannweite AB angenommen. Laut Nr. 84 S. 330 schneiden in diesem Fall die äusseren Polygonseiten auf den Verticalen A und B die Reactionen ΔB und ΔA

aus; werden daher auf denselben diese Reactionen so aufgetragen, dass sie sich zu ΔP ergänzen, so sind die Strahlen von A und B zwei Seilpolygonseiten, welche sich auf ΔP schneiden, und die Ordinate Y dieses Schnittes multiplicirt mit der Poldistanz $2l$, also $2lY$, ist das Moment der ausserhalb des Schnittes Y wirkenden Kräfte. Wir haben Y, nicht y geschrieben, um anzudeuten, dass nachdem $2l$ auf dem Maassstab der Längen abgegriffen wurde, Y auf dem der Kräfte abzugreifen sei. Der Ort dieser Schnitte ist eine Parabel, denn die Büschel A und B sind projectivisch, und nur die Strahlen nach den unendlich fernen Punkten der Verticalen laufen parallel, so dass die Curve mit der unendlich fernen Geraden nur einen Doppelpunkt gemein hat.

Projicirt man aus den Endpunkten des einen Strahles A z. B. die Strecken ΔA und ΔB mittelst Parallelen zum andern Strahl auf die Ordinate von Y und verschiebt dann dieses Gebilde so, dass der Strahl von A nach dem Endpunkt von ΔA in die Lage $A'B$ kommt, die beiden parallelen Projectionsstrahlen mit der Linie AB parallel laufen, so sieht man, dass die Gerade BA' der Ort aller ΔA ist, wenn diese auf Y aufwärts aufgetragen werden, die Ergänzung dieses ΔA zu ΔP auf der Parallelen zu AB ist, gleich ΔB.

Sowohl aus der Figur, als auch aus Nr. 54 S. 197 ergeben sich die Werthe von ΔA und ΔB:

$$\frac{\Delta A}{BY} = \frac{\Delta P}{AB} = \frac{\Delta B}{YA}.$$

Aus diesen Verhältnissen bestätigt sich, dass ΔA und ΔB negativ, $\Delta A + \Delta P + \Delta B = 0$, und dass, wenn die Construction im Sinne von Fig. 152 S. 335 geschnitten werde, die Summe der ausserhalb der Schnitte wirkenden Kräfte, für solche zwischen A und ΔP gleich ΔA also negativ, und für solche zwischen ΔP und $B = \Delta A + \Delta P = -\Delta B$ also positiv seien. ΔP übt demnach entgegengesetzte Wirkungen auf diese Summe aus, je nachdem es auf der einen oder auf der andern Seite des Schnittes angebracht wird. Ferner ergiebt sich aus obigen Verhältnissen das Moment $\Delta \mathfrak{P}$ der ausserhalb eines Querschnittes Y_1 wirkenden Kräfte für die Strecke AY:

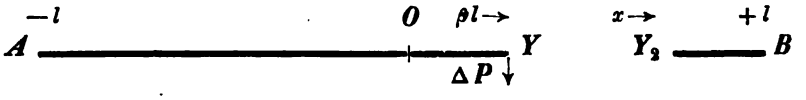
$$\Delta \mathfrak{P} = \frac{Y_1 A \,.\, BY}{AB} \,.\, \Delta P = \frac{AY_1 \,.\, YB}{AB} \,.\, \Delta P.$$

In gleicher Weise findet man dieses Moment für einen Querschnitt der Strecke YB:

$$\Delta \mathfrak{P} = \frac{AY \,.\, Y_2 B}{AB} \,.\, \Delta P.$$

Dieses Resultat lässt sich leicht durch die folgende Figur veranschaulichen:

Fig. 154.



Das Moment ist gleich dem durch stark ausgezogene Striche angedeuteten Product der ausserhalb der Last und des gegebenen Querschnitts liegenden Segmente der Spannweite, getheilt durch die ganze Spannweite AB.

Aus der Figur lässt sich auch ein sehr einfacher Ausdruck für das von ΔP herrührende Moment $\Delta \mathfrak{P}$ ableiten. Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen in der Mitte O an, und setzt man die Abscisse von ΔP gleich βl, die des Querschnitts, für welchen man das Moment sucht, $= x$, so ist für die Strecke $-l$ bis βl, die wir schlechtweg mit -1 und β bezeichnen wollen, und die Strecke β bis $+1$:

$$\Delta \mathfrak{P}_{-1}^{\beta} = {}^1/_2 (1 + \beta)(1 - \frac{x}{l})\, l\, \Delta P,$$

$$\Delta \mathfrak{P}_{\beta}^{+1} = {}^1/_2 (1 - \beta)(1 + \frac{x}{l})\, l\, \Delta P.$$

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen schliessen wir weiter: durch Aufbringen einer weitern Last zu vorhandenen Belastungen wird der Maximalmomentenpunkt dem Angriffspunkt dieser Last ΔP genähert, und zwar desto mehr, je näher ΔP bei dem Maximalmomentenpunkt liegt.

Denken wir uns z. B., es liege dieser Punkt zwischen Y und B, so ändert sich jenseits desselben durchaus nichts als B, das grösser wird; es muss daher nach Nr. 85 S. 337 das Balkenstück zwischen ihm und B länger werden, damit sein Gewicht so gross als der Druck auf das Widerlager bei B werde. Der Maximal-

momentenpunkt entfernt sich also von B und nähert sich Y, weil der Voraussetzung gemäss ΔP auf der entgegengesetzten Seite liegt und zwar um so mehr, je grösser B ist, je näher also ΔP an B, d. h. am Maximalmomentenpunkt angebracht wird, über den ΔP der Voraussetzung gemäss nicht hinaus darf.

Ist die Belastung eines Balkens eine gleichmässige, so findet die grösste Annäherung des Maximalmomentenpunktes an ein Widerlager dann statt, wenn zwischen diesen der Balken total belastet ist. Kann man diese gleichförmige Belastung stellenweise, z. B. durch die Stellung einer Locomotive im Zug vergrössern, so wird die Annäherung des Maximalpunktes an das Widerlager desto grösser sein, je näher die Locomotive zu jenem gestellt wird. Da nun jede Belastung jenseits dieses Punktes ihn wieder entfernt, so muss die Locomotive jedenfalls vorn zu ihm hingestellt werden, damit er sich dem Widerlager am meisten nähere.

Fährt also ein Zug auf eine Brücke, mit der Locomotive vorn, herein, so nähert sich der Maximalmomentenpunkt beständig der heranrückenden Locomotive, bis er von ihrem vordersten Rad erreicht wird; bei weiterem Vorrücken des Zuges entfernt er sich wieder vom ersten Widerlager und nähert sich dem andern, bis das letzte Wagenrad über ihm wegfährt und dann tritt er wieder mit fortrollendem Zug in seine ursprüngliche Lage zurück.

Die Summe P der ausserhalb eines beliebigen Querschnitts Y_1 (Fig. 144 und 153) wirkenden Kräfte wird vergrössert oder verkleinert, je nachdem eine Kraft jenseits oder diesseits dieses Querschnittes aufgebracht wird und zwar desto mehr, je mehr sich diese Kraft dem Querschnitt nähert.

Denn so eben haben wir nachgewiesen, dass ΔP entgegengesetzte Wirkung ausübe, je nachdem es auf der einen oder auf der andern Seite eines durch die Construction geführten Schnittes angebracht wurde; handelt es sich demnach um die Vergrösserung der negativen scheerenden Kräfte ausserhalb des Schnittes, so muss die Strecke zwischen ΔP und B möglichst belastet werden; handelt es sich aber um die Vergrösserung der positiven scheerenden Kräfte, so muss die Strecke zwischen A und ΔP möglichst belastet werden.

Da ferner diese Kräfte ΔA und ΔB, d. h. den Strecken AY

und YB proportional sind, so ist die Wirkung der ΔP desto grösser, je näher sie bei dem Schnitt angebracht werden.

Das obige Beispiel fortsetzend kann man daher sagen, dass für jeden Querschnitt die Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte $(+P)$ ein Maximum sei, wenn das vorderste Locomotivenrad eines von B kommenden Zuges den Querschnitt y_1 erreicht; dagegen ein Minimum sei ($-P$ absolut ein Maximum), wenn das vorderste Locomotivenrad eines von A herkommenden Zuges diesen Querschnitt erreicht.

Das Moment der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes y_1 (Fig. 144 und 153) wirkenden Kräfte wird durch jede innerhalb der Strecke AB zugefügte Kraft ΔP vergrössert und zwar um desto mehr, je mehr sich diese Kraft dem Querschnitt nähert.

Da diese Momente laut Nr. 85 S. 331 den Ordinaten des Seilpolygons in Bezug auf dessen Schlusslinie proportional sind und diese Ordinaten sich bei jedem Querschnitt in Fig. 144 um die Ordinaten von Fig. 152 vergrössern, so gilt diese Vergrösserung nothwendig auch von den Momenten. Dass übrigens diese Vergrösserung überall innerhalb AB das gleiche Zeichen habe, geht aus Fig. 152 daraus hervor, dass alle Ordinaten derselben Momentenfläche angehören, vergleiche Nr. 85 S. 334.

Ferner zeigt auch ein Blick auf dieselbe Figur, dass y_1 ein Maximum wird, wenn es mit ΔP zusammenfällt.

Wenden wir das eben Bewiesene noch auf das oben angeführte Beispiel an, so folgt, dass das Moment der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes wirkenden Kräfte dann ein Maximum sei, wenn die ganze Brücke belastet und die schwersten Lasten bei diesem Querschnitt concentrirt sind. Zwei mit ihren Kaminen gerade über dem in Frage stehenden Querschnitt zusammenstossende Locomotiven mit darauf folgenden Zügen bewirken daher das grösste Moment in demselben.

87. Analytische Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Wenn die Richtungslinien zusammenzusetzender Kräfte parallel laufen, so sind die Verhältnisse $a : b$ ihrer Coefficienten, demnach auch die Verhältnisse $\frac{a}{e}\omega'$ und $\frac{b}{e}\omega'$ für alle Richtungslinien

$$a_i = (ax + by + c_i)\,\frac{\omega'}{e},$$

constant, und nur die c_i variiren bei dem Uebergang von einer Linie zur andern. In der Summenformel können daher diese Verhältnisse als Factoren herausgenommen werden, und man erhält als Gleichung der Mittelkraft:

$$Ss = (ax + by)\,\frac{\omega'}{e}\,\Sigma A + \Sigma\,\frac{c\omega'}{e}\,A.$$

Da diese Gleichung durch Division mit ΣA auf die Normalform gebracht wird, so ist:

$$S = \Sigma A.$$

Ferner folgt aus obiger Gleichung, dass die Mittelkraft parallel mit allen Kräften laufe, und ihr Moment gleich der Momentensumme aller einzelnen Kräfte sei.

Für das Gleichgewicht zweier paralleler Kräfte gilt der allgemeine Satz Nr. 53 S. 193, dass die Richtungen zusammenfallen und die Kräfte entgegengesetzt gleich sein müssen. Für das Gleichgewicht dreier paralleler Kräfte ändert sich nichts an der Ableitung von Nr. 54 S. 197, man hat sich dabei unter a die Normalformen der Gleichungen zu denken.

Wenn parallele Kräfte ihre Richtung nicht ändern, so ist es am einfachsten, die Richtung der einen Axe, z. B. die der y parallel und die andere x senkrecht zur Richtung der Kräfte anzunehmen. Die Gleichung eines positiven ΔP, das an dem positiven Hebelsarm b wirkt, demnach positiv um den Ursprung herumdreht, ist gleich:

$$(b - x)\,\Delta P,$$

die Gleichung der Mittelkraft aller ΔP demnach gleich:

$$\Sigma\,(b - x)\,\Delta P = -\,x\Sigma\Delta P + \Sigma b\Delta P$$

erstreckt über alle vorhandene, zusammenzusetzende Kräfte. Diese Gleichung wird durch Division mit $\Sigma\Delta P$ auf die Normalform gebracht, demnach ist $\Sigma\Delta P$ die Grösse der Mittelkraft und die Abscisse ihres Angriffspunktes ist gleich:

$$x = \Sigma b\Delta P : \Sigma\Delta P.$$

Wirken die Kräfte an einem Balken, und soll das Gleichgewicht durch zwei Widerlagerreactionen A und A_1 hergestellt werden, die bei a und a_1 wirken, so ist:

$$0 = -\,x\,(A + \Sigma\Delta P + A_1) + aA + \Sigma b\Delta P + a_1 A_1.$$

Diese Gleichung kann für ein variables x nur bestehen, wenn man gleichzeitig hat:

$$0 = A + \Sigma\Delta P + A_1,$$
$$0 = aA + \Sigma b\Delta P + a_1 A_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun:

$$A = -\,\Sigma\,\frac{a_1 - b}{a_1 - a}\,\Delta P, \quad \text{und} \quad A_1 = -\,\Sigma\,\frac{b - a}{a_1 - a}\,\Delta P.$$

Führt man zwischen dem i und $i + 1$ten ΔP einen Schnitt so durch die Construction A, dass die ersten i Kräfte mit dem einen, die übrigen und A_1 mit dem andern Theil derselben in Verbindung stehen, und bezeichnet man die Gleichung

der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte, d. h. ihr Moment in Bezug auf den Punkt x mit $\mathfrak{P}$, so hat man, in Uebereinstimmung mit Nr. 86 S. 339:

$$\mathfrak{P} = (a - x)\,A + \sum_{a}^{i}(b - x)\,\Delta P = -(a_1 - x)\,A_1 - \sum_{i}^{a_1}(b - x)\,\Delta P$$

$$= \sum_{a}^{i}\frac{(b - a)\,(a_1 - x)}{a_1 - a}\,\Delta P + \sum_{i}^{a_1}\frac{(x - a)\,(a_1 - b)}{a_1 - a}\,\Delta P.$$

Die Summe P der ausserhalb des Schnittes i wirkenden Kräfte ergiebt sich direct, oder als Coefficient von $-x$ im eben entwickelten $\mathfrak{P}$:

$$P = A + \sum_{a}^{i}\Delta P = -A_1 - \sum_{i}^{a_1}\Delta P = \sum_{a}^{i}\frac{b - a}{a_1 - a}\,\Delta P - \sum_{i}^{a_1}\frac{a_1 - b}{a_1 - a}\,\Delta P.$$

Fasst man hierin P als $\Sigma\,\Delta P$ auf, so spielen, wie aus diesen letzten Gleichungen hervorgeht, A und A_1 die Rollen von Integrationsconstanten.

Setzt man die Spannweite gleich l, die Entfernungen der ΔP von den beiden Widerlagern $= b$ und b', und die Entfernungen des Momentenpunktes von denselben gleich x und x', so dass also

$$b + b' = x + x' = l$$

ist, und $b\,x$ entgegengesetzten Sinn als wie $b'\,x'$ haben, so vereinfachen sich obige Formeln wie folgt.

$$A = -\frac{1}{l}\sum_{o}^{l} b'\,\Delta P, \qquad A_1 = -\frac{1}{l}\sum_{o}^{l} b\,\Delta P,$$

$$P = A + \sum_{o}^{i}\Delta P = -A_1 - \sum_{i}^{l}\Delta P = \frac{1}{l}\left(\sum_{o}^{i} b\,\Delta P - \sum_{i}^{l} b'\,\Delta P\right),$$

$$\mathfrak{P} = -xA - \sum_{o}^{i}(x - b)\,\Delta P = -x'A_1 - \sum_{i}^{l}(x' - b')\,\Delta P$$

$$= \frac{x'}{l}\sum_{o}^{i} b\,\Delta P + \frac{x}{l}\sum_{i}^{l} b'\,\Delta P.$$

Handelt es sich um die Berechnung der Kräfte, die von einer festen Belastung z. B. vom Eigengewicht einer Brücke herrühren, so sind A und A_1 constant, und man rechnet am leichtesten nach einer der ersten Formeln. Sind aber die Belastungen veränderlich für verschiedene x, wenn sie z. B. von einem über eine Brücke wegrollenden Zug herrühren, so rechnet man besser nach der letzten directen Formel.

Ist nur die von einem einzigen ΔP herrührende Kraft zu bestimmen, so fällt in obigen Formeln immer eine Summe aus; lässt man ferner noch den Punkt, in Bezug auf welchen man das Moment bestimmen will, mit ΔP zusammenfallen, so hat man x und x' gleich b und b' zu setzen und man erhält:

$$P = A = -\frac{l - x}{l}\,\Delta P,$$

und

$$\mathfrak{P} = \frac{x\,x'}{l}\,\Delta P.$$

Trägt man in irgend einem Maassstab auf der Ordinate des treffenden Querschnitts diese Kraft und dieses Moment auf, so erhält man die gerade Linie und die Parabel von Fig. 153 S. 338.

Für symmetrische Balken und für gewisse analytische Ableitungen ist es zweckmässig, den Anfangspunkt der Abscissen in die Mitte der Oeffnung zu legen, Fig. 154 S. 340. Die Formeln verwandeln sich dann wie folgt:

$$A = -\tfrac{1}{2}\sum_{-1}^{+1}(1-\beta)\,\Delta P, \qquad A_1 = -\tfrac{1}{2}\Sigma\,(1+\beta)\,\Delta P,$$

$$P = A + \sum_{-1}^{i}\Delta P = -A_1 - \sum_{i}^{+1}\Delta P = \tfrac{1}{2}\sum_{-1}^{i}(1-\beta)\,\Delta P + \tfrac{1}{2}\sum_{i}^{+1}(1+\beta)\,\Delta P,$$

$$\mathfrak{P} = -(l+x)\,A + \tfrac{1}{2}\sum_{-1}^{i}(\beta - \frac{x}{l})\,l\Delta P = -(l-x)\,A_1 - \tfrac{1}{2}\sum_{i}^{+1}(\beta - \frac{x}{l})\,l\Delta P$$

$$= \tfrac{1}{2}(l-x)\sum_{-1}^{i}(1+\beta)\,\Delta P + \tfrac{1}{2}(l+x)\sum_{i}^{+1}(1-\beta)\,\Delta P.$$

Besteht die Belastung aus vertheilten Belastungen, deren Grösse p auf die Längeneinheit als Function von β gegeben ist, so hat man einfach $\Delta P = l\,p\,d\beta$ zu setzen, und statt zu summiren zu integriren.

Sind die Belastungen gleichförmig vertheilt, so kann man sich dieselbe in ihre Mitte concentrirt denken und hat demnach in obigen Formeln statt ΔP die ganze Belastung und statt βl die Abscisse der Mitte zu setzen und dann zu summiren.

Wenn diese gleichförmig vertheilten Belastungen durch ihre Grenzen b bis b_1 oder auch βl und $\beta_1 l$ gegeben, so ist statt ΔP, $(b_1 - b)\,p$ oder $(\beta_1 - \beta)\,lp$, statt $b\,\Delta P$, $(1+\beta)\,l\,\Delta P$ und $(1-\beta)\,l\,\Delta P$, und statt $\tfrac{1}{2}(b_1^2 - b^2)\,p$, $[1 + \tfrac{1}{2}(\beta+\beta_1)]\,(\beta_1-\beta)\,l^2p$ und $[1 - \tfrac{1}{2}(\beta+\beta_1)]\,(\beta_1-\beta)\,l^2p$ zu setzen, und alle diese einzelnen Gewichte und Momente zu summiren.

Die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fälle sind die, wo der Querschnitt i auch verschiedene Belastungen p und q pro Längeneinheit von einander trennt, und wo die ganze Oeffnung total belastet ist.

In diesem Fall reducirt sich die Zahl der einzelnen ΔP auf zwei; bezeichnet man die von den Widerlagern aus gemessenen Abscissen des Trennungspunktes mit b und b', des Momentenmittelpunktes mit x und x', und die ganze Spannweite mit l, so sind die ΔP gleich bp, $b'q$; und ihre Momente in Bezug auf die nächsten Widerlager gleich $\tfrac{1}{2}b^2p$, $\tfrac{1}{2}b'^2q$.

$$A = -\frac{1}{l}\,[(l - \tfrac{1}{2}b)\,bp + \tfrac{1}{2}b'^2q], \quad A_1 = -\frac{1}{l}\,[\tfrac{1}{2}b^2p + (l - \tfrac{1}{2}b')\,b'q],$$

$$P = \frac{1}{l}\,(\tfrac{1}{2}b^2p - \tfrac{1}{2}b'^2q),$$

$$\mathfrak{P} = \frac{x'}{2l}\,b^2p + \frac{x}{2l}\,b'^2q.$$

Legt man dagegen den Ursprung der Abscissen in die Mitte der Oeffnung, und bezeichnet die Abscisse des Trennungspunktes mit βl, des Momentenmittel-

punktes mit x und die halbe Spannweite, die Abscissen der Widerlager mit $\pm l$, so sind die ΔP gleich $(1+\beta)\,lp$ und $(1-\beta)\,lq$, und ihre Momente in Bezug auf die nächsten Widerlager $\frac{1}{2}(1+\beta)^2\,l^2\,p$ und $\frac{1}{2}(1-\beta)^2\,l^2\,q$, und man erhält:

$$A = -\tfrac{1}{4}(3-\beta)(1+\beta)\,lp - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,lq,$$
$$A_1 = -\tfrac{1}{4}(1+\beta)^2\,lp - \tfrac{1}{4}(3+\beta)(1-\beta)\,lq,$$
$$P = \tfrac{1}{4}(1+\beta)^2\,lp - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,lq,$$
$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{4}(l-x)(1+\beta)^2\,lp + \tfrac{1}{4}(l+x)(1-\beta)^2\,lq.$$

Ist der Balken seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet, so wird $p = q$, und man erhält für den Ursprung der Abscissen am Balkenende, wo jetzt b nur mehr die Abscisse des Schnittes, x wie früher die des Punktes bezeichnet in Bezug auf welchen man das Moment bestimmen will, l aber die ganze Spannweite bezeichnet:

$$A = A_1 = -\tfrac{1}{2}lp,$$
$$P = -(\tfrac{1}{2}l - b)\,p,$$
$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}(b^2 - 2bx + lx)\,p.$$

Nimmt man endlich auch in diesem Fall den Ursprung der Abscissen in der Mitte der Spannweite an, und bezeichnet mit βl die Abscissen des Schnittes, mit x die des Momentenmittelpunktes, mit $\pm l$ die der Widerlager, also auch die halbe Spannweite, so erhält man:

$$A = A_1 = -lp,$$
$$P = \beta lp,$$
$$\mathfrak{P} = (1 + \beta^2 - 2\beta\frac{x}{l})\,\tfrac{1}{2}l^2p.$$

88. Mitteldruck der Räder eines Locomotivenzuges.

Locomotivenzüge bilden die bedeutendste, und man darf beinahe auch sagen die häufigste Belastung der neuzuerbauenden Brücken, und gar häufig hat man den Locomotivzug als grösste zufällige Belastung zu berücksichtigen. Da frägt es sich nun vor Allem: wo liegt der Angriffspunkt des Mitteldrucks oder die Verticallinie durch den Schwerpunkt einer gewissen Anzahl Räder, die vor oder hinter einem gewissen Brückenquerschnitt stehen.

Da die zur Bestimmung dieses Angriffspunktes nothwendigen Operationen bekannt sind, so haben wir nichts weiter zu thun als sie an einem Beispiel zu erläutern.

Taf. 11_1 wurden die Verticalen des Mitteldrucks einer beliebigen Zahl aufeinanderfolgender Räder eines Engerth'schen Locomotivzuges bestimmt. Im Maassstab von 0,003 wurden die Rad-

stände der mit Tender 10,6 Meter langen Locomotiven auf einer Horizontalen am obern Blattrand aufgetragen, und von 1 bis 35 numerirt; die Blattlänge reichte für 7 Locomotiven aus. Die vier ersten Locomotiven fahren nach rechts, die drei letzten nach links, so dass sie zwischen dem 20. und 21. Rad mit ihren Kaminen gegeneinanderstossen. Unter diesen und nächstliegenden Rädern werden später die Maximalmomente gefunden werden. Auf den hier nicht ausgezogenen Verticalen durch diese Radaxen liegen die Ecken des Polygons.

Die Belastungen pro Radaxe wurden auf der Verticalen am linken Blattrand im Maassstab von $0^m,003$ pro 10 Tonnen aufgetragen und zwar 13 Tn. für jedes der 3 ersten Locomotivräder und 8,5 Tn. für jedes der beiden letzten Tenderräder. Alle Belastungen tragen natürlich die Nummer des entsprechenden Rades.

Der horizontal gemessene Abstand des Poles von der Verticallinie der Kräfte wurde zu 0,06 Meter angenommen und bezeichnet daher eine Länge von 20 Meter oder ein Gewicht von 200 Tonnen, je nachdem man etwa die Momente als Gewichte oder als Hebelarme ablesen will.

Durch Verlängerung zweier beliebiger Polygonseiten erhält man in ihrem Schnitt einen Punkt des Mitteldrucks der zwischen ihnen liegenden Räder. Meistens wird die Entfernung dieses Druckes vom ersten Rad des Zuges gebraucht, Taf. 11_1 ist das Rad Nr. 20 das erste, und es ist gezeigt, wo die Entfernungen des Mitteldrucks aller vorausgehenden, und die aller folgenden Räder von diesem 20. Rad abgegriffen werden können.

Da in dieser Figur die Schnitte naher Polygonseiten etwas undeutlich sind, so wurde Taf. 11_2 dasselbe, aber nur 2 Locomotiven umfassende Polygon im doppelten Maassstab und mit einem Horizontalschub von nur 50 Tonnen = 5 Meter construirt.

Endlich wurde noch als Beispiel eines leichten Zuges dieselbe Operation mit Personenzug-Locomotiven Taf. 11_3 wiederholt.

Die Belastungen der Radaxen sind $4^1/_2$, $10,_8$, $2,_7$, 4, 4, 4 Tonnen, und die Totallänge der Locomotive mit Tender 12,6 Meter.

89. Moment eines Locomotivenzuges in Bezug auf den Querschnitt eines belasteten Balkens.

Die Polygone (Taf. 11) dienen hauptsächlich dazu, die Momente der zufälligen Belastung zur Anschauung zu bringen, und die für eine bestimmte Spannweite ungünstigste Belastungsart durch Verschieben des Zuges zu bestimmen.

So lange die Belastungen keine regelmässigen durch irgend ein Gesetz ausdrückbaren sind, lassen sich natürlich keine bestimmten Regeln über dieses Verschieben geben; man wird nicht im Stande sein von vornherein zu sagen: der und der Spannweite entspricht die und die ungünstigste Stellung des Zuges; man wird probiren müssen. Hierbei werden vielleicht aber die folgenden Betrachtungen, namentlich bei kleineren Spannweiten, von einigem Nutzen sein.

Werden auf irgend einem der Seilpolygone (Taf. 11) zwei Punkte durch eine Gerade mit einander verbunden, deren horizontale parallel mit dem Horizontalschub gemessene Länge gleich einer gegebenen Spannweite ist, so sind die Ordinaten dieses Polygons in Bezug auf diese Linie laut Nr. 85 (S. 331) dem Moment der ausserhalb derselben wirkenden Kräfte proportional, sie müssen als Längen noch mit dem Horizontalschub als Kraft multiplicirt werden, um das Moment zu geben; man kann diese Momente selbst direct abgreifen, wenn man den Maassstab selbst mit dem Horizontalschub multiplicirt. In Taf. 11_1 und 11_3 sind also 0,003 Meter gleich 200 Metertonnen, in Taf. 11_2 dagegen 0,006 gleich 50 Mtn.

Verschiebt man nun eine und dieselbe Spannweite $BB_,$ (Taf. 11_3) als Sehne auf dem Polygon, so dass ihre Endpunkte horizontal gemessen immer gleich weit abstehen: so werden diese Sehnen eine Parabel $TT_„ OT_,$ umhüllen, so lange sie sich auf dieselben zwei Polygonseiten stützen, weil ihre Endpunkte ähnliche Gebilde in diesen Leitseiten des Polygons beschreiben; und bestimmte feste Punkte $T_„$ dieser Spannweiten oder Sehnen werden sich in Tangenten $BB_,$ an diese Parabeln bewegen, weil alle Tangenten sich gegenseitig in ähnliche Gebilde theilen. Die verticalen Entfernungen $ET_„$ dieser Parabeln von den Polygonseiten und Ecken stellen die Maximalmomente dar, welche unter

einem Punkt E des Polygons hervorgebracht werden können, denn da die Parabel als Umhüllungscurve alle Sehnen ausschliesst, so kann keine, die das Moment darstellende Ordinate ET_n jenseits T_n schneiden. Die Maximalordinate E, aber, über der Sehne BB, stellt das Maximalmoment dar, welchem derjenige feste Punkt T_n ausgesetzt sein kann, welcher die Tangente BB, beschreibt.

Endlich stellt der grösste verticale Abstand zwischen der Parabel und dem Polygon das Maximalmoment dar, dem überhaupt eine Spannweite BB, ausgesetzt sein kann. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass die beiden letzten Maxima nur unter den Ecken des Polygons vorkommen können.

Die hier erwähnten Maxima zeigen sich sofort beim ersten Blick, sobald die Parabel TT_nOT, construirt ist; da aber das Zeichnen derselben immerhin etwas umständlich ist, so müssen wir diese Maxima direct zu construiren suchen.

Bei gegebener Spannweite BB_1, horizontal gemessen, erhält man leicht den in einer bestimmten Verticalen E liegenden Punkt T_n der Parabel, und die dazu gehörige Sehnenlage BB_1, wenn man berücksichtigt, dass die Mitte O, der letztern, immer mitten zwischen den durch den gegebenen und den durch den Schnittpunkt S der Leitpolygonseiten gehenden Verticalen, welche letztere die Richtung des Mitteldrucks der auf BB, ruhenden Lasten bezeichnet, liegt. Denn zieht man die Mitteltangente AA_1, deren Endpunkte gleichweit von O abstehen, so schneidet sie alle andern Tangenten, mithin auch BB, in der Mitte O_1. Als Schnitt von Tangenten liegt diese Mitte O_1 aber auch mitten zwischen den verticalen Durchmessern durch die Berührungspunkte T_n und O.

Sind die horizontalen Abstände BT_nB, gegeben, so dient das eben Entwickelte auch dazu, die Lage der Tangente BB, zu bestimmen, in der sich der feste Punkt T_n bewegt, denn da BB, und OT_n von O gehälftet wird, so erhält man die Lage der Punkte B und B_1, wenn man die Horizontalabstände BO und OB, den Abständen T_nB, und BT_n gleich macht.

Die grösste Ordinate einer Polygonecke E, bezeichnet nun das Maximalmoment, das im Querschnitt T_n erzeugt werden kann, allein es ist klar, dass dies nicht in der Lage BB, stattfindet, sondern dann, wenn T_n unter E, liegt.

Ist endlich die Lage des Endpunktes B und E gegeben, was dann der Fall ist, wenn neue Räder in die Oeffnung eintreten, so

erhält man die Lage des andern Endpunktes dadurch, dass man den Horizontalabstand SB, gleich BE macht.

Wir könnten jetzt die Maximalmomente direct construiren, wenn nur die Ecke E, bekannt wäre, bei der diese Maxima stattfinden. Diese lässt sich nun von vornherein nicht bestimmen, doch wird sie bei einer gleichartigen Belastung durch eine Reihe gleich schwerer aufeinander folgender Locomotiven oder Räder, meist eine dem Mitteldruck der Belastung S zunächst liegende Ecke sein. Eine Ausnahme hiervon wird nur dann stattfinden können, wenn die Belastung eine ungleichartige ist, wenn z. B. auf eine Reihe Locomotivräder eine Reihe weniger belasteter Wagenräder folgt: dann wäre es möglich, dass die schwereren Locomotivräder sich länger als die Verticale des Mitteldrucks über der Maximalmomenten-Ordinate erhielten. Denn so lange die Belastung eine gleichartige ist, wird das Polygon so parabelartig sein, dass alle Seiten, welche zwischen den gleichen Rädern liegen, Parabeln umhüllen; dann wird der der Mitte S zunächst liegende äussere Polygonwinkel E, immer die Richtungen (nicht die Lage) der Mitteltangenten, also auch die der mit ihnen parallel laufenden Sehnen, auf welche die Momente bezogen werden, enthalten, mithin die Maximalordinate bestimmen.

Ist dagegen die Belastung eine ungleichartige, so wird das sie darstellende Polygon einer Parabel gegenüber, die in denselben Winkel der äussersten Seiten einbeschrieben wäre, verschoben erscheinen. Die der leichteren Belastung entsprechende Hälfte wäre flacher, die der schwereren Belastung entsprechende hohler als die Parabel; diese und das Polygon schneiden sich also, erscheinen gegenseitig verschoben, bilden ein Herz und ihre Scheitel liegen weit auseinander. Der Scheitel der Parabel aber liegt in der Verticalen des Mitteldrucks, der des Polygons bezeichnet die Maximalordinate, mithin ist es möglich, dass dann die dem Maximalmoment entsprechende Ecke nicht mehr die der Verticalen des Mitteldrucks zunächst liegende ist.

Dieses Verhältniss findet übrigens bei keinem der Taf. 11 verzeichneten Polygone statt, trotzdem dass die Locomotivräder schwerer belastet und näher beisammen stehen als die darauffolgenden Tenderräder.

Sollte es aber bei einer gegebenen Belastung stattfinden, so kann die Ecke des Maximalmomentes nur durch Probiren bestimmt

werden, was übrigens so leicht und schnell ausführbar ist, dass wir nicht weiter darauf einzugehen brauchen.

Uebersetzen wir das bisher graphisch Entwickelte in die Sprache der Wirklichkeit, so können wir uns zusammenfassend also ausdrücken:

Bei Belastung eines Balkens durch Räder (auf Punkte concentrirte Belastungen) liegt der Maximalmomenten-Querschnitt des Balkens immer unter einem Rad.

In der Regel ist es das dem Mitteldruck zunächst liegende Rad.

Bei ungünstigster Belastung stehen dieser Mitteldruck und dieses Rad gleichweit von der Balkenmitte ab.

Bei ungünstigster Belastung eines bestimmten Querschnitts steht auch über diesem ein Rad; das Rad kann dadurch bestimmt werden, dass man den Zug so auf den Balken stellt, dass der Querschnitt und die Richtung des Mitteldrucks gleichweit von der Balkenmitte abstehen, das Rad, unter dem nun das Moment ein Maximum ist, ist dasjenige, das über den gegebenen Querschnitt gerollt werden muss, damit auch in diesem das Moment ein Maximum sei. Hierbei darf natürlich kein Rad über die Oeffnung hinaustreten.

Das eben Ausgesprochene kann als Ergänzung des Nr. 86 S. 341 Gesagten betrachtet werden. Dem dort über das Maximum der ausserhalb eines bestimmten Querschnitts wirkenden Kräfte selbst Gesagten haben wir hier noch nichts beizufügen.

90. Ungünstigste Stellung eines Locomotivenzuges auf Balken verschiedener Spannweite.

Wir sind jetzt im Stande, die ungünstigste Lage des Zuges bei verschiedenen Spannweiten darzustellen. Es geschah dies Taf. 11_2 für kleine Oeffnungen.

Die das Maximalmoment darstellende Ordinate r, welche also das Rad bezeichnet, unter dem dies stattfindet, ist je zwischen zwei Grenzöffnungen ausgezogen, die Lage der Balkenmitte ist — · — · — · — irt.

Nach Obigem liegt diese Mitte immer mitten zwischen dem Rad r und der Verticalen durch den Schnitt der äussersten zur Belastung gehörigen Polygonseiten, welche die Richtung des Mitteldruckes der Belastung bezeichnet. Da wo die Verticalen r und m zusammenfallen, ist r allein ausgezogen. m und mitunter auch r ändern ihre Lagen, wenn neue Räder auf den Balken rollen. Also kann dann eine und dieselbe Spannweite ebenfalls verschiedene Lagen haben, je nachdem man das weitere Rad dazu nimmt oder auslässt, weil in beiden Fällen die Balkenmitte in zwei verschiedenen m liegt. Zwei also verschiedene Lagen der Sehnen können als Grenzlagen betrachtet werden; sie wurden Taf. 11_2 auf verschiedene Weise eingezeichnet.

Mit den kleinsten Oeffnungen beginnend wurden bei dem Eintreten der Räder 3 und 4 als Ende der einen Spannweite diese Räder selbst angenommen.

Bei dem Eintreten neuer Räder kann sich die Lage der Mitte einer Spannweite ändern; die Mitte aller Spannweiten, die kleiner sind als wie die doppelte Entfernung des eintretenden Rades von der Mitte der kleinern Spannweiten muss entschieden auf diese gelegt werden; die Mitte aller Spannweiten, die grösser sind als wie die doppelte Entfernung des Rades von der Mitte der grössern Spannweite, entschieden auf diese letztere. Die Mitte der Spannweiten, welche zwischen diesen liegen, können entweder auf die Mittellinie der grössern oder auf die der kleinern gelegt werden. Taf. 11_2 wurde die Mitte der mitten zwischen ihnen liegenden Spannweite für das eintretende 4. Rad der zweiten Locomotive einmal auf die Mitte der vorausgehenden und einmal auf die Mitte der folgenden Spannweiten gelegt und in beiden Fällen innerhalb der Grenzen der Genauigkeit, mit der gezeichnet werden kann, das gleiche Moment erhalten. Es können daher diese zwei Lagen der mittleren Spannweiten als die Grenzlagen für grössere und für kleinere Spannweiten betrachtet werden. Bei dem Eintreten des dritten Rades der zweiten Locomotive wurde diese mittlere Spannweite nur einmal eingezeichnet, und zwar mit ihrer Mitte in M mitten zwischen den Mitten der grössern und der kleinern Spann-

weiten. Ueberall wo die Mitte sich ändert bei sich ändernder Spannweite wurde die Grenzlage auf diese Weise eingezeichnet.

Bei dem Eintreten des ersten Rades der zweiten Locomotive zeigte sich, dass gleichzeitig mit ihm auch das zweite Rad eintritt. Als Grenzlage wurde für diesen Fall die mittlere Spannweite zwischen den äussersten Längen in der mittleren Lage eingezeichnet.

Giebt man einem kürzern Brückenträger einen constanten Querschnitt, so kann man nun das Maximalmoment, dem derselbe unter der Belastung eines *Engerth*'schen Locomotivzuges zu widerstehen hat, unmittelbar aus Taf. 11_2 abgreifen, nachdem man für eine Spannweite von 8 Meter z. B. die also bezeichnete Linie eingezogen hat, deren Endpunkte 8 Meter weit von einander abstehen und deren Mitte in m liegt. Die durch r angedeutete Ordinate des Eckpunktes 2 misst (auf einer Zeichnung im doppelten Maassstab abgegriffen) 14,2 Tonnen oder 1,42 Meter. Da nun der Horizontalschub 5 Meter oder 50 Tonnen beträgt, so ist das Maximalmoment gleich 71 Metertonnen.

Zieht man durch den Pol des Kräftepolygons eine Parallele zur Sehne 8 Meter (der Schlusslinie des Seilpolygons), so theilt sie die Totalbelastung 1 2 3 4 in die Reactionen der beiden Widerlager $22^1/_4$ und $25^1/_4$ Tonnen.

Sehr häufig vergleicht man das Maximalmoment dem eines gleichförmig belasteten Balkens; es geschieht dies hauptsächlich, um leicht nach der Formel $^1/_2 p l^2$ das Moment berechnen zu können. Bei graphischen Methoden bedarf man natürlich dessen nicht, weil man viel schneller zum Moment selbst gelangt, doch haben wir Taf. 11_2 den Vergleich noch durchgeführt. Da die Parabel Nr. 79 S. 306 die Curve der gleichförmigen Belastung ist und bei der Parabel die *subtg* gleich der doppelten Abscisse ist, so gelangt man leicht zur Richtung der Tangenten $p\ p$ einer über 8 Meter gespannten Parabel, deren Maximalordinate gleich der Ordinate der Polygonecke 2 ist, wenn man über der Mitte m der 8 Meter diese doppelte Ordinate aufträgt und ihren Endpunkt mit den Enden der Sehnen durch p und p verbindet. Zieht man nun durch den Pol des Kräftepolygons zwei Parallele zu diesen Endtangenten, so schneiden sie auf der Verticalen der Kräfte die Belastung ab, welche gleichförmig über 8 Meter vertheilt, ein eben so grosses Maximalmoment als die Locomotive verursacht. Indem

wir diese Last im Verhältniss von 8:10 oder 0,04 Meter: 0,05 Meter, wie es in der Figur angedeutet ist, vergrössern, so erhalten wir 88 Tonnen als ebenso intensive Belastung für 10 Meter. Die gleichförmige Belastung beträgt also, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, 8,8 Tonnen pro lfm. In der That giebt auch diese gleichförmig vertheilte Belastung laut Nr. 85 S. 336 ein Maximalmoment von $^1/_2 . 8{,}8^1 . 4^2 = 70{,}4$ Mtn., während wir weiter oben 71 Mtn. gefunden hatten.

Bei Trägern aus schweren Materialien, Eisen oder Stahl, wo der Querschnitt des Balkens den ausserhalb wirkenden angepasst wird, genügt es nicht mehr, nur das Maximalmoment überhaupt zu kennen, sondern man muss es für verschiedene Querschnitte bestimmen. Es geschah dies Taf. 11_4, wo für Spannweiten von 2 bis 10 Meter die Momentencurven mittelst Taf. 11_2 gezeichnet wurden. Dass sich über die Form dieser Curven nichts Allgemeines sagen lässt, dass einige derselben im Scheitel überhöht, andere dort gedrückt erscheinen, geht aus den Rechnungen der nächsten Nummer, deren Resultate für die kleineren Spannweiten von 2 3 4 Met. in verzerrtem Maassstab Taf. 11_4 aufgetragen wurden, hervor.

Bei Fachwerken braucht man diese Momente nur für die einzelnen Knotenpunkte. Um zu zeigen, wie diese Momente sich von Knotenpunkt zu Knotenpunkt ändern, wurden Taf. 11_4 die Wege eingezeichnet, welche die 9 äquidistanten Knotenpunkte einer Spannweite von 40 Met. beschreiben, wenn man sie über das Polygon des Locomotivenzuges gleiten lässt.

Links vom 20. Rad sind die gebrochenen Linien gezeichnet, welche von den 4 ersten, rechts die, welche von den 4 letzten Knotenpunkten beschrieben werden. Die innerste Linie wird von der Mitte beschrieben. Die Lage des Balkens selbst ist 3 Mal angedeutet.

Die verticalen Abstände dieser Linien von dem Seilpolygon geben die Momente in den verschiedenen Lagen des Zuges an.

Schon ein Blick auf diese Zeichnung lässt erkennen, dass die Maxima der Momente bei einem der drei ersten Räder der zusammenstossenden Locomotiven, also bei einem der Räder 18—23, vorkommen, indem der Linienbüschel, den die Wege bilden, bei diesen Rädern anschwellt. Durch Probiren mit dem Zirkel aber findet man leicht die Maximalmomente heraus, welche auf jeder

Curve durch ein m ausgezeichnet ist. Auch sieht man, ganz dem früher Gesagten entsprechend, sofort, dass die Maxima überhaupt nur unter einem der schwerbelasteten Locomotivräder vorkommen können; da die Unregelmässigkeiten in der Krümmung der verschiedenen Curven gegen den Knotenpunkt der Mitte hin abnehmen, so können die Einsenkungen im Seilpolygon nie durch die der innern Polygone ausgeglichen werden. Die grössten Verticalabstände zwischen den verschiedenen Polygonen werden daher immer den Einsenkungen des Seilpolygons bei den am meisten belasteten Rädern entsprechen.

Die für jeden Knotenpunkt gefundenen Maxima wurden nochmals über einer Spannweite aufgetragen, und so die Curve der Maximalmomente gebildet, womit der Zweck der Construction erreicht ist.

Um zu zeigen, wie sich diese Momente einer *Engerth*'schen Locomotive zu denen einer leichten Personenzuglocomotive verhalten, wurden auch Taf. 11_3 dieselben Constructionen für eine Spannweite von 40 Metern noch einmal wiederholt.

Nach Nr. 84 S. 329 können diese Polygone Taf. 11 auch dazu dienen, die von der zufälligen Belastung herrührenden scheerenden Kräfte zu bestimmen. Verschiebt man eine Spannweite, deren Länge gleich der auf dem Maassstab der Längen abgegriffenen Poldistanz, also für Taf. 11_1 und 11_3 gleich 20 Meter ist, so, dass ein beliebiger Knotenpunkt ε über den Endpunkt des Zuges, hier das 20. Rad, das eine Ende der Spannweite auf das Polygon nach γ und das andere Ende auf die letzte Polygonseite nach δ zu liegen kommt, so ist S_γ auf dem Maassstab der Kräfte abgegriffen das Maximum der scheerenden Kraft, das bei ε durch den Zug hervorgebracht werden kann. Ist die Spannweite nicht gleich der Poldistanz, so müssen diese Kräfte S im Verhältniss der Poldistanz zur Spannweite vermindert werden. Für jede Spannweite also sind die scheerenden Kräfte den Verticallinien S proportional.

91. Analytische Berechnung der Momente paralleler Kräfte.

Als Anwendung der in Nr. 87 entwickelten Formeln wollen wir die in der vorigen Nummer graphisch bestimmten Momente und Kräfte auch rechnen. Wir beschränken uns dabei auf die Berechnung der, durch die Belastung mit einer

Engerth'schen Locomotive, Taf. 11_1 und 11_2, an Balken von verschiedener Spannweite hervorgebrachten Kräfte und Momente. — Wir beginnen mit den Momenten bei kleinen Spannweiten.

Bei einer Spannweite von 1 Met. zwischen den Mittelreactionen der Widerlager kann höchstens nur ein Rad von 13 Tonnen über dem Querschnitt angebracht werden, für den man das Maximalmoment bestimmen will, weil die kleinste Entfernung der Räder gleich 1,1 Met. ist. In diesem Fall ist also das Moment für alle Punkte des Querschnitts laut Nr. 87 S. 344 durch die Gleichung:

$$\mathfrak{P} = {}^1/_4\,(1 - x)\,x \,.\, 13 = {}^1/_4 \,.\, 13 - ({}^1/_2 - x)^2\, 13$$

ausgedrückt. Dieses Moment wird ein Maximum für $x = {}^1/_2$, nämlich gleich ${}^1/_4 \,.\, 13 = 3{,}25$ Mtn. Trägt man die Momente als Ordinaten über den Abscissen x auf, so ist die Curve Nr. 86 S. 338 entsprechend eine Parabel, welche ihren Scheitel in der Mitte der Oeffnung hat.

Verschiebt man auf einer Oeffnung von 2 Met. Spannweite die zwei Locomotivräder, welche 1,1 Met. weit auseinander stehen, so können alle zwei auf den Balken stehen, wenn das eine derselben nicht über einen Querschnitt der mittleren 0,2 Met. langen Strecke zu stehen kommen soll. Für Querschnitte von $x = 0$ bis 0,9 stehen daher zwei Räder auf dem Balken, das eine bei x, das andere bei $x + 1{,}1$. Für Querschnitte von $x = 0{,}9$ bis 1 steht nur ein Rad von 13 Tonnen bei x. Die Momente für diese beiden Strecken sind demnach:

$$\mathfrak{P}_0^{0,9} = {}^1/_2 \,.\, 13\,(2 - x + 2 - x - 1{,}1)\,x = 13\,(1{,}45 - x)\,x$$
$$= 6{,}8331 - 13\,(0{,}725 - x)^2,$$

$$\mathfrak{P}_{0,9}^{1} = {}^1/_2 \,.\, 13\,(2 - x)\,x = 6{,}5 - 6{,}5\,(1 - x)^2.$$

Aus diesen Momentengleichungen geht hervor, dass die Momente zunächst zunehmen bis zur Abscisse $x = 0{,}725$, wo der Scheitel der Parabel liegt, welche die Momente für die erste Strecke 0 bis 0,9 darstellt; die Momentenordinate daselbst ist gleich 6,8331. Von hier an nehmen die Momente wieder ab bis zur Grenzabscisse 0,9, für welche die beiden Gleichungen die Momentenordinate $\mathfrak{P} = 6{,}435$ geben. Hierauf nimmt das Moment wieder bis zur Mitte bei $x = 1$ zu, wo es gleich $\mathfrak{P} = 6{,}5$ ist.

Dieses eigenthümliche Verhältniss wurde Taf. 11_4 durch die Parabeln in verzerrtem Maassstab dargestellt, welche diesen Gleichungen entsprechen. Man sieht, dass in diesem Fall das Maximalmoment nicht in der Mitte, sondern seitwärts bei der Abscisse 0,725 liegt. In dem Maassstab, in welchem die Momente in der vorigen Nummer construirt wurden, ist dieses Herz nicht zu bemerken gewesen, immerhin erscheinen in Folge desselben die für kleine Spannweiten construirten Momentencurven mehr kreis- als wie parabelsegmentartig.

In ähnlicher Weise weiter vorgehend erhält man die Momentengleichungen für 3 Met. Spannweite:

$$\mathfrak{P}_0^{0,8} = {}^1/_2 \,.\, 13\,(3 - x + 3 - x - 1{,}1 + 3 - x - 2{,}2)\,x = 13\,(1{,}9 - x)\,x$$
$$= 11{,}7325 - 13\,(0{,}95 - x)^2,$$

$$\mathfrak{P}^{1,1}_{0,8} = {}^1/_3 \,.\, 13\,(3 - x + 3 - x - 1,1)\,x = {}^2/_3 \,.\, 13\,(2,45 - x)\,x$$
$$= 13,0054 - {}^2/_3 \,.\, 13\,(1,225 - x)^2,$$

$$\mathfrak{P}^{1,5}_{1,1} = {}^1/_3 \,.\, 13\,[(x-1,1)(3-x) + (3-x)x + (3-x-1,1)x] = 13\,(-x^2+3x-1,1)$$
$$= 14,95 - 13\,(1,5 - x)^2.$$

Für die Grenzen erhält man für $x = 0,8$ und $1,1$

$$\mathfrak{P}_{0,8} = 11,44, \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{1,1} = 12,87.$$

Diese Spannweite bietet nichts Besonderes dar, dagegen ist die Spannweite von 4 m. nicht ohne einiges Interesse; für $1,1 < x < 1,7$ lassen sich die Räder auf zwei verschiedene Weisen disponiren, nämlich bei:

$(x - 1,1)$, x, $x + 1,1$ 13 Tonnen und bei $x + 2,3$ 8,5 Tonnen,

oder bei:

x, $x + 1,1$ und $x + 2,2$ 13 Tonnen.

Anfangs giebt die erste Disposition später die letztere grössere Momente, und nur dadurch, dass man die beiden Momentengleichungen einander gleich setzt, kann man die Grenze zwischen den beiden Belastungsarten bestimmen, sie ist bei $x = 1,2168$. Wenn man die Parabeln von $\mathfrak{P}$ für beide Belastungsarten aufträgt, so ist dieses x die Abscisse der Schnittpunkte der beiden Parabeln. Mit Berücksichtigung dieses Verhältnisses sind die Momentengleichungen:

$$\mathfrak{P}^{0,6}_{0} = {}^1/_4[(4-x+2,9-x+1,8-x)\,13 + (0,6-x)\,8,5]\,x = {}^1/_4\,(118,2-47,5\,x)\,x$$
$$= 18,383 - 11,875\,(1,244 - x)^2,$$

$$\mathfrak{P}^{1,2168}_{0,6} = {}^3/_4 \,.\, 13\,(2,9 - x)\,x = 20,499 - 9,75\,(1,45 - x)^2,$$

$$\mathfrak{P}^{1,7}_{1,2168} = {}^1/_4\,[13\,(x-1,1)(4-x) + 13\,(4-x)x + 13\,(2,9-x)x + 8,5\,(1,7-x)x]$$
$$= {}^1/_4\,(-57,2 + 170,45\,x - 47,5\,x^2) = 23,928 - 11,875\,(1,794 - x)^2,$$

$$\mathfrak{P}^{2}_{1,7} = {}^1/_4 \,.\, 13\,[(x-1,1)(4-x) + (4-x)x + (2,9-x)x] = {}^1/_4 \,.\, 13(-4,4 + 12x - 3x^2)$$
$$= 24,7 - 9,75\,(2 - x)^2.$$

Für die Abscissen der Grenzen geben je zwei dieser Gleichungen die gleichen Momente, nämlich für:

$x = 0,6$, $\mathfrak{P} = 13,455$,
$x = 1,2168$, $\mathfrak{P} = 19,969$,
$x = 1,7$, $\mathfrak{P} = 23,823$,
$x = 2$, $\mathfrak{P} = 24,7$.

Auch diese Parabeln wurden Taf. 11_4 dargestellt; es geht aus dem Vergleich derselben hervor, dass sich durchaus keine allgemeinen Regeln über den Verlauf der Maximalmomentencurven aufstellen lassen. Während bei Spannweiten, die so klein sind, dass nur ein einziges Rad auf ihr Platz hat wie bei der von 1 Meter, die Maximalmomentencurve eine regelmässige Parabel ist, ist der Scheitel der Maximalmomentencurve von 2 Met. Spannweite eingedrückt, innerhalb der Strecke, wo

nur ein einziges Rad auf dem Balken Platz findet. Dagegen ist er überhöht bei der Curve von 3 Meter Spannweite; bei dieser haben immer nur 3 Räder auf dem Balken Platz, für die Mittelstrecke aber sind es die drei schwersten Räder, und deshalb findet Ueberhöhung statt. Seitlich giebt es weiter noch Punkte in den einspringenden Ecken der Parabeln, wo die Maximalmomente der Parabeln relativ klein sind, und andere, wo sie relativ gross sind. Allein schon bei 4 Meter Spannweite gleichen sich diese Unregelmässigkeiten ziemlich aus, und bei noch grösserer verschwinden sie der Zeichnung, so dass man rechnen muss, um sie zu finden.

Zum Schluss wollen wir noch die Momente für die Knotenpunkte einer grösseren Spannweite von 40 Met. berechnen. Es sind dieselben Momente, welche Taf. 11_1 graphisch bestimmt worden sind. Es wurde dort einfach mit dem Zirkel probirt, unter welchem Rad das Maximalmoment liege. Bei der Rechnung der Momente lässt sich, ohne das Moment selbst zu berechnen, auf einfache Weise ermitteln, ob es unter einem bestimmten Rad ΔP_2 ein Maximum sei oder nicht; bezeichnet man mit P_1 die Summe der Gewichte aller vorausgehenden, mit P_3 die Summe der Gewichte aller folgenden Räder, ferner mit b_2 und b'_2 die Entfernungen des Rades ΔP_2 von den beiden Enden der Spannweite, mit b_1, b'_1 und b_3, b'_3 die Entfernungen der Schwerpunkte der Rädergruppen P_1 und P_3 von den Enden, so ist laut Nr. 86 S. 344 das von diesen Lasten herrührende Moment in Bezug auf den Querschnitt b_2, b'_2 gleich:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{l}\,(b_1\,b'_2\,P_1 + b_2\,b'_2\,\Delta P_2 + b_2\,b'_3\,P_3).$$

Rückt man jetzt das ganze Belastungssystem um Δb vorwärts, hält aber den Querschnitt bei b_2 fest, so vergrössert sich b_1 um Δb, während sich die b'_2 und b'_3, welche Factoren von ΔP_2 und P_3 sind, um ebensoviel vermindern, es ist also:

$$\frac{l\,\Delta\mathfrak{M}}{\Delta b} = b'_2\,P_1 - b_2\,(\Delta P_2 + P_3).$$

Wird dagegen das ganze Belastungssystem zurückgerückt, so vermindern sich die b_1 und b_2, welche Factoren von P_1 und ΔP_2 sind, während b'_3 sich um so viel vergrössert; es ist also in diesem Fall:

$$\frac{l\,\Delta\mathfrak{M}}{\Delta b} = -\,b'_2\,(P_1 + \Delta P_2) + b_2\,P_3.$$

Soll nun durch eine dieser beiden Bewegungen das Moment nicht vergrössert werden, so müssen beide Momentendifferenzen negativ sein, was durch die folgende Ungleichheit ausgedrückt werden kann:

$$\frac{P_1 + \Delta P_2}{P_3} > \frac{b_2}{b'_2} > \frac{P_1}{\Delta P_2 + P_3}.$$

Zur Prüfung dieser Ungleichheit genügt in den meisten Fällen der Rechenschieber; stellt man auf diesem b_2 und b'_2 einander gegenüber, so muss die Distanz zwischen P_1 und P_3 auf der Seite der links stehenden Zahl kleiner als wie ΔP_2 sein, was mittelst eines Blickes auf den Schieber geprüft wird. Ist die Differenz grösser, so muss das Belastungssystem gegen das kleinere P geschoben werden.

Das auf diese Weise ermittelte Maximum ist kein absolutes, und es können mehrere aufeinander folgende Räder der Bedingung obiger Ungleichheit genügen; in diesem Fall ändern die Seiten des Seilpolygons und die des Wegezuges Taf. 11_1

ohngefähr um gleichviel ihre Richtung bei dem Uebergang von einem Rad zum andern, so dass die Verticale zwischen diesen zwei Polygonen von jedem der beiden Räder aus gegen die zwischenliegende Ecke des Wegepolygons abnehmen, wo die Minima der Momente liegen. Findet das eben angedeutete Verhältniss statt, so bleibt nichts anderes übrig, als die Momente für beide Belastungslagen auszurechnen und das grössere beizubehalten. Die Minima untersuchen wir nicht weiter, weil sie zu nichts dienen, und machen hier nur auf den Dualismus aufmerksam, dass die Maxima der Momente durch die Ecken des Seilpolygons und die Minima durch die des Wegepolygons bezeichnet werden.

Um nach Bestimmung der Räder, bei denen die Maxima vorkommen, die Momente selbst zu berechnen, thut man am besten, die Momente aller Räder eines Zuges in Bezug auf irgend einen Punkt, z. B. in Bezug auf das erste Rad, zu berechnen, und sowohl die Gewichte als auch die Momente der Räder zu summiren, siehe die Tafel auf der nächsten Seite; die erste Colonne enthält die Radnummern, die zweite deren Abscissen, die dritte und vierte deren Gewichte im Einzelnen und Ganzen, und die fünfte und sechste die Momente im Einzelnen und Ganzen. Die Summe der Gewichte und der Momente einer beliebigen Zahl aufeinander folgender Räder in Bezug auf das erste Rad ergiebt sich nun einfach als Differenz der treffenden Summen, und das Moment derselben Räder in Bezug auf irgend einen andern Drehpunkt, z. B. den Schnittpunkt zweier Constructionstheile ist gleich dem Gewicht der sämmtlichen Räder, mehr oder weniger dem, der Tafel zu entnehmenden Moment derselben Räder in Bezug auf das erste Rad, je nachdem die Räder auf der Seite des Drehpunktes oder auf der entgegengesetzten Seite stehen. Man sieht also, dass diese Tafel rechnerisch ganz das Seilpolygon ersetzt; die Rechnungen für die Spannweite von 40 Met. der Taf. 11_1 machen sich nun wie folgt: Der erste Knotenpunkt theilt die Spannweite in die beiden Segmente 3,33.. und 36,66.. Met. Es ist nun klar, dass nur durch ein Rad der vorwärts fahrenden Locomotive das Maximalmoment bei ihm erzeugt werden kann, denn würde man ein Rad des rücklaufenden Zuges über den Knotenpunkt stellen, so käme kein einziges Rad des vorlaufenden Zuges mehr auf die Strecke 3,33.. und die Räder der zweiten rücklaufenden Locomotive stehen weiter von denen der ersten ab, als wie diese von den der ersten rücklaufenden, so dass die Spannweite weniger belastet wäre. Wir stellen also das vorderste Rad des vorlaufenden Zuges auf 3,33; bei $b = 2{,}2$ Met. der Tabelle lesen wir $P = 39$ Tonn. ab, demnach ist $P_1 = 26$, $\Delta P_2 = 13$ Tonn. Das erste Rad des rücklaufenden Zuges hat die Abscisse $3{,}33 + 5 = 8{,}333..$; von diesem Zug treffen demnach noch 31,666.. Met. auf die Oeffnung, bei 27,1 der Tabelle lesen wir $P_2 = 168$ Tonn. Stellt man nun auf dem Rechenschieber die 3,33.. der 36,66.. oder die 1 der 1,1 gegenüber:

1	3,33	8,5				21,5	26;
1,1	36,66		168	181	194		;

so steht 181 links, 26 rechts, da nun auch $181 + 13 = 194$ 26 rechts nicht erreicht, so giebt diese Stellung kein Maximum.

Wir rücken ein Rad vor, dann wird die Länge des vorlaufenden Zuges gleich 4,433.. und $P_1 = 47{,}5 - 26 = 21{,}5$, die des rücklaufenden 30,566 und $P_3 = 168 + 13 = 181$; ΔP_2 ist immer gleich 13 Tonn. In der obigen Stellung

Gewichte und Momente eines *Engerth*'schen Locomotivenzuges.

Nr.	Abscissen.	Gewichte im		Momente im		Nr.	Abscissen.	Gewichte im		Momente im	
		Einzelnen.	Ganzen.	Einzelnen.	Ganzen.			Einzelnen.	Ganzen.	Einzelnen.	Ganzen.
n	b	ΔP	P	$\Delta \mathfrak{P}$	$\mathfrak{P}$	n	b	ΔP	P	$\Delta \mathfrak{P}$	$\mathfrak{P}$
1	0	13	13			41	84,8	13	461	1102,4	18698,80
2	1,1	13	26	14,3	14,30	42	85,9	13	474	1116,7	19815,50
3	2,2	13	39	28,6	42,90	43	87	13	487	1131,0	20946,50
4	3,4	8,5	47,5	28,9	71,80	44	88,2	8,5	495,5	749,7	21696,20
5	5,9	8,5	56	50,15	121,95	45	90,7	8,5	504	770,95	22467,15
6	10,6	13	69	137,8	259,75	46	95,4	13	517	1240,2	23707,35
7	11,7	13	82	152,1	411,85	47	96,5	13	530	1254,5	24961,85
8	12,8	13	95	166,4	578,25	48	97,6	13	543	1268,8	26230,65
9	14	8,5	103,5	119	697,25	49	98,8	8,5	551,5	839,8	27070,45
10	16,5	8,5	112	140,25	837,50	50	101,3	8,5	560	860,05	27931,50
11	21,2	13	125	275,6	1113,10	51	106	13	573	1378,0	29309,50
12	22,3	13	138	289,9	1403,00	52	107,1	13	586	1392,3	30701,80
13	23,4	13	151	304,2	1707,20	53	108,2	13	599	1406,6	32108,40
14	24,6	8,5	159,5	209,1	1916,30	54	109,4	8,5	607,5	929,9	33038,30
15	27,1	8,5	168	230,35	2146,65	55	111,9	8,5	616	951,15	33989,45
16	31,8	13	181	413,4	2560,05	56	116,6	13	629	1515,8	35505,25
17	32,9	13	194	427,7	2987,75	57	117,7	13	642	1530,1	37035,35
18	34	13	207	442	3429,75	58	118,8	13	655	1544,4	38579,75
19	35,2	8,5	215,5	299,2	3728,95	59	120	8,5	663,5	1020,00	39599,75
20	37,7	8,5	224	320,45	4049,40	60	122,5	8,5	672	1041,25	40641,00
21	42,4	13	237	551,2	4600,60	61	127,2	13	685	1653,6	42294,60
22	43,5	13	250	565,5	5166,10	62	128,3	13	698	1667,9	43962,50
23	44,6	8,5	263	579,8	5745,90	63	129,4	13	711	1682,2	45644,70
24	45,8	8,5	271,5	389,3	6135,20	64	130,6	8,5	719,5	1110,1	46754,80
25	48,3	8,5	280	410,55	6545,75	65	133,1	8,5	728	1131,35	47886,15
26	53	13	293	689	7234,75	66	137,8	13	741	1791,4	49677,55
27	54,1	13	306	703,3	7938,05	67	138,9	13	754	1805,7	51483,25
28	55,2	13	319	717,6	8655,65	68	140	13	767	1820,0	53303,25
29	56,4	8,5	327,5	479,4	9135,05	69	141,2	8,5	775,5	1200,2	54503,45
30	58,9	8,5	336	500,65	9635,70	70	143,7	8,5	784	1221,45	55724,90
31	63,6	13	349	826,8	10462,50	71	148,4	13	797	1929,2	57654,10
32	64,7	13	362	841,1	11303,60	72	149,5	13	810	1943,5	59597,60
33	65,8	13	375	855,4	12159,00	73	150,6	13	823	1957,8	61555,40
34	67	8,5	383,5	569,5	12728,50	74	151,8	8,5	831,5	1290,3	62845,70
35	69,5	8,5	392	590,75	13319,25	75	154,3	8,5	840	1311,55	64157,25
36	74,2	13	405	964,6	14283,85	76	159	13	853	2067,0	66224,25
37	75,3	13	418	978,9	15262,75	77	160,1	13	866	2081,3	68305,55
38	76,4	13	431	993,2	16255,95	78	161,2	13	879	2095,6	70401,15
39	77,6	8,5	439,5	659,6	16915,55	79	162,4	8,5	887,5	1380,4	71781,55
40	80,1	8,5	448	680,85	17596,40	80	164,9	8,5	896	1401,65	73183,20

des Schiebers steht immer noch 181 und 194 links von 21,5; demnach giebt diese Zugstellung kein Maximum. Noch ein Rad vor; Länge des vorlaufenden Zuges 5,533, des rücklaufenden 29,466 .. Met. $P_1 = 47{,}5 - 39 = 8{,}5$, $P_3 = 168 + 26 = 194$ Tonn. Jetzt steht auf dem Schieber 194 zwischen 8,5 und 21,5; demnach giebt diese Stellung das gesuchte Maximum. Es ist gleich:

$$\mathfrak{P}_1 = {}^{11}/_{12}\,[5{,}533 \,.\, 21{,}5 - (71{,}8 - 14{,}3)] + {}^{1}/_{12}\,[(35{,}566 + 34{,}466)\,13 + 29{,}466 \,.\, 168 - 2146{,}65] = 365{,}9 \text{ Met. Tn.}$$

In dieser Momentengleichung sind (35,566 + 34,446) 13 die Momente der beiden vorgeschobenen Räder; 5,533 . 21,5 und 29,466 . 168 die Momente der im vordersten Rad concentrirten Lasten, von denen die der Tafel entnommenen Momente dieser Züge in Bezug auf das vorderste Rad abgehen.

Für den zweiten Knotenpunkt mit den Segmenten 6,66 .. und 33,33 .. kann man nicht von vorn herein schliessen, ob das absolute Maximum unter einem der drei Räder des vorlaufenden oder des rücklaufenden Zuges stattfinden werde, es müssen daher die Proben und Rechnungen für beide Fälle durchgeführt werden. Für den vorlaufenden Zug muss das zweite Rad über den Querschnitt gestellt werden und giebt dann ein Maximalmoment von 588,4 Mtn. Ein grösseres Moment erhält man durch Räder des rücklaufenden Zuges; wir geben die oben mit Worten beschriebenen Proben nur schematisch wieder:

des vorlaufenden Zuges				des rücklaufenden Zuges			
Länge	Gewicht	$= P_1$	ΔP_2	P_3	= Gewicht		Länge
1,66..	26	= 26	13	181	= 194	— 13	33,33..
0,56	13 + 13	= 26	13	181	= 207	— 26	34,43 .
—	0 + 26	= 26	13	176,5	= 215,5	— 39	35,53

Schieberstellung:

6,66 ..	1	26				;
33,33 ..	5		176,5	181	39.	

Da in diesem Fall P_3 immer zwischen $P_1 = 26$ und $P_1 + \Delta P_2 = 39$ fällt, so tragen alle drei Stellungen den Charakter eines Maximalmomentes, und wir haben also hier den Fall vor uns, dessen oben gedacht wurde, in welchem das Seilpolygon ziemlich parallel mit dem Polygon der Wege läuft, und die Seilpolygonseiten von jeder Ecke aus nach beiden Seiten hin gegen die über diesen liegende Seite des Wegepolygons convergiren, siehe Taf. 11_1.

In diesem Fall bleibt nun nichts übrig, als alle drei Momente zu berechnen. Im ersten und zweiten Fall sind die Momente 604,0 und 608,2 Mtn. Das Maximum aber findet im dritten Fall statt, nämlich:

$$\mathfrak{P}_2 = {}^{5}/_{6}\,(4{,}46 \,..\, + 5{,}566 \,..)\,13 + {}^{1}/_{6}\,[35{,}533 \,..\, (215{,}5 - 26) - (3728{,}95 - 14{,}3)] = 611{,}8.$$

Ebenso muss man auch für den dritten Knotenpunkt mit den Segmenten 10 und 30 das Maximum für die Vorderräder des vor- und für die des rücklaufenden Zuges berechnen. Für den vorlaufenden Zug erhält man das Maximum, wenn das vorderste Rad über den Knotenpunkt gestellt wird, mit 846,30 Mtn. Etwas grösser ist das Moment für den rücklaufenden Zug. Das wahre Maximalmoment für den

rücklaufenden Zug erhält man dann, wenn das erste Rad über dem Querschnitt steht, nämlich:

$$\mathfrak{P}_3 = {}^3/_4\,(5\,.\,47{,}5 - 71{,}8) + {}^1/_4\,(30\,.\,168 - 2146{,}65) = 847{,}6 \text{ Mtn.}$$

Stellt man das dritte Rad des rücklaufenden Zuges über den vierten Knotenpunkt mit den Segmenten 13,33.. und 26,66.., so wird das Moment gleich 1011,65 Mtn. Für den rücklaufenden Zug giebt das zweite Rad über dem Knotenpunkt das Maximalmoment:

$$\mathfrak{P}_4 = {}^2/_3\,(12{,}23\,.\,13 + 7{,}23\,.\,56 - 121{,}95) + {}^1/_3\,[27{,}76\,(168 - 13) - 2146{,}65] = 1013{,}8 \text{ Mtn.}$$

Für den fünften Knotenpunkt mit den Segmenten 16,66 und 23,33 Met. erhält man das grösste Moment, wenn das zweite Rad des vorlaufenden Rades über den Knotenpunkt gestellt wird, mit:

$$\mathfrak{P}_5 = {}^7/_{12}\,[17{,}76\,(112 - 13) - 837{,}5] + {}^5/_{12}\,(22{,}23\,.\,13 + 17{,}23\,.\,112 - 837{,}5) = 1113{,}2 \text{ Mtn.}$$

Stellt man das dritte Rad des rücklaufenden Zuges über den Knotenpunkt, so erhält man nur 1093,6 Mtn.

Für die Mitte ist es natürlich ganz einerlei, welchen der beiden Züge man mit dem vordersten Rad über sie stellt; stellt man das vorderste Rad des vorlaufenden Zuges über sie, so erhält man das Maximalmoment:

$$\mathfrak{P}_6 = {}^1/_2\,[20\,.\,112 - 837{,}5 + 15\,.\,103{,}5 - 697{,}25] = 1128{,}88 \text{ Mtn.}$$

Zum Schluss wollen wir die oben erhaltenen Resultate noch mit den construirten und mit den Momenten vergleichen, welche durch zwei Parabeln dargestellt werden, wovon die eine der gleichförmigen Belastung von 5,644 und die andere der von 56 : 10,6 = 5,283 Tn. pro lf. Met. entspricht. Die erste giebt das gleiche Maximalmoment als wie der wirkliche Locomotivenzug, die zweite erhält man durch gleichförmige Vertheilung des Locomotivengewichtes über deren Länge. Sie werden einfach nach der letzten Formel von Nr. 87 S. 346 gerechnet, nachdem man $\beta = \frac{x}{l}$ in derselben gesetzt.

Die Resultate stellen wir in folgender Tabelle zusammen, mit ihren Differenzen den gerechneten Momenten gegenüber:

Nr.	Berechnete Momente.	Abgegriffene Momente		Momente für gleichförmige Belastungen von			
			Δ	5,644 Tn.	Δ	5,283 Tn.	Δ
1	365,9	360	— 6	344,9	— 21	322,9	— 44
2	612	640	+ 28	627,2	+ 15	587,0	— 35
3	847,6	853	+ 5	846,7	— 1	792,5	— 55
4	1013,8	1013	— 1	1003,5	— 10	939,2	— 74
5	1113,2	1120	+ 7	1097,5	— 16	1027,3	— 86
6	1128,88	1143	+ 14	1128,88	0	1056,6	— 72

Betrachtet man diese Ergebnisse genauer, so zeigt sich bei dem Knotenpunkt zwei eine Unregelmässigkeit, die sich wohl nur dadurch erklären lässt, dass er mit

einem der Minimalmomentenpunkte zusammenfällt, welche Taf. 11_4 in verzerrtem Maassstab markirt worden sind; nur ist es auffallend, dass die construirten Momente sie nicht auch andeuten.

Wird von dieser Unregelmässigkeit abstrahirt, so kann man wohl sagen, dass die construirten Momente identisch mit den Berechneten sind, wenn man erwägt, dass der Maassstab Taf. 11_4 so klein ist, dass ,0001 Met. schon 6,66.. Mtn. ausmachen. Gewöhnlich werden die Polygone in einem 5- bis 6mal grössern Maassstab construirt, und dann erhält man eine für alle Fälle der Praxis genügende Genauigkeit. Die langweiligen Rechnungen, die wir oben durchmachten, sind daher in der Praxis ganz zwecklos.

Die gleichförmige Vertheilung des Locomotivengewichtes über die Länge der Locomotive ist bei 40 Met. Spannweite durchaus noch nicht gestattet, der Fehler ist, wie die Differenzen es zeigen, sehr gross; man erhält viel zu kleine Momente.

Dagegen wird kein erheblicher Fehler begangen, wenn man das Maximalmoment nur für die Mitte berechnet, und dann die Momente für die seitlichen Knotenpunkte als Parabeln einrechnet. Besser aber als diese Rechnung ist die Construction, namentlich auch deshalb, weil diese zu grosse, jene zu kleine Momente giebt. Wenn diese Parabel auch die wirkliche Momentencurve im Scheitel berührt, so liegt sie bei grösseren Oeffnungen seitlich, doch unter ihr.

Das Maximum der ausserhalb eines Querschnitts wirkenden scheerenden Kräfte bei einseitiger Belastung brauchen wir nicht zu berechnen, es ist einfach der § S. 360 proportional, laut Nr. 84 S. 330, und wirkt in dem der belasteten Seite gegenüber liegenden Widerlager.

92. Vereinigung des Eigengewichtes und der zufälligen Belastungen eines Balkens.

Bisher haben wir, sowohl bei der graphischen, als auch bei der analytischen Berechnung der ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte, über die Belastungen frei verfügt; wir haben ganz belastete und ganz unbelastete Strecken angenommen, um die ungünstigsten Belastungen zu erzeugen. Ganz unbelastete Strecken sind aber beinahe nie möglich, weil jede Construction in der Regel auch ihr Eigengewicht zu tragen hat, von dem sie nicht entlastet werden kann. Die Entlastungen und die Belastungen der vorigen Nummern können sich daher nur auf die von der zufälligen Last herrührenden Belastungen beziehen.

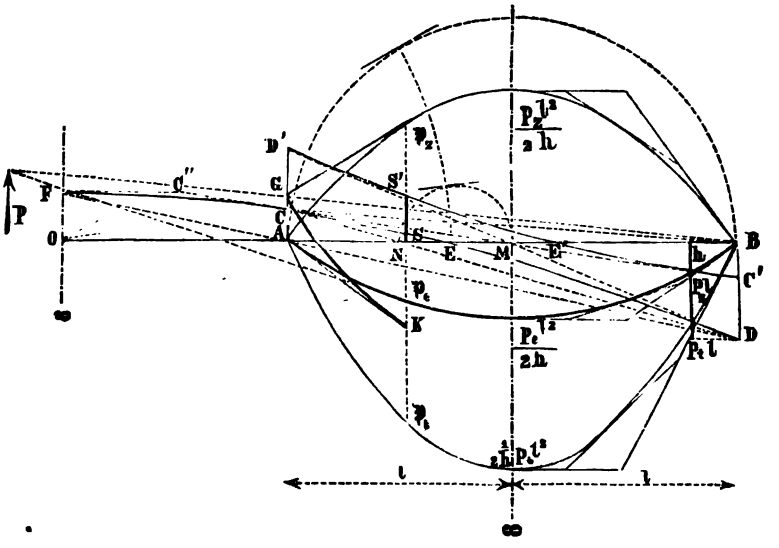
In der Praxis thut man nun in den meisten Fällen am besten, diese beiden Belastungsarten ganz von einander zu trennen. Die durch das feste unveränderliche Eigengewicht erzeugten Kräfte werden am zweckmässigsten nach den in Nr. 81 Taf. 10 dargestellten Methoden bestimmt; dagegen dienen zur Bestimmung

der von der veränderlichen zufälligen Belastung herrührenden Kräfte, die in der vorigen Nummer Taf. 11 erläuterten Methoden. Nach diesen verschiedenen Methoden bestimmte Kräfte können schliesslich einfach zusammengesetzt werden, allein viele Ingenieure fahren in der Trennung noch weiter fort und berechnen die von diesen verschiedenen Kräften herrührenden Spannungen ϱ in den bezüglichen Querschnitten, indem sie das von der zufälligen Belastung herrührende ϱ_z wegen den mit ihr verbundenen Stössen höher anschlagen als wie das vom Eigengewicht herrührende ϱ_e.

Immerhin giebt es Fälle, in denen es nützlich ist, die von beiden Belastungen herrührende Mittelkraft zu kennen, z. B. bei Fachwerken, um das Fach zu ermitteln, bis zu dem rücklaufende Füllungsglieder nothwendig sind, oder auch bei *Schwedler*'schen Trägern, wo in den äussersten Fächern keine Füllungsglieder erforderlich sind. In solchen Fällen kann die Vereinigung des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung auf die folgende Weise, für einen über die Spannweite $AB = 2l$ ausgeführt werden.

Mittelst des Kräftepolygons, dessen Pol in Fig. 155 in B und dessen Poldistanz $= h$ angenommen wurde, kann zunächst das stärker ausgezogene Seilpolygon des Eigengewichtes construirt

Fig. 155.



werden. Die von der zufälligen Belastung herrührenden Maximalmomente werden durch eine Construction, ähnlich der in der vorigen Nummer Taf. 11_1 erläuterten, ermittelt, nach S. 11 Fig. 15 auf den Maassstab der Fig. 155 reducirt, über AB aufgetragen, um die reine Curve der zufälligen Belastung zu erhalten, und auch zu den Momenten des Eigengewichtes addirt, um die Curve der Totalbelastung zu erhalten. Diese drei Curven geben für irgend einen Querschnitt die Maximalmomente getheilt durch die Poldistanz h in $\mathfrak{P}_e$ $\mathfrak{P}_z$ und $\mathfrak{P}_t$; handelt es sich um ein Fachwerk mit der constanten Höhe h, so sind diese Ordinaten $\mathfrak{P}_e$ $\mathfrak{P}_z$ $\mathfrak{P}_t$ laut Nr. 56 S. 206, die in den Druck- und Streckbäumen wirkenden Kräfte selbst; sind die Belastungen den Längen der Spannweite proportional, wie es in der Figur vorausgesetzt wurde, so sind die drei Curven Parabeln mit den Pfeilen $\frac{p_e l^2}{2h}$, $\frac{p_z l^2}{2h}$ und $\frac{p_t l^2}{2h}$. In diesem Fall ist es am einfachsten, diese Pfeile direct zu rechnen, aufzutragen und die Parabeln mittelst umhüllender Tangenten zu construiren, wie es auf der rechten Seite der Figur angedeutet ist.

Die vom Eigengewicht herrührenden scheerenden Kräfte können unmittelbar auf dem Kräftepolygon abgegriffen und ebenfalls in jedem Querschnitt über AB aufgetragen werden, und man erhält die Linie CMC' für diese scheerenden Kräfte; ist die Belastung durch das Eigengewicht eine gleichförmige, so ist diese Linie eine Gerade, welche über A und B die Ordinaten $p_e l$ ausschneidet, wie es auf der Figur angedeutet ist. Addirt man weiter zu den Ordinaten von CMC' die auf Taf. 11_1 abgegriffenen und nach S. 11 Fig. 15 reducirten, von der zufälligen Belastung herrührenden scheerenden Kräfte, indem man einmal auf der linken, einmal auf der rechten Seite beginnt, so erhält man die Curven CD und $C'D'$ des Maximums der scheerenden Kräfte; sie schneiden mit AB auf der Verticalen irgend eines Querschnittes diese Maxima S und S' für einen hin- und für einen herfahrenden Zug aus. Innerhalb der Strecke EE', die diese Curven auf AB selbst ausschneiden, können diese Kräfte positiv, null und negativ werden; ausserhalb dieser Strecke haben die S immer nur ein constantes Zeichen. Da nun ausserhalb dieser Strecke die S nicht gleich null werden können, so sind diese Punkte laut Nr. 85 S. 336 die Grenzen für die Ausweichung des Maximalmomentenpunktes; die constructive Bedeutung dieser Strecke EE' ist, wie wir später

bei Behandlung der Fachwerke zeigen werden, die, dass bei parallelen Streckbäumen innerhalb derselben die Füllungsglieder entweder absolut und rückwirkend zu widerstehen im Stande sein müssen, widrigenfalls das eine System derselben verdoppelt werden muss.

Aus der Natur der Constructionen geht hervor, dass die Curven CD und $C'D'$ sowohl die Linie CC', welche die vom Eigengewicht, als auch die Linie DD', welche die von der Totalbelastung herrührenden scheerenden Kräfte darstellen, berühren müssen. Ist nun das Eigengewicht gleichförmig vertheilt und demnach die Linie CMC' gerade, so ist die Curve CD' offenbar nichts anderes als das Seilpolygon der zufälligen Belastung, construirt mit der Poldistanz CC' in Richtung und Grösse; denn construirt man ein solches Seilpolygon, so sind die Segmente zwischen ihm und CC' der von der zufälligen Belastung herrührenden scheerenden Kraft proportional laut Nr. 84 S. 330. Ist endlich auch die zufällige Belastung noch eine gleichförmig vertheilte wie in Fig. 155 vorausgesetzt wurde, so werden auch die Curven CD und $C'D'$ zu Parabeln, welche die geraden Linien CC' und DD' des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung in den Verticalen von A und B berühren, und deren unendlich ferne Punkte in der Richtungslinie der Kräfte, d. h. den Verticallinien liegen. Der Berührungspunkt F der zu AB parallelen Tangente FC, der Scheitel im vorliegenden Falle, weil die Schlusslinie AB horizontal angenommen wurde, liegt im Schnittpunkt der Linien AD, BC. Denn denkt man sich der Parabel in ihren 4 Punkten $FCD\infty$ ein Viereck einbeschrieben, und ein anderes umbeschrieben, so sind die beiden Punkte A und B Eckpunkte des Polardreiecks dieser Vierecke; die Linie AB ist eine Seite dieses Dreiecks als Verbindungslinie der Tangentenschnitte CD, $F\infty$; in ihr liegen demnach auch die Schnittpunkte der Linien $C\infty$, DF und der Linien $D\infty$, CF als Diagonalen des einbeschriebenen Vierecks, welche daher nichts anderes als wie die Punkte A und B sind. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Sehne CD mit AB, durch N, und den unendlich fernen Punkt der Horizontalen AB mit ∞_A, so ist $O\infty_A . AB . MN . E$.. eine Involution bezüglich der Parabel conjugirter Punkte; A und B sind conjugirt als Eckpunkte eines Polardreiecks, und O und N liegen in den Verbindungslinien der Parabelpunkte, deren Tangenten sich in M und ∞_A

schneiden; da nun O der Mittelpunkt dieser Involution ist, so hat man:

$$OE^2 = OM \,.\, ON = OA \,.\, OB;$$

OE, siehe Fig. 155, ist demnach gleich der Tangentenlänge von Kreisen, die durch A, B und M, N gehen, und kann, wie in der Figur angegeben, leicht construirt werden. Natürlicher Weise ist $ME = ME'$.

Aus dieser Construction lassen sich auch leicht analytische Ausdrücke für die Lage der Punkte E und E' herauslesen. Man hat zunächst von constructionswegen:

$$\frac{OA}{p_e} = \frac{OB}{p_t} = \frac{AB}{p_z} = \frac{2l}{p_z}.$$

Woraus sich sofort ergiebt:

$$OE = \sqrt{OA \,.\, OB} = \frac{\sqrt{p_e p_t}}{p_z} \,.\, 2l,$$

$$AE = E'B = \frac{1}{p_z}\left(\sqrt{p_e p_t} - p_e\right) \,.\, 2l,$$

$$AE' = EB = \frac{1}{p_z}\left(p_t - \sqrt{p_e p_t}\right) \,.\, 2l,$$

$$EM = ME = \left(\sqrt{\frac{p_t}{p_z}} - \sqrt{\frac{p_e}{p_z}}\right)^2 \,.\, l.$$

In der folgenden kleinen Tabelle haben wir einige zusammengehörige Werthe von $\frac{p_e}{p_z}$ und $\frac{EM}{l} = \frac{1}{p_z}\left(p_e + p_t - 2\sqrt{p_e p_t}\right)$, berechnet:

$\frac{p_e}{p_z}$	$\frac{EM}{l}$	$\frac{p_e}{p_z}$	$\frac{EM}{l}$	$\frac{p_e}{p_z}$	$\frac{EM}{l}$
,05	,6417	,6	,2404	2,5	,0839
,10	,5367	,7	,2183	3,0	,0718
,15	,4693	,8	,2000	3,5	,0627
,20	,4202	,9	,1847	4,0	,0557
,25	,3820	1,0	,1716	4,5	,0501
,30	,3510	1,2	,1504	5	,0455
,35	,3252	1,4	,1339	6	,0385
,40	,3033	1,6	,1208	7	,0334
,45	,2845	1,8	,1100	8	,0294
,50	,2679	2,0	,1010	9	,0263

Man sieht aus dieser Tabelle, dass der Maximalmomentenpunkt in der Praxis wohl nie aus dem inneren Viertel heraustreten wird, denn schon für $p_e = 0{,}15\ p_s$, was ein sehr geringes Eigengewicht ist, ist $EM < {}^1/_2\, l$. Ist $p_e > 2\, p_s$, so tritt der Maximalmomentenpunkt nicht mehr aus dem mittelsten Fach heraus, wenn die Fachlänge etwa ${}^1/_{10}$ der Spannweite ist.

Nachdem wir die Grösse der ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte bei einseitiger Belastung bestimmt haben, bleibt uns noch übrig, die Richtungslinie derselben zu ermitteln. Da es auf die Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte durchaus nicht ankommt, so können wir das schon gezeichnete, stark ausgezogene Polygon des Eigengewichtes beibehalten, und von dem Schnitt der letzten Seilpolygonseite AK auf der Verticalen des Querschnittes bei K aus das ebenfalls stark ausgezogene Polygon KG der links liegenden zufälligen Belastung zeichnen. Geschieht dies, so leuchtet sofort ein, dass mit Berücksichtigung des Maassstabes das Segment AG gleich den Segmenten S der Taf. II_1 ist. Man braucht daher das Seilpolygon der zufälligen Belastung höchstens nur einmal zu zeichnen und erhält dann für jeden Schnitt den Endpunkt Q des Seilpolygons des einseitig belasteten Balkens, indem man bei AG das S des auf dem Balken links vom Schnitt stehenden Zuges aufträgt. Der Schnitt der Schlusslinie BG mit der geschnittenen Seilpolygonseite, welche in Fig. 155 als Tangente bei $\mathfrak{P}_e$ erscheint, giebt einen Punkt der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kraft P. Nur dann, wenn die zufällige Belastung in Bezug auf jeden Punkt ihrer Zuglänge symmetrisch ist, also wenn die zufällige Belastung eine gleichförmig vertheilte ist, werden die Segmente zwischen der Polygonseite AK und der Curve GK gleich den Segmenten zwischen dem Polygon der zufälligen Belastung $A\,\mathfrak{P}_z$ und der Polygonseite $G\,\mathfrak{P}_z$ sein, also nur in diesem Fall ist das von *C. Heuser*, Erbkam's Ztschft. 1873 S. 523 gegebene Verfahren richtig.

Die Lage der so bestimmten Kraft P, bezüglich des Schnittes der Zug- und Druckbogen bei *Pauli*'schen Trägern, bei Bogenhängwerken, zeigt nach Nr. 56 S. 207 den Sinn, in welchem die Füllungsglieder in Anspruch genommen sind, und bei *Schwedler*schen Trägern soll die Seite des Druckbogens bei K durch den Schnitt von P mit AB gehen.

Bei analytischer Behandlung hat man weiter nichts zu thun, als wie die für jeden Schnitt für das Eigengewicht und für die zufällige Belastung nach Nr. 86 S. 340 aufgestellten Momentengleichungen in x zu addiren. Bei gleichförmiger Belastung geben die Formeln von S. 345 unmittelbar die Kraft, für jeden Schnitt und für jeden Knotenpunkt.

Zweites Kapitel.

Der Schwerpunkt.

93. Vom Schwerpunkt im Allgemeinen.

Da in Obigem keine bestimmten Voraussetzungen bezüglich der Zahl und Entfernung der einzelnen Kräfte gemacht wurden, so gilt Alles auch noch, wenn erstere unendlich gross und letztere unendlich klein wird. Hierher gehören z. B. alle Körper und Massenelemente, welche unter dem Einfluss der Anziehung der Erde oder anderer paralleler Einwirkungen Druck ausüben; der Mittelpunkt dieser Drücke, Gewichte oder Kräfte ist dann der Schwerpunkt.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes denkt man sich den Körper in endlich oder unendlich kleine Elemente zerlegt, deren Schwerpunkte bekannt sind und deren Gewichte nach irgend einer der bisher entwickelten Regeln zusammengesetzt werden können.

Häufig ist man im Stande, die Elemente des Körpers so zu gruppiren, dass ihre Schwerpunkte in eine Ebene oder in eine gerade Linie fallen, dann beschränken sich die Operationen auf diese Ebene oder diese Linie. Handelte es sich z. B. darum, den Schwerpunkt einer geraden Eisenbahn- oder andern Schiene constanten Querschnittes zu bestimmen, so könnte man die ganze Schiene in prismatische Elemente zerlegt denken, deren Schwerpunkte alle in dem von den Endpunkten gleichweit abstehenden Querschnitt lägen, und deren Gewichte den Basen der Prismen, d. h. den entsprechenden Theilen der Querschnittsfläche proportional wären.

Hier würde also diese Querschnittsfläche als Trägerin der Schwerpunkte aller prismatischen Elemente und durch dieselben gleichförmig belastet erscheinen; man würde diesen Schwerpunkt erhalten, indem man den Querschnitt in Flächenelemente zerlegt und diesen Kräfte beimisst, die ihrer Ausdehnung proportional sind. Auf diese Weise kann also auch von der Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen und auch von Linien die Rede sein, die man sich als Träger der Schwerpunkte von Körpern denkt. Durch solche Körper können Linien und Flächen gleichförmig und ungleichförmig belastet sein. Unter der Voraussetzung gleichförmiger Belastung werden wir hier die Schwerpunkte einiger Linien und Flächen bestimmen.

In diesem ganzen Abschnitt wird immer nur von parallelen Kräften die Rede sein.

Um analytische Ausdrücke für die Coordinaten des Mittelpunktes paralleler Kräfte und des Schwerpunktes zu erhalten, nehmen wir irgend eine Ebene $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ an, die parallel mit der Richtungslinie der Kräfte läuft, fällen Perpendikel:

$$\frac{\alpha\,\omega'}{\varrho} = (a\xi + b\eta + c\zeta + 1)\,\frac{\omega'}{\varrho}$$

von den Angriffspunkten der Kräfte auf die Ebene; in der Formel bezeichnen $a\ b\ c\ 1$ die Coordinaten dieser Angriffspunkte, ω' der Sinus des körperlichen Ecks und ϱ die Function Nr. 65 S. 237. Sind ferner P die Grössen der parallelen Kräfte, so ist das Moment derselben bezüglich der Ebene im Sinn von Nr. 59 S. 215 gleich:

$$\mathfrak{P} = \Sigma\,\frac{\alpha\,\omega'}{\varrho}\,P = \Sigma\,(a\xi + b\eta + c\zeta + 1)\,\frac{\omega'}{\varrho}\,P.$$

Damit dieses Moment gleich 0 werde, haben die Coordinaten der Ebene $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ nur der Bedingung

$$0 = \xi\,\Sigma aP + \eta\,\Sigma bP + \zeta\,\Sigma cP + \Sigma P$$

zu genügen. Da diese Gleichung vom ersten Grad hinsichtlich $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ ist, so ist sie die eines Punktes, des Mittelpunktes der parallelen Kräfte. Die Coordinaten desselben sind:

$$\frac{\Sigma aP}{\Sigma P},\quad \frac{\Sigma bP}{\Sigma P},\quad \frac{\Sigma cP}{\Sigma P}.$$

Diese Formeln lassen sich unmittelbar auf Linien, Flächen und Körper ausdehnen, indem man statt P die Elemente der Linien Δs, die der Flächen ΔF oder des Körpers ΔV setzt.

Zu den Grenzen übergehend, setzt man diese Elemente gleich den Differentialen und verwandelt die Summen- in Integralzeichen.

So erhält man also die Ordinate y_s des Schwerpunktes irgend einer Curve bezüglich einer Coordinatenebene aus:

$$M_y = s\, y_s = \int y\, ds.$$

Die Abscisse des Schwerpunktes einer ebenen Fläche F:

$$\mathfrak{M}_x = F\, x_s = \iint x\, dx\, dy = \int xy\, dx.$$

In dieser Formel braucht die Ordinate nicht gerade von der Abscissenaxe aus gemessen zu werden, sondern y kann die Länge sein, welche durch die Fläche irgendwo auf der Ordinate ausgeschnitten wird. Diese Willkür ist nicht mehr gestattet, wenn es sich um die Ordinate y_s des Schwerpunkts handelt, man hat dann

$$\mathfrak{M}_y = F\, y_s = \iint y\, dx\, dy = \int dx \int_{y'}^{y''} y\, dy = {}^1/_2 \int (y''^2 - y'^2)\, dx,$$

oder was dasselbe ist:

$$\mathfrak{M}_y = F\, y_s = {}^1/_2 \int y^2\, dx,$$

um den ganzen Umfang herum genommen. Im ersten Fall sind die Grenzen von x die Abscissen der Endpunkte der Projection der Figur auf die x-Axe. Im zweiten Fall sind die Grenzen der Integrale nicht von einander verschieden, allein jedem Werth von x entsprechen zwei Werthe von y, von denen die einen den wachsenden, die andern den abnehmenden x zuzuweisen sind, oder umgekehrt.

Multiplicirt man $\mathfrak{M}_y$ mit 2π, so erhält man:

$$2\, \mathfrak{M}_y\, \pi = \pi \int (y''^2 - y'^2)\, dx,$$

den Cubikinhalt des Körpers, der durch Rotation um die x-Axe erzeugt wird, in Uebereinstimmung mit Nr. 30 S. 139.

Wollte man die Fläche mit einem Radiusvector vom Ursprung aus, statt mit parallelen Ordinaten bestreichen, so wäre das Moment in Bezug auf die x-Axe bei cartesischen Coordinaten:

$$\mathfrak{M}_y = F\, y_s = {}^2/_3 \int y\, (x\, dy - y\, dx).$$

Mit diesem Integral, das ebenfalls über den ganzen Rand zu nehmen ist, ist aber nicht viel anzufangen. Diese Methode ist eben nur bei Polarcoordinaten praktisch. Für solche ist der Ausdruck des Momentes in Bezug auf die Axe $\varphi = \alpha$:

$$\mathfrak{M}_\alpha = {}^1/_3 \int r^3 \sin(\varphi - \alpha)\, d\varphi.$$

Die Formeln zur Bestimmung der Momente von Körpern unterscheiden sich von den bisherigen eigentlich nur dadurch, dass an die Stelle der Ordinaten y die Querschnittsfläche parallel mit einer Coordinatenebene tritt.

Das Moment in Bezug auf die xy-Ebene ist gleich:

$$\mathfrak{M} = \iiint z\, dx\, dy\, dz = {}^1/_2 \iint (z''^2 - z'^2)\, dx\, dy = \int z\, F_{xy}\, dz$$
$$= \int \mathfrak{M}_{xy}\, dx = \int \mathfrak{M}_{xz}\, dy.$$

Das erste dieser Integrale ist das allgemeine, das zweite stellt die Summation der Momente aller über dem Flächenelement $dx\, dy$ stehenden prismatischen Momente dar, das dritte das Product aller elementaren xy-Scheiben mit ihrer Entfernung von dieser Ebene, das vierte die Summation aller Momente aller xy-, und das

fünfte die aller zx-Scheiben dar. Für die Momente in Bezug auf die übrigen Coordinatenebenen erhält man symmetrische Formeln.

Durch Determinanten kann man auch Ausdrücke für die Momente von Polarelementen erhalten, allein sie werden so complicirt, dass sie nicht mehr praktisch verwendbar sind.

94. Der Schwerpunkt von Linien.

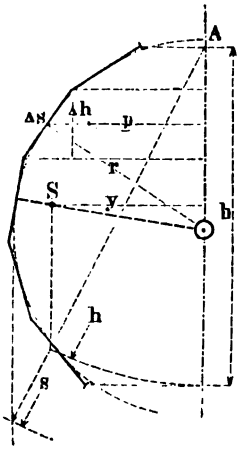
a) Der Schwerpunkt der geraden Linie

liegt in ihrer Mitte, denn man kann dieselbe von der Mitte aus nach beiden Seiten hin in Elemente theilen, von denen je zwei gleich lang und schwer sind und von der Mitte gleichweit abstehen; es liegt daher der Schwerpunkt jeder einzelnen Gruppe mithin auch der aller Gruppen zusammen, d. h. der Schwerpunkt der Linie selbst in ihrer Mitte.

b) Den Schwerpunkt einer gebrochenen Linie

erhält man, wenn man alle Mitten der einzelnen Linien als Angriffspunkte von Kräften betrachtet, die diesen Linien proportional sind. Liegen alle Stücke in einer Ebene, so genügen zwei Kräftepolygone den Schwerpunkt zu bestimmen; ist dies jedoch nicht der Fall, so braucht man deren drei nach Fig. 121 S. 213.

Fig. 156.



Besteht die gebrochene Linie aus einer Zahl von Seiten eines um einen Kreis beschriebenen Polygons gleicher Seitenlängen, bei dem also die Schwerpunkte aller Linien auf einem Kreisbogen liegen, so gelangt man, in Berücksichtigung, dass laut Fig. 156

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{\Delta h}{p}$$

ist, wo s die ganze Länge der gebrochenen Linie, Δs aber die Länge einer Polygonseite und die übrigen Buchstaben die Linien bezeichnen, auf denen sie stehen, zum Momente der gebrochenen Linie

$$\mathfrak{M} = \Sigma p \Delta s = \Sigma r \Delta h = rh = ys,$$

woraus sich

$$y = r \cdot \frac{h}{s}$$

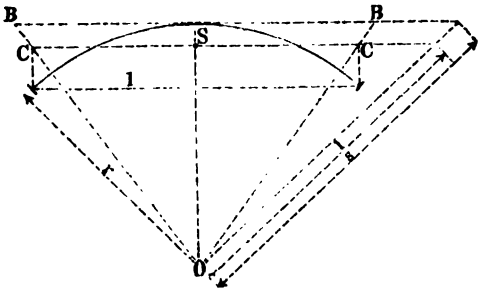
ergiebt.

In Fig. 156 wurde y construirt, indem man von A aus auf einer zu h parallelen Tangente die gestreckte Länge s des Polygons abschnitt, und auf demselben s auch h auftrug, dessen Endpunktsordinate gleich y sein muss. Eine Parallele durch ihn schneidet dann auf dem das Polygon halbirenden Radius den Schwerpunkt S ab; denn dieser liegt auf diesem Radius, weil der Schwerpunkt der mittelsten Seite und je zweier von diesen gleichweit abstehender Seiten, mithin auch der aller Seiten, auf ihm liegt (Nr. 59 S. 215).

c) Der Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Den Kreisbogen kann man als regelmässiges Polygon von unendlich vielen Ecken betrachten, und bestimmt dann den Schwerpunkt desselben genau, wie wir eben den des regelmässigen Vielecks bestimmt haben; die Constructionen von Fig. 157 unterscheiden sich von denen in b, nur durch andere Anordnung.

Fig. 157.



Der Schwerpunkt S liegt auf dem den Bogen halbirenden Radius OS, streckt man dann den Bogen auf die Mitteltangente nach $BB = s$, so schneiden Parallele durch die Bogenenden zum Radius OS auf den Linien OB Punkte CC ab, die mit dem Schwerpunkt S auf einer Geraden liegen.

Denn man hat

$$OS = r \cdot \frac{CC}{BB} = r \cdot \frac{l}{s},$$

wo l die Sehnen und s die Bogenlänge bezeichnet.

Ein anderer Punkt dieser Linie CSC wird erhalten, indem man von O aus auf der Mitteltangente BB die Bogenlänge s abschneidet, und auf derselben Linie die Sehnenlänge l aufträgt, deren Endpunkt in CSC liegt.

Der analytische Ausdruck für das Moment eines Kreisbogens in Bezug auf die Axe φ ist:

$$M_\varphi = \int_{\varphi'}^{\varphi''} r^2 \sin\varphi \, d\varphi = r^2 (\cos\varphi' - \cos\varphi''),$$

$$= 2 r^2 \sin {}^1/_2(\varphi'' - \varphi') \sin {}^1/_2(\varphi'' + \varphi') = r \sin {}^1/_2(\varphi'' + \varphi') \cdot r\varphi \cdot \frac{2 \sin {}^1/_2(\varphi'' - \varphi')}{\varphi}.$$

d) Den Schwerpunkt beliebiger krummen Linien

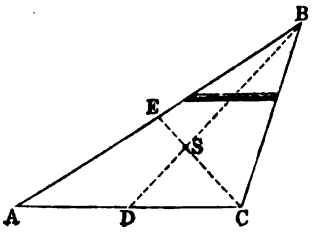
erhält man wohl am einfachsten, indem man diese Linien in gleichlange Stücke theilt, die so kurz sind, dass sie als gerade Linien betrachtet werden können, und dann Parallele durch ihre Mittelpunkte durch zwei oder drei Seilpolygone verbindet, die den Schwerpunkt geben.

95. Der Schwerpunkt geradlinig begrenzter Figuren.

a) Der Schwerpunkt eines Dreiecks.

Denkt man sich die Fläche des Dreiecks (Fig. 158) durch Parallellinien zur Grundfläche AC in Elemente zerlegt, von denen eins schraffirt wurde, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Elemente auf der geraden Linie BD, die sie alle und daher die Grundlinie AC halbirt; aus demselben Grunde liegt er auch auf der Linie CE, welche AB hälftet, und auf der Linie, welche A mit der Mitte von BC verbindet.

Fig. 158.



Zur genaueren Bestimmung des Schnitt- und Schwerpunktes S, der

übrigens am leichtesten durch Ziehen der Linien BD und CE construirt wird, giebt das Dreieckschnittverhältniss des durch die Secante CSE geschnittenen Dreiecks ADB:

$$\frac{DC}{CA} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BS}{SD} = -1.$$

Nun ist aber mit Berücksichtigung des Sinnes

$$\frac{DC}{CA} = -\,{}^1/_2 \quad \text{und} \quad \frac{AE}{EB} = +1,$$

mithin $\frac{BS}{SD} = +2.$

Der Schwerpunkt des Dreiecks S liegt daher im Drittel der Linie DB von dem Mittelpunkt der Basis gegen die gegenüberliegende Spitze zu gerechnet. Da die Höhen der Punkte B und S über der Basis AD sich wie die Längen SD und BD verhalten, so kann man auch sagen, der Schwerpunkt des Dreiecks liege im ${}^1/_3$ der Höhe über jeder Basis.

Liegt das Dreieck im Raum und bezeichnen $a\,b\,c\,s$ die Ordinaten der Eckpunkte und des Schwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Ebene, so ist die Ordinate des Punktes

$$D = \frac{a+c}{2}$$

und die des Schwerpunktes

$$s = \frac{a+c}{2} + {}^1/_3\left[b - \frac{a+c}{2}\right]$$

oder

$$s = {}^1/_3\,(a+b+c).$$

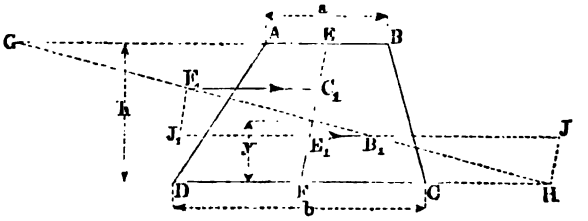
b) Der Schwerpunkt des Parallelogramms.

Der Schwerpunkt des Parallelogramms liegt in der Mitte jeder Diagonalen und jeder Linie, welche die Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten mit einander verbindet. Alle diese Linien schneiden sich aus selbstverständlichen Gründen im Schwerpunkt.

c) Der Schwerpunkt des Paralleltrapezes.

Der Schwerpunkt des Paralleltrapezes $ABCD$ (Fig. 159) liegt vorerst in der Linie EF, welche die Mitten der beiden parallelen Seiten verbindet.

Fig. 159.



Denkt man sich dann das Trapez in zwei Dreiecke ABD und BCD zerlegt (die Diagonale BD ist in der Figur nicht gezogen), so sind ihre Inhalte gleich EB und FC, multiplicirt mit h und ihre Schwerpunkte liegen im Drittel der Höhe jedes Dreiecks. Werden daher den Inhalten proportionale zu AB und DC parallele Kräfte, deren Richtungen durch die Schwerpunkte gehen, angenommen, hierauf nach Nr. 83 S. 325 deren Lage vertauscht und von der Linie EF aus so aufgetragen, dass das mittlere Drittel $C_1\ E_1$ die dritte Seite des Vierecks (Fig. 143) bilde, so fällt FC nach $F_1\ C_1$, EB nach $E_1\ B_1$ und die Verbindungslinie $B_1\ F_1$ schneidet auf EF den Schwerpunkt ab. Das Eintheilen der Linie EF oder der Höhe des Trapezes in drei gleiche Theile kann man sich ersparen, wenn man $B_1\ F_1$ bis zu den Schnittpunkten G und H mit den Parallelseiten verlängert, und $J_1\ F_1$ und HJ parallel zu EF zieht; dann ist

$$B_1\ J = J_1\ B_1 = F_1\ C_1 + E_1\ B_1$$

und $E_1\ J = FH = F_1\ C_1 + 2\ E_1\ B_1 = FC + AB.$

Es ist daher $CH = AB.$

Auf dieselbe Weise kann man beweisen, dass $AG = CD$ ist.

Trägt man daher von diagonalen Eckpunkten A und C die gegenüberliegenden Seiten, in der Verlängerung der Parallelseiten nach AG und CH auf, so schneidet die Linie GH den Schwerpunkt auf der

Linie ab, welche die Mitten der Parallelseiten mit einander verbindet.

Die Entfernung y des Schwerpunktes von der einen Parallelseite b (Fig. 159) ist gleich:

$$y = h. \frac{FH}{FH + EG}.$$

Nun ist aber, wenn die Längen der Parallelseiten mit a und b bezeichnet werden:

$$FH = a + {}^1/_2\, b$$
$$EG = {}^1/_2\, a + b$$
$$FH + EG = {}^3/_2\,(a + b)$$

daher $y = h. \frac{a + {}^1/_2\, b}{{}^3/_2\,(a + b)} = {}^1/_3\, h. \frac{2a + b}{a + b}$

und die Entfernung von der andern Parallelseite:

$$y_1 = {}^1/_3\, h. \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Die Länge einer Parallele zu a und b durch den Schwerpunkt ist gleich:

$$\frac{a y + b y_1}{y + y_1} = \frac{2(a^2 + a b + b^2)}{3\,(a + b)}.$$

Die Entfernung des Schwerpunktes von einer der schiefen Seiten ist daher halb so gross, und das Moment in Bezug auf eine dieser Seiten ist gleich:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6\, h\,(a^2 + a\,b + b^2).$$

Dieselben Resultate in etwas allgemeinerer Form erhält man auch, wenn man das Trapez als Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten z_1 und z_2, deren Entfernung gleich $y_2 - y_1$ ist, betrachtet. Die Coordinaten sind durch die Gleichung mit einander verbunden:

$$z = \frac{1}{y_2 - y_1}\,[(y_2 - y_1 - y + y_1)\, z_1 + (y - y_1)\, z_2]$$
$$(z_2 - z_1)\, y + (y_1 - y_2)\, z + y_2\, z_1 - y_1\, z_2 = 0.$$

Man hat nun y oder z als Functionen von z oder y zu bestimmen und die Gleichungen der Flächen und Momente zu substituiren, und innerhalb der Grenzen 1 und 2 zu integriren, wobei die allgemeine Gleichung:

$$\frac{1}{y_2 - y_1}\int_1^2 y^m z^n\, dy = \frac{1}{z_2 - z_1}\int_1^2 y^m z^n\, dz =$$
$$\frac{(1 \cdot 2 \ldots m)\,(1 \cdot 2 \ldots n)}{1 \cdot 2 \ldots (m + n + 1)}\, \Sigma \binom{g + h}{g} \binom{i + k}{i} y_1^g z_1^h y_2^i z_2^k$$

angewendet werden kann, die namentlich später bei den Trägheitsmomenten Nr. 110 c. das Integriren sehr abkürzt. In dieser Gleichung muss $g + i = m$, $h + k = n$ sein; $\binom{g+h}{g}$ und $\binom{i+k}{i}$ sind die Binomialcoefficienten. Und die Summe erstreckt sich über alle möglichen Combinationen von i und k.

Die Ausführung der angedeuteten Operationen giebt für die Fläche F:

$$F = {}^1/_2 (y_2 - y_1)(z_1 + z_2).$$

Das Moment in Bezug auf die y-Axe:

$$\mathfrak{M}_y = \int_{z_1}^{y_2} y z \, dy = {}^1/_6 (y_2 - y_1)[(2 y_1 + y_2) z_1 + (y_1 + 2 y_2) z_2],$$

und das Moment in Bezug auf die z-Axe:

$$\mathfrak{M}_z = {}^1/_2 \int z^2 \, dy = {}^1/_6 (y_2 - y_1)(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2).$$

Durch Division dieser Momente mit der Fläche erhält man die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$y_s = \frac{(2 y_1 + y_2) z_1 + (y_1 + 2 y_2) z_2}{3 (z_1 + z_2)} = \frac{(2 z_1 + z_2) y_1 + (z_1 + 2 z_2) y_2}{3 (z_1 + z_2)}$$

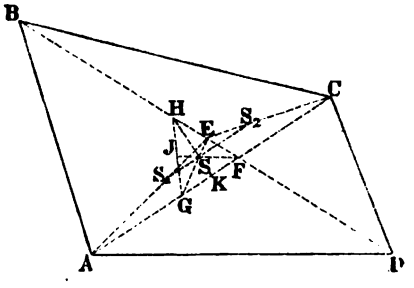
$$z_s = \frac{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}{3 (z_1 + z_2)}.$$

Leicht lassen sich aus diesen Werthen auch die auf rein geometrischem Wege gefundenen Sätze ableiten.

d) Der Schwerpunkt eines unregelmässigen Vierecks.

Man theile das Viereck $ABCD$ (Fig. 160) durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke ABD und CDB, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 in dem $^1/_3$ der Linie EA und EC liegen, welche die Mitte E der Diagonale mit den gegenüberliegenden Ecken A und C verbindet. Der Schwerpunkt S des Vierecks theilt nun die Verbindungslinie $S_1 S_2$ der beiden Dreiecksschwerpunkte so, dass die Segmente $S_1 S$ und $S S_2$ sich umgekehrt, wie die Inhalte der beiden entsprechenden Dreiecke verhalten. Da sich nun diese wegen der gleichen Basis BD, wie die Segmente AF und FC der andern Diagonale AC verhalten, und diese Diagonale parallel

Fig. 160.



zu $S_1 S_2$ liegt, so erhält man den Punkt S einfach dadurch, dass man die Segmente auf AC vertauscht, d. h. $AG = FC$ und $GC = AF$ macht, es liegt dann S auf der Linie EC, denn man hat

$$\frac{S_1 S}{S S_2} = \frac{AG}{GC} = \frac{FC}{AF} = \frac{\triangle CDB}{\triangle ABD}.$$

Berücksichtigt man nun noch, dass S im Drittel von EG liegt, weil S_1 und S_2 in $^1/_3$ der Linien EA und EC liegen, so kann man sagen:

Der Schwerpunkt S eines Vierecks $ABCD$ liegt in dem $^1/_3$ der Strecke EG, von der Mitte E einer Diagonale gegen den Punkt G, den man durch Vertauschen der Segmente auf der andern Diagonale erhält.

Wiederholt man diese Construction mit Vertauschung der Diagonalen des Vierecks. So liegt auch der Schwerpunkt S im Drittel der Linie KH, welche die Mitte K von CA mit dem Punkt H verbindet, der durch Vertauschen der Strecken der FD und BF entstanden ist. Bemerkt man nun, dass die Mitten E und K auch in der Mitte von GF und HF liegen, so kann man auch sagen: der Schwerpunkt eines Vierecks fällt mit dem des Dreiecks zusammen, dessen Eckpunkte der Schnitt F der Diagonalen und die durch Vertauschen der Diagonalsegmente entstandenen Punkte H und G sind.

Es liegen also auch die Punkte F, S und die Mitte J von HG in einer geraden Linie. Werden nun CD und AB parallel, so wird auch HG parallel zu diesen Linien, und ihre drei Mitten liegen mit F und dem Schwerpunkt S auf einer geraden Linie, was mit dem oben in c) Gesagten übereinstimmt. Auch hieraus lässt sich leicht der dort schon gegebene Abstand des Schwerpunktes von einer der Parallelseiten des Vierecks ableiten.

e) Der Schwerpunkt mehr als vierseitiger Polygone.

Den Schwerpunkt von Vielecken mit mehr als vier Seiten bestimmt man am leichtesten durch Zerlegen derselben in Vierecke, und Verbindung der Schwerpunkte dieser durch Seilpolygone nach: Nr. 58 S. 213.

Analytische Ausdrücke erhält man für die Momente von Polygonen, indem man von dem des Dreiecks ausgeht, wie folgt:

Sind x_i y_i die Coordinaten der Eckpunkte eines Polygons. So ist der doppelte Inhalt und das sechsfache Moment des Dreiecks, welches die Polygonseite $i\ k$ aus dem Ursprung projicirt, in Bezug auf die Abscissenaxe:

$$2\,F_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}, \quad 6\,\mathfrak{M}_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} (y_i + y_k).$$

Man erhält nun die totale Fläche und das totale Moment, indem man diese Determinanten für alle Polygonseiten summirt, wobei der Sinn der Fläche und des Momentes durch die Reihenfolge $i\ k$ im Umfang angedeutet wird. Sollen also alle zu summirenden Flächen und Momente gleiches Zeichen haben, so muss der Sinn $i\ k$ im Umfang derselbe bleiben.

Wendet man diese Summation auf ein beliebiges Dreieck 1 2 3 an, so erhält man:

$$2\,F = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$6\,\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_2 + y_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 + y_1 \\ x_3 & y_3 & y_1 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} y_{123},$$

wenn man mit $y_{1\,2\,3}$ die Summe der drei Ordinaten $y_1 + y_2 + y_3$ bezeichnet.

Statt die Fläche vom Ursprung aus zu bestreichen, kann man sie von einem Eckpunkt 1 z. B. aus beschreiben, indem man die letzten Determinanten für die Zeiger

$$1\,2\,3,\ 1\,3\,4 \ldots,\ 1\,i\,k,\ \ldots 1\,n{-}1\,n,$$

summirt. Wenden wir diese Summation auf das Viereck an, so erhalten wir:

$$2\,F = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$6\,\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & \\ x_2 & y_2 & 1 & y_{3\,4\,1} \\ x_3 & y_3 & 1 & \\ x_1 & y_4 & 1 & y_{1\,2\,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & s \\ x_3 & y_3 & 1 & y_3 \\ x_4 & y_4 & 1 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & s & 1 \\ x_2 & y_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & s & 1 \\ x_4 & y_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

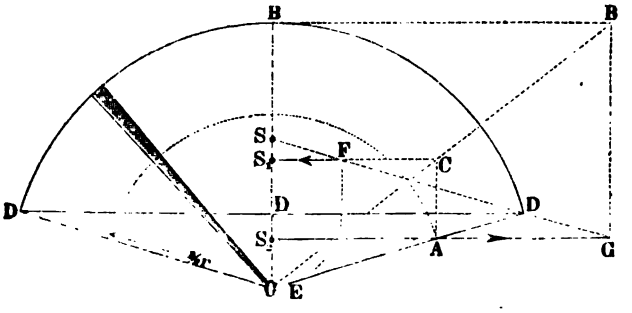
worin $s = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ ist. Durch passende Substitutionen kann man leicht auch die Resultate von c und d ableiten, doch hat dies keinen besonderen Zweck; diese Determinanten können eben nur dazu dienen, die Fläche und das Moment mehrseitiger unregelmässiger Polygone zu bestimmen.

96. Der Schwerpunkt krummlinig begrenzter Figuren.

a) Der Schwerpunkt eines Kreissectors.

Denkt man sich den Kreissector (Fig. 161) in concentrische Sectorenelemente zerlegt, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Elemente, die man als Dreiecke betrachten kann, von denen eines

Fig. 161.



schraffirt ist, in dem Kreisbogen ....., der mit $^2/_3\ r$ beschrieben wurde.

Da ferner dieser Kreisbogen als Träger dieser Schwerpunkte durch dieselben gleichmässig belastet erscheint, so fällt der Schwerpunkt S_1 des Kreissectors mit dem des concentrischen Kreises ..... von $^2/_3\ r$ Halbmesser zusammen.

Nach c) (Fig. 157 S. 373) erhält man aber den Schwerpunkt eines Kreisbogens, wenn man Fig. 161 die halbe Länge seines Umfangs auf die Mitteltangente nach *BB* streckt, *O* mit *B* verbindet und den Endpunkt *A* des Schwerpunktbogens parallel zum Mittelradius nach *C* auf *OB* projicirt. Der Schwerpunkt S_1 ist dann der Fusspunkt des Perpendikels von *C* auf den Mittelradius.

b) Der Schwerpunkt eines Kreissegments.

Das Segment *DBD* (Fig. 161) betrachte man als Differenz des Sectors und des Dreiecks *ODD*, dessen Schwerpunkt S_2 mit dem Fusspunkt des Perpendikels von *A* auf den Mittelradius zusammenfällt. Dann wird der Schwerpunkt *S* der Mittelpunkt zweier

paralleler Kräfte sein, wovon die eine BB dem Flächeninhalt des Sectors proportionale im Schwerpunkt dieses S_1 und die andere ED dem negativen Inhalt des Dreiecks proportionale im Schwerpunkt dieses S_2 wirkt. Trägt man daher auf zwei Parallelen durch S_1 und S_2 nach Vertauschung der Lagen mit Berücksichtigung des Sinnes BB nach $S_2\,G$ und DE nach FS_1 auf, so giebt nach Nr. 83 S. 325 der Durchschnitt der gegenüberstehenden Seiten $S_1\,S_2$ und FG des mit den Inhalten gebildeten Vierecks den Schwerpunkt des Segmentes.

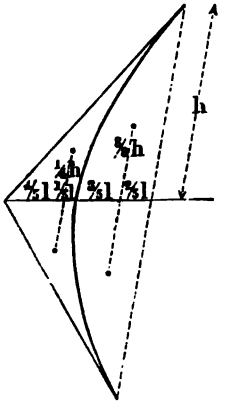
Diese Construction ist nur genau, wenn der Inhalt des Dreiecks DOD klein im Verhältniss zu dem des Sectors ist, also wenn der Winkel DOD gross ist. Ist der Winkel DOD klein, so ist es besser das Kreissegment als Parabelsegment zu betrachten oder in mehrere Parabelsegmente und Dreiecke zu theilen, die man dann mittelst eines Seilpolygons zusammensetzt.

c) Die Schwerpunkte der Parabelsegmente.

Diese werden am einfachsten analytisch berechnet. Es sei die Gleichung der Parabel Fig. 162:

$$y^2 = p\,z.$$

Fig. 162.



Dann ist der Flächeninhalt, das Moment in Bezug auf die Scheitelordinate und die Abscisse des Schwerpunktes:

$$F = \int_0^l y\,dz = \sqrt{p}\int_0^l z^{1/2}\,dz = {}^2/_3\sqrt{p}\;l^{3/2} = {}^2/_3\,h\,l,$$

$$M_1 = \int_0^l yz\,dz = \sqrt{p}\int_0^l z^{3/2}\,dz = {}^2/_5\sqrt{p}\;l^{5/2} = {}^2/_5\,h\,l^2,$$

$$z_s = \frac{M_1}{F} = {}^3/_5\,l.$$

Das Moment der halben Parabel in Bezug auf die Abscissenachse und die Ordinate des Schwerpunktes:

$$M_2 = {}^1/_2\int_0^l y^2\,dz = {}^1/_2\,p\int_0^l z\,dz = {}^1/_4\,p\,l^2 = {}^1/_4\,h^2\,l,$$

$$y_s = \frac{M_2}{F} = {}^3/_8\,h.$$

Der Flächeninhalt des in der Figur der Parabel an ihrem Endpunkte mittelst einer Sehne und den Tangenten umschriebenen Dreiecks ist gleich $h\,l$ und die Momente desselben ${}^1/_3\,h\,l^2$ und ${}^1/_3\,h^2\,l$. Zieht man von diesen die obigen Momente des Parabelsegments ab, so erhält man für das äussere Parabeldreieck:

$$M_1 = (1/3 - 2/5)\, h\, l^2 = -1/15\, h\, l^2;\ z_s = -1/5\, l;$$
$$M_2 = (1/3 - 1/4)\, h^2\, l^{11} = 1/12\, h^2\, l;\ y_s = +1/4\, h.$$

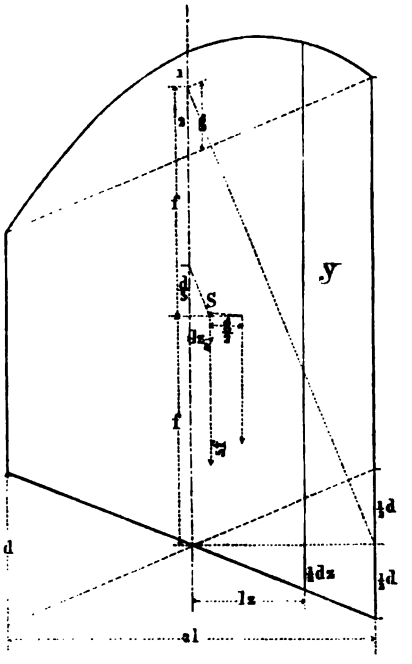
Die eben gefundenen Zahlen wurden in Fig. 162 zusammengestellt, sie sind sehr nützlich, um alle kleinern Bogen und Anschmiegungen bei unregelmässigen Profilen zu berücksichtigen, und es können nach denselben, ohne merkliche Fehler zu begehen, noch ziemlich grosse Kreissegmente behandelt werden.

d) Der Schwerpunkt des Parabeltrapezes.

Bei der Summation der Flächeninhalte Nr. 24 S. 111 haben wir das Parabeltrapez als das eigentliche Element von durch beliebige Curven begrenzten Figuren betrachtet, deren Flächeninhalte bestimmt werden sollen. Es dürfte daher von Interesse sein, die Momente und den Schwerpunkt des Parabeltrapezes zu bestimmen, um auch diese summiren zu können.

Man könnte, um diesen Schwerpunkt zu erhalten, den der Parabel und des Trapezes einzeln construiren und die Entfernung beider umgekehrt wie die Flächeninhalte theilen. Wenn in speciellen Fällen dieses Verfahren vielleicht am schnellsten zum Ziele führt, so ist es doch wenig übersichtlich, und es ist zweckmässig, Formeln für die Momente aufzustellen und nach diesen dann den Schwerpunkt zu construiren.

Fig. 163.



Man gelangt rasch zu diesen Formeln durch Addition der Momente des Trapezes und des Parabelsegmentes; der spätern Berechnung der Trägheitsmomente wegen wollen wir sie aber analytisch hier durch Integration bestimmen.

Da die Momente durch die Flächen dividirt werden müssen, so ist es zweckmässig, die auf die horizontal gemessene Doppelbreite reducirte Fläche einzuführen. Wir bezeichnen daher Fig. 163 die Mittellinie weniger $^1/_3$ des Pfeiles mit $2f$, so dass der Flächeninhalt $F = 4fl$ ist. Ferner $^2/_3$ des Parabelpfeiles mit g und die Differenz der äussersten Ordinaten mit $2d$, endlich die Abscisse der Ordinate y mit lz, wie die Figur es zeigt. Dann ist:

$$y = 2f + {}^1/_2 g + dz - {}^3/_2 yz^2.$$

Denn der unendlich ferne Punkt dieser Parabel liegt in der Richtung der Ordinaten, für $z = o$ erhält man die Mittelordinate $2f + {}^1/_2 g$ und für $z = \pm 1$ wird $y = 2f - g \pm d$ gleich den Endordinaten, wie es sein soll.

Man hat jetzt:

$$\frac{F}{2l} = {}^1/_2 \int_{-1}^{+1} y\,dz = 2f + {}^1/_2 g - {}^1/_3 \cdot {}^3/_2 g = 2f,$$

$$\frac{M_z}{3l^2} = {}^1/_3 \int_{-1}^{+1} yz\,dz = {}^1/_3 d,$$

$$\frac{M_y}{2l} = {}^1/_4 \int_{-1}^{+1} y^2\,dz = {}^1/_2 (2f + {}^1/_2 g)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} [d^2 - 3g(2f + {}^1/_2 g)]$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot {}^9/_4 g^2 = 2f^2 + {}^1/_6 d^2 + {}^1/_{10} g^2.$$

Werden, wie bisher üblich, die Coordinaten des Schwerpunktes mit lz_s und y_s bezeichnet, so erhält man für dieselben:

$$z_s = \frac{M_z}{lF} = \frac{d}{6f},$$

$$y_s = \frac{M_y}{F} = f + \frac{d^2}{12f} + \frac{g^2}{20f} = f + {}^1/_2 d\,z_s + \frac{g^2}{20f}.$$

Um mittelst dieser Coordinaten den Schwerpunkt zu construiren, verbinden wir den Fusspunkt von $2f$ mit der Mitte von d auf der grössern Trapezseite (siehe die Figur). Durch die Mitte von $2f$ ziehen wir eine Parallele zu dieser Verbindungslinie, tragen von ihr aus auf f die Länge $^1/_3 d$ ab und ziehen durch den Endpunkt derselben eine zweite Parallele zur Linie, die den obern Endpunkt von $2f$ mit der Mitte von d verbindet. Sie schneidet auf der ersten Parallelen einen Punkt aus, dessen Abscisse gleich der des Schwerpunktes lz_s ist, denn man hat:

$$\frac{lz_s}{{}^1/_3 d} = \frac{l}{2f}, \text{ oder } z_s = \frac{d}{6f}.$$

Die Ordinate dieses Endpunktes aber ist gleich $f + {}^1/_2 dz_s$, wie ein Blick auf die Figur zeigt. Der Schwerpunkt selbst liegt daher in der gleichen Ordinate um $\frac{g^2}{20f}$ höher. Diese Distanz wird mittelst eines rechtwinkeligen Dreiecks construirt, dessen Höhe gleich $^1/_2 g$, dem Drittel des Parabelpfeiles, und dessen spitzer

Winkel in der Entfernung $5f$ unter dem Punkte liegt, wie die Figur es zeigt. In den meisten Fällen ist $\frac{g^2}{20f}$ so klein, dass es nicht mehr construirt werden kann; darf aber diese Grösse vernachlässigt werden, so ist die Bestimmung des Schwerpunktes nach obigen Regeln gar einfach.

Mittelst des Momentes M_y gelangt man auch auf die einfachste Weise zur Bestimmung des Cubikinhaltes von Gefässen, die durch die Rotation parabolischer Linien (Fig. 164) entstanden sind. Laut *Gul in's* Regel ist der Inhalt eines solchen Rotationskörpers:

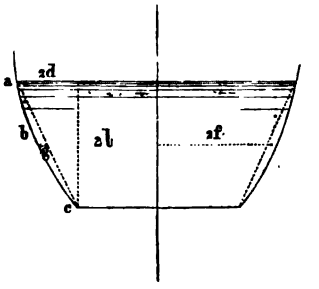
$$\Im = 2\pi M_y = [(2f)^2 + {}^1/_3 d^2 + {}^1/_5 g^2]\, 2l \cdot \pi.$$

Bei Fässern ist $d = o$, kann dann auch noch ${}^1/_5 g^2$ den übrigen Grössen gegenüber vernachlässigt werden, so ist $2f$ einfach als mittlerer Durchmesser des Fasses zu betrachten.

Ist der Längenschnitt des Gefässes als Zeichnung gegeben, so kann man die Grössen $2f$, $2d$, l und g geradezu abgreifen; ist aber das nicht der Fall, so müssen sie in der Regel aus dem gemessenen obern, untern und mittlern Radius oder Durchmesser berechnet werden. Man hat in diesem Falle wenn a, b und c diese drei Radien bezeichnen:

$$12f = a + 4b + c,$$
$$2d = a - c,$$
$$3g = 2b - a - c.$$

Fig. 164.



Auch zur genauen Berechnung von Baumstämmen können diese Formeln verwendet werden.

Ueberhaupt, die Formeln für die Flächeninhalte und die Momente des Parabeltrapezes sind sehr allgemeiner Natur, und durch Substitution specieller Werthe für a, b und c können alle Flächenmomente, die wir bisher bestimmt haben, mit Ausnahme derjenigen, die sich auf Kreise beziehen, erhalten werden.

e) Der Schwerpunkt unregelmässiger Figuren.

Um den Schwerpunkt unregelmässiger Figuren zu bestimmen, theile man dieselben durch Parallellinien in trapezförmige Lamellen, die so schmal sind, dass ihr Schwerpunkt in der halben Breite angenommen werden darf. Bestimme man den Inhalt derselben, der laut Nr. 24 S. 111 der mittlern Höhe einfach proportional ist, wenn die Breite der Lamellen constant ist, dagegen durch Reduction auf die gemeinschaftliche Basis erhalten wird, wenn z. B. bei den Endlamellen, oder bei sonstigen Unregelmässigkeiten des Querschnitts eine abweichende Lamellenbreite angenommen werden

müsste. Endlich betrachte man diese Inhalte als parallele Kräfte, die in dem Schwerpunkt jeder Lamelle wirken, setze sie zu einem Kräftepolygon zusammen und construire mittelst desselben ein Seilpolygon, dessen Ecken auf Parallellinien zur Richtung der Kräfte durch die Schwerpunkte der einzelnen Lamellen liegen: so giebt der Schnitt der äussersten Polygonseiten die Parallele an, auf der der Schwerpunkt liegt.

Diese Operationen sind auf Taf. 12_1 an einem Schienenprofil durchgeführt worden.

Der Querschnitt der Schiene ist symmetrisch bezüglich der Verticallinie, welche alle Horizontallinien in derselben halbirt. Der Schwerpunkt des Querschnittes liegt daher laut Nr. 93 S. 369 in dieser Verticalen, und es ist nur noch seine Höhenlage in ihr zu bestimmen. Wir theilen den Querschnitt durch Horizontallinien in 19 Lamellen, von diesen haben die Lamellen 4 10 11 12 13 14 die normale Breite von 1 Ctm. Um sie auf die zu $a = 3$ Ctm. angenommene Basis zu reduciren, hat man daher nur die Höhe derselben in 3 Theile zu theilen. Die Lamellen 2 3 5 6 7 9 15 17 18 19 haben die halbe normale Breite von 5 Mm., ihr Inhalt wird daher durch $^1/_6$ ihrer Länge dargestellt. Die Lamellen 8 und 16 haben die Breite von 8 Mm. und die 1te die von $3^1/_2$ Mm. erhalten. Ihre Inhalte wurden durch directe Flächenverwandlung auf die Basis $a = 3$ Ctm. bestimmt. Bei diesen Lamellen wurde von der normalen Breite abgewichen, damit in ihren seitlichen Begrenzungen keine allzu auffallenden Ecken entstehen. Auf der Mittellinie jeder Lamelle wurde noch vom linken Rand ab ihr Inhalt aufgetragen, ausgezogen und mit der Lamellen-Nummer versehen.

Indem wir den Ort des Profils auf der Längenaxe der Schiene, welche durch den Schwerpunkt geht, mit x, die Höhe der Mitte der 1ten, 2ten, 3ten etc. Lamelle über dem Schwerpunkt mit $y_1\, y_2\, y_3$ etc., die Breite derselben Lamellen mit $z_1\, z_2\, z_3$.. und den Inhalt der ersten, der zwei ersten, der drei ersten Lamellen mit $F_1\ F_2\ F_3$ .. bezeichnen, kann man den Inhalt der $i$ten Lamelle mit ΔF_i bezeichnen. Dieser Inhalt wird nun durch die reducirte Höhe, die wir mit $\Delta z'_i$ bezeichnen können, in der Art dargestellt, dass

$$\Delta F_i = a\, \Delta z'_i$$

ist. Die Inhalte dieser einzelnen Lamellen denken wir uns horizontal wirkend, und summiren sie auf der horizontalen Linie der z', welche dem Kräftepolygon entspricht. Die einzelnen Segmente

derselben sind dem $\Delta z'$ in jeder Lamelle gleich; wie es bei der sechsten Lamelle angedeutet ist. Der Inhalt der ersten fünf Lamellen z. B. F_5 wird daher durch z'_5 in der Art dargestellt, dass

$$F_5 = a z'_5 \text{ ist.}$$

Der Inhalt des ganzen Schienenquerschnitts ist gleich:

$$F_{19} = a z'_{19} = 3 \,.\, 15{,}92 = 47{,}76 \text{ □Ctm.}$$

Die verticale Entfernung des Kräftepols von dieser Richtungslinie der Kräfte wurde, weil die Momente häufig durch den Inhalt zu dividiren sind, gleich $^1/_2 \,.\, z'_{19} = 7{,}96$ Ctm., gerade der Mitte von z'_{19} gegenüber liegend, angenommen, so dass die äussersten Strahlen des Poles einen rechten Winkel mit einander bilden, und die mit ihnen parallel laufenden äussersten Polygonseiten einen guten Schnitt geben. Mit den Strahlen dieses Büschels laufen die Seilpolygonseiten des dem Schienenprofil nächsten parabelförmig gekrümmten Polygons parallel, und zwar derart, dass die Seite zwischen der fünften und sechsten Lamellenmitte z. B. mit dem Strahl parallel läuft, welcher den Punkt, in welchem die fünfte und sechste Lamelle zusammenstossen, projicirt.

Die äussersten Polygonseiten schneiden sich auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt.

Werden alle Seilpolygonseiten bis zu dieser Horizontalen verlängert, so schneiden sie auf derselben Segmente $\Delta z''$ ab, welche nach Nr. 85 S. 331 dem Moment der Kräfte, d. h. dem Product des Inhalts einer Lamelle mit ihrem Abstand y vom Schwerpunkt in der Art proportional sind, dass sie mit $^1/_2 z'_{19}$ multiplicirt werden müssen, um dieses Moment zu geben. Es ist also z. B.

$$y_6 \Delta F_6 = y_6 \, a \Delta z'_6 = {}^1/_2 \, a z'_{19} \Delta z''_6 = {}^1/_2 \, F \Delta z''_6$$

und $z'_{19} \sum_{o}^{6} y \Delta F = {}^1/_2 \, F z''_6$.

Da $a z'_{19} = F$ Quadratctm. ist, so bedeutet diess, dass das Moment der obersten fünf Lamellen gerade so gross ist, als ob die ganze Fläche von F Quadratctm., am Hebelarm $^1/_2 z''_6$ wirkte. Die äussersten Polygonseiten schneiden auf jeder Horizontalen ein Segment aus, das dem Moment der ganzen Fläche in Bezug auf diese Horizontale, dividirt durch die Poldistanz also gleich: $y_s \, z'_{19} : {}^1/_2 z'_{19} = s$, ist. Wo s dieses Segment und y_s die Entfernung der Horizontalen vom Schwerpunkt d. h. den Hebelsarm an dem

die ganze Fläche z'_{14} wirkt, bezeichnet. Es ist also für jede Horizontale dieses Segment doppelt so gross, als wie sein Hebelsarm. Dieses Verhältniss geht übrigens auch unmittelbar daraus hervor, dass die äussersten Polygonseiten, deren Schnitt den Schwerpunkt bestimmten, mit jeder Horizontalen ein Dreieck bilden, dessen Höhe gleich der doppelten Basis ist.

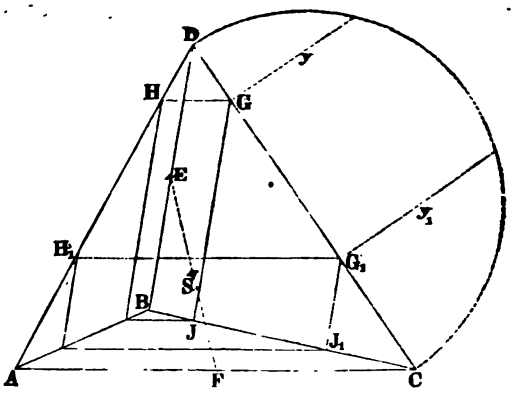
Mit der Schwerpunktslamelle ändern die $\Delta z''$ ihr Zeichen, die z'' nehmen ab, und werden für das ganze Profil $= 0$, wie es für jede durch den Schwerpunkt gehende Axe sein soll.

97. Der Schwerpunkt von Körpern.

a) Der Schwerpunkt der Polyeder.

Wir beginnen mit der Bestimmung des Schwerpunkt eines Tetraeders. Theilt man ein Tetraeder durch Ebenen, die zu zwei gegenüberliegenden Kanten AC und BD (Fig. 165) desselben

Fig. 165.



parallel laufen, so sind die Schnitte Parallelogramme, deren aufeinanderfolgenden Seiten gleiche Winkel mit einander bilden und deren Schwerpunkte alle auf der Linie liegen, welche die Mitten E und F dieser beiden Kanten mit einander verbindet; denn die Ebene AEC hälftet alle zu BD parallelen Parallelogrammseiten und EF halbirt alle Linien, welche diese Schnitte mit einander verbinden. Da sich ferner die Inhalte der Parallelogramme wie

die Producte ihrer Seiten HG und GJ, diese sich aber wie die entsprechenden Segmente DG und GC der Linie CD verhalten, indem

$$\frac{HG}{H_1G_1} = \frac{DG}{DG_1} \text{ und } \frac{GJ}{G_1J_1} = \frac{GC}{G_1C} \text{ ist,}$$

so verhalten sich auch die Producte dieser Seiten, d. h. die Parallelogramme HJ und H_1J_1, wie die entsprechenden Producte der Segmente von DC, nämlich

$$\frac{(HJ)}{(H_1J_1)} = \frac{\overline{HG} \cdot \overline{GJ}}{\overline{H_1G_1} \cdot \overline{G_1J_1}} = \frac{\overline{DG} \cdot \overline{GC}}{\overline{DG_1} \cdot \overline{G_1C}} = \frac{y^2}{y_1^2},$$

wenn man mit y und y_1 die auf G und G_1 errichteten Ordinaten des über DC als Durchmesser beschriebenen Kreises bezeichnet. Da nun je zwei von der Mitte DC gleich weit entfernte Ordinaten gleich lang sind, so sind auch die Flächeninhalte je zweier von der Mitte S der Linie EF gleichweit abstehende Parallelogramme gleich gross.

Man kann daher die Elemente des Tetraeders zu je zweien von der Mitte S von EF gleich weit abstehenden so gruppiren, dass alle Gruppen ihren Schwerpunkt in S haben. S ist daher der Schwerpunkt des Tetraeders. Betrachtet man ABC als Basis des Tetraeders, so liegt E in der halben Höhe desselben, und S in der Hälfte dieser halben Höhe demnach im $^1/_4$ der ganzen Höhe.

Bezeichnen $a\,b\,c\,d\,s$ die Ordinaten der Ecken des Tetraeders und seines Schwerpunktes in Bezug auf irgend eine Ebene, so ist die Ordinate von $F = {}^1/_2\,(a + c)$ und die von $E = {}^1/_2\,(b + d)$ daher die von S, das in der Mitte von E und F liegt:

$$s = {}^1/_4\,(a + b + c + d).$$

Wenn man durch den Schwerpunkt S eines solchen Tetraeders eine Ebene parallel zu den gegenüberstehenden Kanten AC und BD legt, und diese Ebene als Diametralebene eines Ellipsoides betrachtet, in der die parallel liegenden Längen AC und BD conjugirte Durchmesser, und die Verbindungslinie EF der Mitten dieser Kanten der dritte conjugirte Durchmesser wären, so würden sich in allen Parallelschnitten zu AC und BD die Querschnittsflächen des Tetraeders zu denen des Ellipsoides wie $1 : \pi$ verhalten, denn da die Schnitte durch die Mitte S sich so verhalten, und sich alle Schnitte des Ellipsoides gegenseitig wie die Quadrate der

Ordinaten einer Ellipse oder auch eines über CD beschriebenen Halbkreises, also gerade so wie die einzelnen Schnitte des Tetraeders verhalten, so folgt das eben Gesagte.

Da alle Parallelschnitte in diesem Verhältniss $1:\pi$ stehen, so verhalten sich auch die Cubikinhalte beider Körper zwischen zwei beliebigen Parallelebenen, und auch die ganzen Körper so. Endlich fallen in Folge dessen die Schwerpunkte der Körper zwischen zwei gleichen Parallelebenen zusammen.

Ist ein Körper von ebenen Flächen begrenzt, so zerlege man ihn in Tetraeder und denke sich im Schwerpunkt derselben eine ihren Inhalten proportionale Parallelkraft wirksam, so kann man den Mittelpunkt dieser nach Nr. 58 S. 213 bestimmen.

Der analytische Ausdruck für das Moment $\mathfrak{M}$ eines Tetraeders in Bezug auf eine Coordinatenebene, die der yz z. B. ist:

$$24\,\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_{234} \\ x_2 & y_2 & z_{134} \\ x_3 & y_3 & z_{124} \\ x_4 & y_4 & z_{123} \end{vmatrix},$$

wenn man $x_i + x_k + x_l$ mit x_{ikl} bezeichnet. Die Determinante ist gleich dem sechsfachen Inhalt, und die Klammer gleich der vierfachen Abscisse des Schwerpunktes. Der zweite Ausdruck aber ist eine unmittelbare Folge des ersten.

Da jedes Polyeder in Tetraeder zerlegt werden kann, so kann auch mittelst dieser Formeln der Inhalt, das Moment und der Schwerpunkt eines jeden Polyeders bestimmt werden.

Ist das Polyeder ein convexes, dessen Oberfläche also von einer geraden Linie nur in zwei Punkten geschnitten werden kann, und hält man irgend einen Punkt im Innern oder auf dem Umfang bei der Tetraederbildung fest, so sind alle Tetraeder voll, man hat sich daher nur um den absoluten Werth der Inhalte und der Momente zu kümmern. Ist dies aber nicht der Fall, so hat man bei der Reihenfolge der Zeilen darauf zu achten, dass alle vollen und alle Lufttetraeder gleiche Zeichen erhalten. Durch das Anschreiben der Determinante eines Tetraeders ist das Zeichen d. h. die Reihenfolge der Punkte aller übrigen bestimmt.

Wird ein Punkt als gemeinschaftliche Spitze aller Tetraeder festgehalten, so müssen in zwei anliegenden Basen die gemeinschaftliche Seite in jedem der Tetraeder in entgegengesetztem Sinn bezüglich des Sinnes der Basis befahren erscheinen, z. B.: $O\,2\,3\,4$, $O\,5\,4\,3$, $O\,5\,6\,4$.

Hat man bei nicht convexen Polyedern keinen Pol festgehalten, um Luft- und sich durchdringende Tetraeder zu vermeiden, so werden die Spitzen je zweier Tetraeder mit gemeinschaftlicher Basis, auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, und diese Basen daher ebenfalls in entgegengesetztem Sinn umfahren erscheinen müssen, z. B. 1 2 3 4 und 3 2 1 5.

b) Schwerpunkt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas.

Bei Ermittlung der statischen Momente von Körpern, die von Ebenen begrenzt sind, kann man auch das schief abgeschnittene Prisma, welches ein Dreieck der Begrenzung des Körpers zur Basis hat, als Element betrachten, wir wollen deshalb hier auch das Moment dieses Körpers noch berechnen.

Es mögen die parallelen Kanten des Prismas mit der Axe der z parallel laufen, dann kann man es in drei Tetraeder zerlegen, deren Eckpunktcoordinaten in den folgenden Determinanten zusammengestellt sind, deren Summe gleich dem sechsfachen Inhalt des Prismas ist, nämlich:

$$6\,\mathfrak{J} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = F(z_1 + z_2 + z_3),$$

wenn mit $F = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$,

der doppelte Inhalt der Basis des Prismas bezeichnet wird.

Man erhält nun:

$$24\,\mathfrak{M}_x = [(2x_1 + x_2 + x_3)z_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)z_2 + (x_1 + x_2 + 2x_3)z_3]\,F,$$
$$24\,\mathfrak{M}_y = [(2y_1 + y_2 + y_3)z_1 + (y_1 + 2y_2 + y_3)z_2 + (y_1 + y_2 + 2y_3)z_3]\,F,$$
$$24\,\mathfrak{M}_z = [(z_1 + z_2 + z_3)z_1 + (z_2 + z_3)z_2 + z_3^2]\,F.$$

Bezeichnet man ferner s_x die Summe der drei Abscissen $x_1 + x_2 + x_3$, und dividirt dann die obigen Momente durch $\mathfrak{J}$, so erhält man die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$4x_s = s_x + \frac{x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3}{s_z},$$

$$4y_s = s_y + \frac{y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3}{s_z},$$

$$8z_s = s_z + \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{s_z},$$

Aus der Form dieser Gleichungen geht hervor, dass die Coordinaten x_s y_s $2z_s$ der Gleichung der ebenen Endfläche 1 2 3 genügen, und dass demnach der Schwerpunkt in der Ebene liegt, welche alle z halbirt.

Es versteht sich auch ganz von selbst, denn zerlegt man das Prisma in Elementarprismen, so liegen die Schwerpunkte derselben alle in dieser Ebene.

c) Schwerpunkt unregelmässig begrenzter Körper.

Ist der Körper von krummen Flächen begrenzt, so theile man ihn durch parallele Ebenen in Prismatoide, deren gleich grosse Höhen so klein angenommen werden müssen, dass man annehmen darf, es liege ihr Schwerpunkt im Schwerpunkt des Schnittes, der sie halbirt, und es sei ihr Inhalt diesem Schnitte proportional. Dann kann man an diesen Schwerpunkten parallele Kräfte, die diesen Schnitten proportional sind, wirken lassen, und ihren Mittelpunkt ebenfalls nach Nr. 58 S. 213 bestimmen.

Am äussersten Ende solcher Körper erhält man häufig eine Haube. Nimmt man an, die Schnitte derselben senkrecht zu den Schnittebenen seien Parabeln, so darf man den Schwerpunkt dieser Haube im Querschnitt des Schnittes annehmen, der durch das Drittel ihrer Höhe geführt wird. Der Inhalt der Haube kann, wie wir schon Nr. 31 S. 141 bemerkten, ihrer Grundfläche mal ihrer halben Höhe gleich gesetzt werden.

Drittes Kapitel.

Das Trägheitsmoment.

---

98. Höhere Momente im Allgemeinen.

In Nr. 4 S. 28 wurde angedeutet wie Summen von der Form $\Sigma x_k\ y_n\ z_m \ldots P$, die in der Mechanik bisweilen vorkommen, und wo P parallele Kräfte, x, y, z die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen ihres Angriffspunktes von drei beliebigen Ordinaten-Ebenen bezeichnen, gebildet werden können.

In der Statik werden wir nie Kräfte zu summiren haben, die mit mehr als zwei Längen multiplicirt sind, doch wollen wir hier noch etwas ausführlicher angeben, wie solche Summen zu construiren sind.

Man erhält das einfache statische Moment paralleler Kräfte nach Nr. 58 S. 214, in Bezug auf irgend eine, die angenommene Richtung der Kräfte projicirende Ebene, als Segmente ihres Schnittes mit der Projectionsebene, in der das Seilpolygon construirt wird, zwischen den entsprechenden Strahlen des Seilpolygons; und es sind diese Momente gleich der Basis des Kräftepolygons H multiplicirt mit diesen Segmenten.

Man erhält nun ein Moment zweiten Grades dieser Kräfte, indem man mit den obigen Segmenten gerade so als ob sie selbst die Kräfte wären ein neues Polygon mit einer neuen Basis h construirt. Die neuen zweiten Segmente sind dann offenbar den Momenten der ersten als Kräfte betrachteten Segmente, d. h. in der Art den Producten der ersten Segmente mit ihrer Entfernung von der angenommenen projicirenden Ebene proportional, dass sie mit h multiplicirt werden müssen, um diese Producte zu geben. Da nun die ersten Segmente dem Product der Kräfte mit ihrer Entfernung von der angenommenen projicirenden Ebene proportional waren, so sind die zweiten den Producten der Kräfte mit dem Quadrat dieser Entfernungen proportional; da sich ferner diese Segmente ebenso wie die ersten mit Berücksichtigung des Sinnes aneinander reihen, so ist ihre Summe proportional der Summe der Producte jeder einzelnen Kraft mit dem Quadrat ihrer Entfernung von der angenommenen projicirenden Ebene, und zwar muss diese Segmenten-Summe mit Hh multiplicirt werden, um $\Sigma y^2 P$ zu erhalten.

Wir wiederholen kurz die vorzunehmenden Operationen mit Zuhülfenahme algebraischer Zeichen, um die Gedanken zu fixiren. Es seien die Ebene E, in Bezug auf welche das Moment zweiten Grades bestimmt, und die Richtung der Ordinaten y, mit deren Quadrat die Kräfte P multiplicirt werden sollen, gegeben. Nimmt man die Richtung, in der man sich die parallelen Kräfte P wirkend denkt, willkürlich an, so ist dadurch auch die Stellung der Projectionsebene S, in der man das Seilpolygon construiren will, gegeben, weil diese Stellung die Richtungen von P und y enthalten muss. Man kann auch umgekehrt die Projectionsebene S zuerst willkürlich annehmen, dann hat man sich aber die Kräfte P parallel mit dem Schnitt der Ebenen E und S wirkend zu denken. Construirt man nun in der Ebene S ein Kräftepolygon, in dem die Entfernung des Poles O von der Linie der P parallel zu y gemes-

sen $= H$ ist, und mit diesem ein Seilpolygon, so schneiden die Polygonseiten desselben auf dem Schnitt $(E S)$ Segmente ab, welche mit H multiplicirt, dem Product Py gleich sind. Bezeichnet man ihre Summe oder die Länge des Abschnittes der Linie $(E S)$ zwischen den äussersten Polygonseiten mit p, so ist

$$\Sigma Py = p \,.\, H.$$

Es ist das eben Gesagte nichts anderes als die wiederholte Beschreibung des Verfahrens von Nr. 58 S. 213. Wir fahren nun in derselben Weise fort.

Betrachtet man die Längen p als zweites Kräftepolygon, dessen Pol O_1 in einer parallel zu y gemessenen Entfernung h angenommen wird, und construirt man mit Hülfe desselben ein zweites Seilpolygon, so werden die einzelnen Segmente des ersten Polygons auf der Linie $(E S)$ ganz an die Stelle der P in obiger Gleichung treten; die Segmente des zweiten Polygons werden mit h multiplicirt, dem Product der Segmente des ersten mit y, also $\frac{Py^2}{H}$ gleich sein. Bezeichnet man ihre Summe, d. h. wieder die Länge des Abschnittes der Linie $E S$ zwischen den äussersten Polygonseiten mit p_1, so wird man allgemein haben

$$p_1 \, h \, H = \Sigma y^2 \, P$$

Es besteht dasselbe aus dem Product einer Kraft mit zwei lineären Dimensionen; man hat daher eine der drei Längen p_1, h, H, allein nach Nr. 50 S. 186 ganz einerlei welche, auf demselben Maassstab der Kräfte, in welchem zuerst die P aufgetragen wurden, und die beiden andern auf dem Maassstab der Längen abzugreifen.

Häufig drückt man $\Sigma y^2 P$ durch das Product des Quadrats einer Linie k mit ΣP aus. Um zu diesem k zu gelangen, hat man nur eine der beiden Längen $h H$ z. B. $H = \Sigma P$ anzunehmen, dann ist offenbar $k = \sqrt{p_1 \, h}$, denn man hat

$$p_1 \, h H = k^2 \, \Sigma P = \Sigma y^2 \, P.$$

Wenn man die eben beschriebene zweite Operation, in welcher die yP gerade so wie in der ersten die P behandelt wurden statt in der Ebene E mit den Richtungen y zu wiederholen, in einer andern Ebene E_1 mit den Richtungen z wiederholt, so erhält man statt $\Sigma y^2 P$

$$p_1 \, h H = \Sigma y \, z \, P$$

und auf diese Weise im Raum diese Operation mit dem Seilpolygon wiederholend, wie wir es schon Nr. 58 S. 212 gezeigt haben, kann man ganz allgemein

$$p_1 h^{n+m \ldots -1} H = \Sigma y^n z^m \ldots . P$$

bilden.

Bisher ist immer vorausgesetzt worden, dass die Richtungen von P constant seien, und dass die verschiedenen Ebenen EE_1 ... von welchen aus die y z ... gemessen werden, constant seien; allein diess ist keine die Construction beschränkende Bedingung, und man kann, sobald es die Aufgabe verlangt, z. B. wenn P kleinere oder grössere Massen darstellen, welche in allen Richtungen den auf sie wirkenden Kräften zu folgen trachten, die Richtung der P mit der Stellung von E, die jedoch jene Richtung jeweilen enthalten muss, ändern.

Das Zeichnen des letzten Polygons kann man bei der Bestimmung höherer Momente durch die Flächenverwandlung des vorletzten Polygons also durch Umfahren mittelst des Planimeters ersetzen, weil die von einem Theil des Seilpolygons, den beiden äussersten Seiten desselben, und einer Parallelen zu den Kräften begrenzte Flächen dem nächst höheren Moment proportional sind. Zerlegt man nämlich die von den Seilpolygonseiten bestrichene Fläche, die wir mit dem Wort Momentenfläche bezeichnen wollen, in die von zwei aufeinander folgenden Seiten gebildeten Elementardreiecke, siehe Fig. 24 S. 22, so ist die Fläche des ersten Dreiecks gleich:

$$\tfrac{1}{2} (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_1) \frac{\Delta P_1}{H_1} = \tfrac{1}{2} (x_n - x_1)^2 \frac{\Delta P_1}{H_1}.$$

Während also die beiden auf einander folgenden ersten Seilpolygonseiten auf der verticalen rechts das Moment $(x_n - x_1) \frac{\Delta P_1}{H_1}$ ausschneiden, ist die Fläche, die sie einschliessen, gleich der Hälfte des nächst höheren Momentes; die Summe aller dieser Flächenelemente daher gleich der halben Summe der nächst höheren Momenten aller ΔP.

Poncelet hat früher seine Momente durch Flächen bestimmt, allein es entspricht dieses Verfahren kaum mehr dem jetzigen Standpunkt der graphischen Methoden. Das Zeichnen eines neuen Seilpolygons geht rascher von Statten und ist allgemeiner als die

Verwandlung der Flächen; will man aber Planimeter gebrauchen, so verwendet man sogleich das Momentenplanimeter, das wir später in Nr. 114 beschreiben werden, und das gar kein Zeichnen erfordert.

99. Aenderung der Trägheitsmomente in Folge paralleler Verschiebung der Coordinatenebenen.

Sehr wichtig sind die Momente zweiten Grades, die wir mit dem Namen Trägheitsmomente auch dann bezeichnen wollen, wenn die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte nicht von einer Axe, sondern von einer Ebene parallel zu irgend einer Richtung gemessen werden; und wir wollen daher hier einige Eigenschaften derselben entwickeln.

Die Bestimmungen der Trägheitsmomente würden sehr complicirt, wenn man sie für irgend ein beliebiges im Raum gegebenes Punktsystem, in welchem jeder Punkt als Angriffspunkt einer parallelen Kraft gedacht wird, bestimmen wollte. Diese Bestimmungen vereinfachen sich in der Regel bedeutend, sobald man über die Lagen und die Richtungen der Axen verfügen kann, z. B. Symmetrieaxen wählen darf. Um dies zu dürfen, muss man von den für solche Coordinatenaxen ermittelten Trägheitsmomenten auf die Momente für ein beliebiges anderes Coordinatensystem übergehen können. Hier soll nun die Aenderung des Trägheitsmomentes zunächst bei dem Uebergang auf parallel verschobene und später erst auf Axen, die um den Ursprung gedreht wurden, untersucht werden.

Da ein Moment 2ter Ordnung nie mehr als das Product von 2 Coordinaten enthalten kann, so genügt es, diese Aenderungen für $\Sigma\, x y\ \Delta P$ durchzuführen; die Resultate gelten dann auch für $\Sigma\, x z\ \Delta P$, und $\Sigma\, y z\ \Delta P$, und wenn man die zwei Ordinaten gleich setzt auch für die:

$$\Sigma\, x^2\ \Delta P,\ \Sigma\, y^2\ \Delta P \text{ und } \Sigma\, z^2\ \Delta P.$$

Es sei nun $x = x' + x_1$ und $y = y' + y_1$; worin die constanten x_1 und y_1 die Coordinaten des neuen Ursprungs sind, so dass x und x' und y und y' die von einem ΔP zum andern variabeln Coordinaten sind. Setzt man dann noch $\Sigma\, \Delta P = P$ so wird:

$$\Sigma\, x y\ \Delta P = \Sigma\, x' y'\ \Delta P + x_1\, \Sigma\, y'\ \Delta P + y_1\, \Sigma\, x'\ \Delta P + x_1\, y_1\, P.$$

Dieser letzte Ausdruck vereinfacht sich, wenn der 2te Ursprung mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt, dann sind $\Sigma x' \Delta P$, $\Sigma y' \Delta P$ gleich 0 und setzt man überdies das Moment $\Sigma x'y' \Delta P$ in Bezug auf den Schwerpunkt $= C_1 P$ so erhält man einfach:

$$\Sigma xy \Delta P = (x_1 y_1 + C_1) P.$$

Diese Gleichung giebt auch $C_1 P$ wenn man das Moment $\Sigma xy \Delta P$, und die Coordinaten $x_1 y_1$ des Ursprungs gegeben sind. Also:

Die Differenz zwischen den Momenten 2ter Ordnung in Bezug auf den Schwerpunkt, und in Bezug auf irgend einen andern Punkt, ist gleich dem Product der Schwerpunktscoordinaten mit der Summe aller Kräfte.

Es ist üblich, und wie wir in der nächsten Nummer auch sehen werden sehr vortheilhaft, die quadratischen Momente durch die Wurzel aus dem Moment, getheilt durch die Summe der Kräfte darzustellen, d. h. zu setzen:

$$\Sigma x^2 \Delta P = a^2 P, \quad \Sigma xy \Delta P = CP, \quad \Sigma y^2 \Delta P = b^2 P;$$
$$\Sigma x'^2 \Delta P = k^2 P, \quad \Sigma x'y' \Delta P = C_1 P, \quad \Sigma y'^2 \Delta P = h^2 P.$$

Dann hat man die drei einfachen Beziehungen:

$$a^2 = x_1^2 + k^2,$$
$$C = x_1 y_1 + C_1,$$
$$b^2 = y_1^2 + h^2;$$

wo die erste und letzte Gleichung dadurch aus der mittelsten hervorgehen, dass man x_1 x^1 und y_1 y^1 einander gleich setzt.

Häufig ist man in dem Fall ganze Gruppen von ΔP zusammenzusetzen. Es kann das jetzt mit Berücksichtigung der eben erhaltenen Resultate geschehen. Bezeichnen wir die Coordinaten des Schwerpunktes der $i$ten Gruppe mit x_i y_i; die Summe der bezüglichen ΔP mit P_i und behaften die zu dieser Gruppe gehörenden k C h ebenfalls mit dem Index i, so ergiebt die Summirung der Gruppen:

$$\Sigma x^2 \Delta P = a^2 P = \Sigma (x_i^2 + k_i^2) P_i,$$
$$\Sigma xy \Delta P = CP = \Sigma (x_i y_i + C_i) P_i,$$
$$\Sigma y^2 \Delta P = b^2 P = \Sigma (y_i^2 + h_i^2) P_i.$$

Wir haben schliesslich die Momente bezüglich des Schwerpunktes aller Gruppen zu ermitteln. Bezeichnen wir die Coordi-

naten desselben mit $x_s y_s$, und die entsprechenden Momente mit $a_s^2 P$, $C_s P$ und $b_s^2 P$, so erhält man für das zweite Moment, bei Beachtung der eben entwickelten Beziehungen:

$$C_s P = \Sigma (x_i y_i + C_i) P_i - x_s y_s P.$$

$$= \Sigma C_i P_i + \frac{1}{P} [(\Sigma x_i y_i P_i) (\Sigma P_i) - (\Sigma x_i P_i) (\Sigma y_i P_i)].$$

Multiplicirt man die Productensummen aus, so sieht man sofort, dass alle Producte, welche gleiche Indexe haben, also von der Form $x_i y_i P_i^2$ sind, sich gegenseitig aufheben.

Die Producte mit $P_i P_k$ ungleicher Indexe haben den Coefficienten:

$$x_i y_i + x_k y_k - x_i y_k - x_k y_i = (x_i - x_k) (y_i - y_k);$$

Es ist also:

$$C_s P = \Sigma C_i P_i + \frac{1}{P} \Sigma (x_i - x_k) (y_i - y_k) P_i P_k.$$

Durch weiteres Ausmultipliciren von $\Sigma C_i P_i$ mit $P = \Sigma P_i$, erhält man auch noch die folgende jedoch weniger einfache Form:

$$C_s P = \frac{1}{P} \left\{ \Sigma C_i P_i^2 + \Sigma [C_i + C_k + (x_i - x_k)(y_i - y_k)] P_i P_k \right\}.$$

Lässt man wie oben die Axen zusammenfallen, so erhält man auch die Werthe für $a_s^2 P$ und $b_s^2 P$, nämlich:

$$a_s^2 P = \Sigma k_i^2 P_i + \frac{1}{P} \Sigma (x_i - x_k)^2 P_i P_k$$

$$= \frac{1}{P} \left\{ \Sigma k_i^2 P_i^2 + \Sigma [k_i^2 + k_k^2 + (x_i - x_k)^2] P_i P_k \right\},$$

$$C_s P = C_i P_i + \frac{1}{P} \Sigma (x_i - x_k) (y_i - y_k) P_i P_k$$

$$= \frac{1}{P} \left\{ \Sigma C_i P_i^2 + \Sigma [C_i + C_k + (x_i - x_k) (y_i - y_k)] P_i P_k \right\},$$

$$b_s^2 P = \Sigma h^2 P_i + \frac{1}{P} (y_i - y_k)^2 P_i P_k$$

$$= \frac{1}{P} \left\{ \Sigma h_i^2 P_i^2 + \Sigma [h_i^2 + k_k^2 + (y_i - y_k)^2] P_i P_k \right\}.$$

In diesen Gleichungen beziehen sich Σ hinter denen nur ein Index vorkommt, auf alle vorhandenen Gruppen; dagegen Σ mit zwei verschiedenen Indexen i und k auf die $^1/_2 n (n-1)$ möglichen Gruppencombinationen zu je zwei verschiedenen Indexen.

Können die $\Sigma k_i^2 P_i$ vernachlässigt werden, so reducirt sich das Trägheitsmoment $a_s^2 P$ auf die Summe

$$a_s^2 P = \frac{1}{P} \Sigma (x_i - x_k)^2 P_i P_k,$$

sind nur zwei Kräftegruppen P_1 und P_2 vorhanden, so ist wegen $P = P_1 + P_2$:

$$a_s = \frac{\sqrt{P_1 P_2}}{P_1 + P_2} d,$$

worin d die Distanz der beiden Gruppenschwerpunkte bezeichnet. Reducirt man das Moment auf die Distanz d so erhält man die Mittelkraft:

$$\frac{a_s^2 P}{d^2} = P_m = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2},$$

siehe Nr. 2 S. 14.

100. Die Trägheitsellipse.

Nachdem wir die Aenderungen ermittelt haben, welche die Momente 2ter Ordnung erleiden, wenn die Axen parallel verschoben werden, wollen wir noch untersuchen, welche Aenderungen die Drehung hervorbringt.

Suchen wir zunächst das Moment $\Sigma q^2 \Delta P = h^2 P$ bezüglich einer durch den Ursprung gehenden Axe q, durch die als bekannt anzusehenden Momente $\Sigma x^2 \Delta P$, $\Sigma xy \Delta P$, und $\Sigma y^2 \Delta P$, resp. durch $a^2 C$ und b^2 auszudrücken. Dann wollen wir in den, in der Richtung der q gemessenen Entfernungen h, Parallele zu q ziehen und ermitteln, welches geometrische Gebilde alle diese Parallellinien umhüllen.

Vor allem müssen wir darauf aufmerksam machen, dass die Lage dieser Parallellinien ganz unabhängig von der Richtung ist, in welcher die q und h gemessen werden. Denn durch Aenderung dieser Richtung werden beide Theile der Gleichung $\Sigma q^2 \Delta P = h^2 P$, mit einem und demselben Factor multiplicirt, was an der Gleichheit nichts ändert.

Wir können also die Entfernungen der Angriffspunkte der einzelnen ΔP von der Axe q in jeder beliebigen Richtung messen. Indem wir uns die neue q Axe als eine etwas gedrehte x Axe

denken, messen wir die Entfernungen von ihr in der Richtung der y, und erhalten dann einfach:

$$q = y - \tau x$$

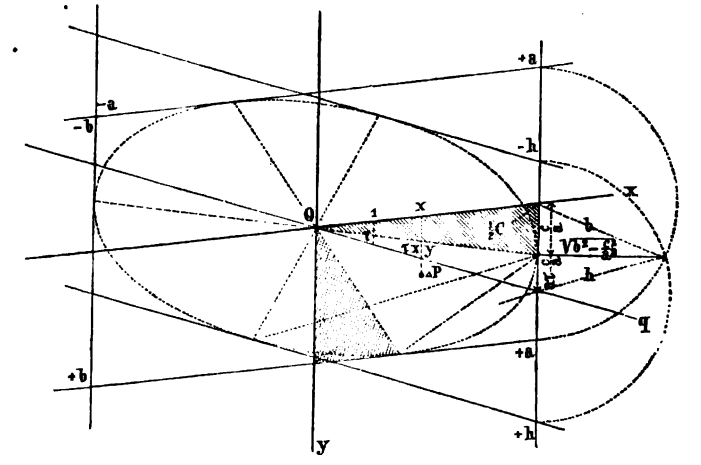
worin τ den Richtungscoefficienten der q Axe, (siehe Fig. 166), bezeichnet. Die Substitution dieses Werthes von q giebt unmittelbar:

$$\Sigma q^2 \Delta P = \tau^2 \Sigma x^2 \Delta P - 2\tau \Sigma xy \Delta P + \Sigma y^2 \Delta P$$

oder:

$$h^2 = a^2\tau^2 - 2C\tau + b^2 = \left(a\tau - \frac{C}{a}\right)^2 + b^2 - \frac{C^2}{a^2}.$$

Fig. 166.



Um h zu construiren, führen wir in den Entfernungen $\pm a$, b Parallele zu den Axen, dann schneiden x und q die Länge $a\tau$ auf der Parallelen zu y bei $x = +a$ aus; ferner tragen wir auf dieselben Parallelen von x aus $\frac{C}{a}$ auf, und errichten dort einen Perpendikel. Auf diesem Perpendikel schneidet ein vom Punkt x mit dem Radius b beschriebener Halbkreis die Länge $\sqrt{b^2 - \frac{C^2}{a^2}}$ ab. Die Entfernung des Endpunktes dieses Perpendikels vom Punkt q ist demnach gleich dem gesuchten h. Mittelst eines Halbkreises schlagen wir diese Länge auf a herunter, und ziehen, wie im Eingang gefordert wurde, durch die Endpunkte die Parallelen zu q.

Alle für verschiedene Richtungen von q so construirten Parallelen umhüllen eine Ellipse, die Trägheitsellipse, welche den Ursprung O zum Mittelpunkt hat, die Parallele $\pm a$ im Punkt $y = \pm \frac{C}{a}$, mithin auch die Parallele $\pm b$ im Punkt $x = \pm \frac{C}{b}$ berührt, und die Coordinatenaxen in den Entfernungen $y = \sqrt{b^2 - \frac{C^2}{a^2}}$ und $x = \sqrt{a^2 - \frac{C^2}{b^2}}$ schneidet, wodurch diese Ellipse mehr als bestimmt ist.

Denn je zwei parallele Tangenten dieser Ellipse schneiden die Tangente a in einer Involution, deren Mittelpunkt im Berührungspunkt $y = \frac{C}{a}$ liegt, und deren Potenz gleich dem Quadrat des conjugirten Durchmessers gleich $b^2 - \frac{C^2}{a^2}$ ist. Da nun auch der mit den Tangenten parallel laufende Durchmesser mit q zusammenfällt, indem er durch O geht und die Strecke zwischen den beiden Tangenten auf $+ a$ halbirt, so folgt, dass die, so wie oben angedeutet construirten Parallellinien, die oben definirte Ellipse umhüllen.

Das Product der Coordinaten der Berührungspunkte auf den Parallelen $\pm a$ und $\pm b$ ist gleich $b \cdot \frac{C}{b} = a \cdot \frac{C}{a} = C$. Da durchaus keine Voraussetzungen über die Lage und Richtung der Coordinatenaxen, und über die Richtungen in der die Coordinaten gemessen werden sollten, gemacht wurden, so gilt das gewonnene Resultat allgemein, und man kann sagen:

Das Moment $\Sigma p q \, \Delta P$, in Bezug auf zwei beliebige Axen ist gleich dem Product der Coordinaten des Endpunktes eines der p oder q in der Trägheitsellipse conjugirten Durchmesser.

Fallen die beiden Axen zusammen, so verwandelt sich das Product der Coordinaten in das Quadrat h^2 der Entfernung der q parallelen Tangente von q.

Sind die Axen p und q conjugirt, dann ist $\Sigma p q \Delta P = 0$. Denn eine Ordinate des Endpunktes eines der Durchmesser p oder q ist in diesem Fall immer gleich 0.

Das Product bleibt das gleiche, welches auch der conjugirte Durchmesser sei; denn aus der obigen Ableitung geht hervor, dass es für x, so wie für y gleich $a \cdot \frac{C}{a}$ und $b \cdot \frac{C}{b} = C$ gleich dem doppelten Flächeninhalt der in Fig. 166 schraffirten Dreiecke sei. Hieraus folgt weiter, dass die beiden Endpunkte auf einer Parallelen zur Diagonale des Vierecks $a\,x, b\,y$ liegen, denn $\frac{C}{a}$ und $\frac{C}{b}$ verhalten sich wie $b:a$, demnach werden die Tangenten $+a$ und $+b$ durch x und $\frac{C}{a}$, dann durch y und $\frac{C}{b}$ in proportionale Theile getheilt. Es kann dies auch daraus geschlossen werden, dass alle Verbindungslinien von Berührungspunkten eines umschriebenen Vierseits durch einen Eckpunkt seines Polardreiecks gehen; für das vorliegende Parallelgramm aber wird dieses Polardreieck aus den zwei Diagonalen und der unendlich fernen Geraden gebildet. Alle Verbindungslinien von Berührungspunkten laufen demnach entweder mit einer Diagonalen parallel oder gehen durch den Mittelpunkt O.

Dieses Verhältniss bietet uns ein einfaches Mittel, den Berührungspunkt auf irgend einer neuen Tangente $+h$ zu bestimmen. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte auf den Parallelen $+a$ und $+h$ läuft parallel mit der Diagonale $a\,q$, $y\,h$. Die Verbindungslinie dieses Berührungspunktes mit O ist der q conjugirte Durchmesser. Die Schnittpunkte dieser conjugirten Durchmesser mit a und der Endpunkt von $\sqrt{b^2 - \frac{C^2}{a^2}}$ bilden ein rechtwinkeliches Dreieck, was noch ein Mittel darbietet, diesen Berührungspunkt zu construiren.

Um den Endpunkt des Durchmessers q zu erhalten, kann man entweder vom Schnitt des q conjugirten Durchmessers mit a aus mittelst eines Halbkreises die Endpunkte von $\sqrt{b^2 - \frac{C^2}{a^2}}$ auf a herunterschlagen und erhält dadurch 2 Punkte der mit jenem Durchmesser parallel laufenden Tangenten an den Endpunkten q; oder man kann auch durch den Berührungspunkt auf $+a$ eine Parallele zu jenem Durchmesser ziehen; die Parallele und a schneiden q in conjugirten Punkten; demnach ist die Länge des halben Durchmessers q gleich der mittlern Proportionale zwischen den Entfernungen

jener Punkte von O. Diese Construction wurde Fig. 166 nicht ausgeführt, weil sie zu klein geworden wäre.

Die Schnittpunkte der Axen der Ellipse mit a giebt derjenige Kreis, der durch die Endpunkte von $\sqrt{b^2 - \frac{C^2}{a^2}}$ und durch O geht. Die Längen derselben können nach irgend einer der eben erläuterten Methoden construirt werden; oder man kann auch einen Durchmesser um 90° drehen; seinen Endpunkt mit dem Endpunkt des conjugirten Durchmessers verbinden; über der Verbindungslinie als Durchmesser einen Kreis beschreiben: dann sind die Entfernungen der dem Mittelpunkt O am nächsten und fernsten gelegenen Kreispunkte gleich den Axenlängen. Die Construction ist die umgekehrte der allgemein üblichen einer Ellipse mittelst zwei concentrischen Kreisen, deren Durchmesser gleich den Axenlängen sind, und bedarf daher keiner weitern Erläuterung.

In den bisherigen Constructionen haben wir vorausgesetzt, es sei die Ellipse mittelst a, C und b zu construiren. Statt nun $C = (\Sigma x y \Delta P) : P$ zu construiren, kann noch das Trägheitsmoment $\Sigma q^2 \Delta P = h^2 P$ für eine dritte Axe construirt werden, und man hat dann die Ellipse aus a b und h zu construiren. Dieser Fall wird sofort auf den vorigen zurückgeführt, wenn man über den Schnittpunkten der Paralleltangenten $\pm b$ und $\pm h$ zu x und q mit der Tangente $+a$ zu y Halbkreise beschreibt. Der Schnitt dieser beiden Halbkreise ist der Endpunkt des Perpendikels $\sqrt{b^2 - \frac{C^2}{a^2}}$, durch dessen Fusspunkt also der Berührungspunkt auf a und die Grösse $\frac{C}{a}$ gegeben sind, von denen wir eben ausgegangen.

101. Die Centralellipse.

Die in der vorigen Nummer entwickelten Constructionen gelten allgemein für alle Punkte; sind sie aber speciell für den Schwerpunkt ausgeführt, so kann man zuerst für beliebige durch ihn gehende Richtungen die Momente bestimmen, und dann nach Nr. 99 auf einfache Weise auf andere parallele Axen übergehen.

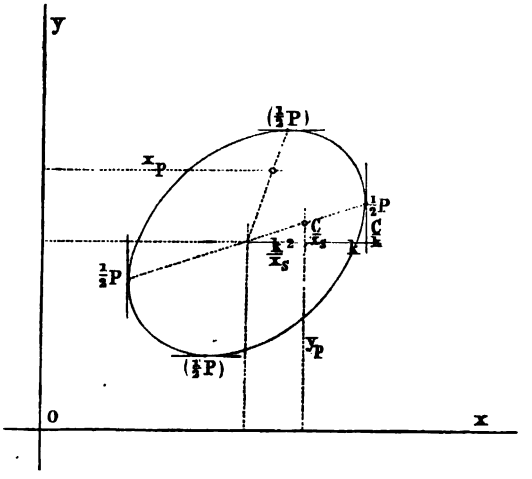
Wegen der Leichtigkeit der Bestimmung beliebiger Momente, von dieser Trägheitsellipse aus, wird man also immer diese Ellipse zuerst construiren, sie trägt den besondern Namen Centralellipse.

Bezeichnet man ferner mit Antipol einer Linie den Pol einer vom Mittelpunkt der Ellipse entgegengesetzt gleich weit entfernten Parallellinie, so ist das Moment $\Sigma xy\,\Delta P$ eines Systems von ΔP bezüglich zweier beliebigen Axen gleich P mal dem Product der Entfernung x_s des Schwerpunktes von einer der beiden Axen multiplicirt mit der Entfernung y_p des Antipols derselben Axe von der andern Axe, oder man hat: $\Sigma xy\,\Delta P = x_s y_p P$; auch $= x_p y_s P$, wenn y_s und x_p die Entfernungen des Schwerpunktes von der x Axe und die des Antipols derselben Axe von der y Axe bezeichnen.

Laut Nr. 99 ist $\Sigma xy\,\Delta P = (x_s y_s + C)P = x_s\left(y_s + \frac{C}{x_s}\right)P$.

Die Entfernung des Pols, also auch des Antipols, der y Axe vom Schwerpunkt ist gleich $\frac{k^2}{x_s}$, wenn k die Entfernung der Parallel-

Fig. 167.



tangente zur y Axe vom Schwerpunkt bezeichnet. Führt man durch den Schwerpunkt eine Parallele zur x Axe, so ist (s. Fig. 167)

die Entfernung des Antipols von dieser Parallelen $= \frac{C}{x_s}$, denn man hat $\frac{C}{k} : k = \frac{C}{x_s} : \frac{k^2}{x_s} = \frac{C}{k^2}$, mithin ist $y_s + \frac{C}{x_s} = y_p$, die in der Richtung der y gemessenen Entfernung des Antipols von der x Axe, woraus die Behauptung folgt.

Die Construction von $x_s\ y_p\ P$ bietet das beste Mittel dar Gruppen von ΔP, z. B. eine grössere Fläche mit anderen Gruppen oder Flächen zusammenzusetzen. Bei der Construction der Seilpolygone denkt man sich für das erste Polygon die Massen im Schwerpunkt, und für das zweite Polygon im Antipol der ersten Axe vereinigt. Bisweilen aber, wenn der Schwerpunkt nahe bei den Axen liegt und z. B. x_s sehr klein, oder gar gleich 0 ist, ist diese Construction nicht mehr wohl ausführbar, weil dann $\frac{k^2}{x_s}$ sehr oder ∞ gross wird. Man kann sich in diesem Fall auf verschiedenartige Weise durch directe Construction der CP helfen. Sehr gute Dienste kann auch der folgende Satz leisten:

Man erhält $(x_s^2 + k^2)\ P$ und $(x_s\ y_s + C)\ P$, indem man sich je $\frac{1}{2}P$ in den Endpunkten des Durchmessers vereinigt denkt, welcher der Axe conjugirt ist, von der aus die x gemessen werden. Denn man hat:

$$(x_s + k)\left(y_s + \frac{C}{k}\right)\frac{1}{2}P + (x_s - k)\left(y_s - \frac{C}{k}\right)\frac{1}{2}P = (x_s y_s + C)\,P.$$

Ist die Centralellipse eines Systems von ΔP gegeben, so ist es jetzt sehr leicht, die Trägheitsellipse für einen beliebigen Punkt zu construiren und umgekehrt.

Wir verbinden den Punkt O mit dem Mittelpunkt S der Centralellipse, dem Schwerpunkt des Systems, und nehmen die Verbindungslinie als Axe der x an. Die Axe der y laufe parallel mit dem conjugirten Durchmesser der Centralellipse. Dann ist in der Gleichung:

$$\Sigma\, x\, y\, \Delta P = (x_s\, y_s + C_s)\, P,$$

$C_s = 0$, weil die durch den Schwerpunkt gehenden Parallelen zu den Axen conjugirte Durchmesser sind, ferner ist $y_s = 0$, mithin auch $\Sigma\, x\, y\, \Delta P = 0$. Die so gewählten Axen sind also in der Trägheitsellipse conjugirt.

Ferner:

$$b^2 = \frac{1}{P} \Sigma y^2 \Delta P = y_s^2 + h^2 = h^2.$$

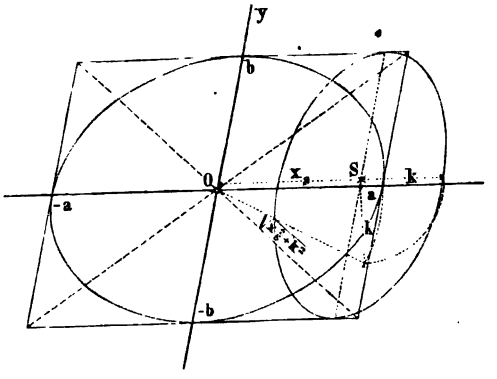
Die beiden der x Axe conjugirten Durchmesser sind gleich lang, oder die zwei Paar der x Axe parallelen Tangenten an beide Ellipsen fallen zusammen.

Endlich hat man noch:

$$a^2 = \frac{1}{P} \Sigma x^2 \Delta P = x_s^2 + k^2.$$

Die Construction von a ist in Fig. 168 angegeben, es muss immer grösser als x_s sein. Wäre die Trägheitsellipse und der

Fig. 168.



Schwerpunkt gegeben, so könnte ebenso leicht $k^2 = a^2 - x_s^2$ construirt werden.

Die (punktirten) Diagonalen des der Trägheitsellipse umschriebenen Parallelogramms sind conjugirte Durchmesser, sie schneiden offenbar die Centralellipse; da nun zwei beliebige Paar conjugirte Durchmesser sich gegenseitig trennen, so muss von je zwei conjugirten Durchmessern einer zwischen diesen Diagonalen durchgehen und demnach die Centralellipse schneiden. Ueberhaupt kann man sagen, von zwei conjugirten Durchmessern muss einer die verschiedenen ΔP trennen, denn lägen alle ΔP in einem und demselben Winkel conjugirter Durchmesser, so wären auch alle $x y \Delta P$ gleichen Zeichens und die $\Sigma x y \Delta P$ könnte nicht gleich 0 sein.

Das eben Entwickelte fassen wir nochmals wie folgt zusammen:

Die Centralellipse eines Systems von ΔP hat mit allen Trägheitsellipsen ein gemeinsames Paar paralleler Tangenten.

Die dem gemeinschaftlichen Durchmesser in beiden Ellipsen conjugirten Durchmesser laufen parallel.

Der Schwerpunkt liegt im Innern aller Ellipsen.

Alle ΔP können nicht in demselben Winkel zweier conjugirten Durchmesser liegen, und von zwei conjugirten Durchmessern schneidet mindestens einer die Centralellipse.

Die Differenz der Quadrate der Längen des gemeinschaftlichen Durchmesser der Centralellipse und einer Trägheitsellipse ist gleich dem Quadrat der Entfernung der beiden Ellipsenmittelpunkte.

Entfernt sich der Mittelpunkt der Trägheitsellipse in irgend einer Richtung vom Schwerpunkt, dem Mittelpunkte der Centralellipse, so bleibt der dieser Richtung conjugirte Durchmesser constant, während der in dieser Richtung selbst liegende Durchmesser stets gleich $\sqrt{x_s^2 + k^2}$ ist, wo x_s jetzt die Entfernung des neuen Mittelpunktes vom Schwerpunkt, und k wie früher die Länge des in der Richtung von x_s liegenden Halbdurchmessers der Centralellipse bezeichnet. Bei wachsender Entfernung des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte der Centralellipse nähert sich der Schwerpunkt asymptotisch dem Umfang der Trägheitsellipse.

Wird irgend eine gegebene Linie als Axe der y angenommen, und soll die andere Axe der z durch den Schwerpunkt gehen und so liegen, dass $\Sigma y z P$ gleich 0 ist, so ist die letztere der der Richtung der y conjugirte Durchmesser der Centralellipse.

Können alle Kräfte so gruppirt werden, dass die Verbindungslinien aller Angriffspunkte einer Gruppe parallel laufen und dass die Angriffspunkte der Mittelkraft einer jeden Gruppe in einer geraden Linie liegen, so sind die mit diesen beiden Linien parallel laufenden Durchmesser der Centralellipse conjugirt; ebenso die parallelen Durchmesser aller Trägheitsellipsen, deren Mittelpunkt auf einem jener Durchmesser der Centralellipse liegen.

Können alle Kräfte so gruppirt werden, dass die Mittelpunkte der Centralellipsen jeder einzelnen Gruppe auf einer Geraden

liegen, und dass die dieser Geraden conjugirten Durchmesser in allen Ellipsen parallel laufen, so ist auch der Parallèldurchmesser der Centralellipse des ganzen Systems der Centrumlinie conjugirt.

Alles eben Gesagte gilt natürlich auch, wenn die conjugirten Durchmesser senkrecht auf einander stehen, d. h. Hauptaxen des Systemes sind.

102. Das Trägheits- und das Centralellipsoid.

Da $\Sigma xy \Delta P$ nur das Product von zwei Coordinaten enthält, so können die gewonnenen Resultate unmittelbar auf den Raum ausgedehnt werden. Projicirt man parallel zur z Axe die Angriffspunkte aller ΔP in die Ebene xy, so wird man in dieser Ebene eine Centralellipse und beliebige Trägheitsellipsen construiren können. Betrachtet man alle diese Curven als die Leitlinien von Cylinderflächen, deren Erzeugungslinien parallel mit der z Axe laufen, so wird das in den drei vorigen Nummern bezüglich der Momente $\Sigma xy \Delta P$ (worin auch $x = y$ sein kann) Entwickelte allgemein räumlich gelten, wenn man an die Stelle der Ellipsen die oben erwähnten Cylinder setzt. Da bezüglich der Stellung und Lage der xz und yz Ebenen durchaus keine bestimmten Voraussetzungen gemacht wurden, so gilt dieses Resultat allgemein: Wenn man in Bezug auf alle Ebenen eines Strahlenbüschels 1ter Ordnung die $\Sigma p^2 \Delta P$ bildet und zu jeder Ebene zwei Parallelebenen in den Entfernungen $\pm \sqrt{\frac{1}{P} \Sigma p^2 \Delta P}$ zieht, so umhüllen alle diese Ebenen einen elliptischen Cylinder, dessen Axe mit der des Ebenenbüschels zusammenfällt. Bestimmt man die beiden Erzeugungslinien, welche in der Diamentralebene liegen, welche der Ebene conjugirt ist, von der aus die p gemessen werden, so ist $\Sigma pq \Delta P$ gleich dem Product $p_1 q_1$ der Entfernungen dieser Erzeugungslinien von den Ebenen der p und q multiplicirt mit P. Beschreibt der Schnittpunkt der beiden Ebenen einen Strahlenbüschel in der xy Ebene um den Ursprung der Coordinaten, so haben alle diese Cylinderflächen zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen, nämlich die, welche mit der Ebene der xy parallel laufen. Ferner hat jeder dieser Cylinder zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen mit dem zuerst erwähnten Cylinder, der die

z Axe zur Axe hatte. Also umhüllen alle diese Cylinderflächen ein Ellipsoid. Nimmt man von den durch die Cylinderaxen gehenden Ebenen irgend eine p heraus, und bestimmt die Erzeugungslinie, welche in der conjugirten Durchmesserebene liegt, so wird diese Erzeugungslinie das Ellipsoid am Endpunkte des auch im Ellipsoid jener Ebene conjugirten Durchmessers berühren. Wird daher noch irgend eine zweite Ebene angenommen, von der ab die q gemessen werden, so ist $\Sigma\, p\, q\, \Delta P$ gleich P mal dem Product $p_1\, q_1$ der Abstände eines der Endpunkte der Durchmesser, welche einer dieser Ebenen conjugirt sind, von denselben Ebenen.

Enthält eine der Ebenen den conjugirten Durchmesser der andern, so ist p_1 oder $q_1 = 0$, also auch $\Sigma\, p\, q\, \Delta P = 0$. Auf diese Weise können also mittelst des Trägheitsellipsoids alle Momente $\Sigma\, p\, q\, \Delta P$ bezüglich zweier beliebigen durch den Ursprung gehenden Ebenen bestimmt werden.

Das Trägheitsellipsoid in Bezug auf den Schwerpunkt heisst Centralellipsoid. Ist dieses gegeben, so kann man auf einfache Weise von zwei Ebenen, die den Schwerpunkt enthalten, auf zwei Parallelebenen übergehen, die durch irgend einen andern Punkt gehen. Für diesen Uebergang gelten ohne irgend eine Aenderung die Formeln von Nr. 99, demnach auch die aus diesen Formeln gezogenen Schlüsse in Nr. 101. Die Formeln nochmals hier zu wiederholen, halten wir für überflüssig, dagegen müssen wir die Schlüsse mit den durch die Erweiterung auf räumliche Gebilde bedingten Abänderungen wiederholt aussprechen. Dabei verstehen wir dem frühern entsprechend unter dem Wort Antipol einer Ebene, den Pol der vom Mittelpunkt entgegengesetzt gleich weit abstehenden Ebene.

Das Moment $\Sigma\, x\, y\, \Delta P$ eines Systems von ΔP bezüglich zweier beliebigen Ebenen $x\,z$ und $y\,z$, ist gleich P mal dem Product der Entfernung x_s des Schwerpunktes von einer dieser Ebenen multiplicirt mit der Entfernung y_p des Antipols derselben Ebene von der andern; oder man hat $\Sigma\, x\, y\, \Delta P = x_s\, y_p\, P$, auch $= x_p\, y_s\, P$, wenn y_s die Entfernung des Schwerpunktes von der $x\,z$ Ebene und x_p die des Antipols derselben Ebene von der andern $y\,z$ bezeichnen. Es ist also gleich 0 für conjugirte Durchmesser.

Man erhält auch $\Sigma x^2 \Delta P$ und $\Sigma xy \Delta P$, wenn man sich die Massen von $^1/_2 P$ an jedem Endpunkt des Durchmessers vereinigt denkt, der der Ebene conjugirt ist, von der aus die x gemessen werden.

Eine und dieselbe Cylinderfläche umhüllt das Centralellipsoid und irgend ein anderes Trägheitsellipsoid.

Die dem gemeinschaftlichen Durchmesser in beiden Ellipsoiden conjugirten Diamentralebenen laufen parallel, und schneiden die Ellipsoide und die Cylinderflächen in den zwei congruenten Berührungsellipsen.

Die Differenz der Quadrate der Längen des gemeinschaftlichen Durchmessers des Trägheits- und des Centralellipsoids ist gleich dem Quadrat der Entfernung der Ellipsoiden-Mittelpunkte.

Der Schwerpunkt liegt im Innern aller Ellipsoide.

Alle ΔP können nicht in demselben Winkel zweier bezüglich eines Trägheitsellipsoids conjugirten Diamentralebenen liegen, und von zwei solchen Ebenen schneidet mindestens eine das Centralellipsoid.

Hier sind unter conjugirten Diamentralebenen solche verstanden, die den conjugirten Durchmesser der andern enthalten.

Denkt man sich, der Mittelpunkt O falle zuerst mit dem Schwerpunkt S zusammen und entferne sich dann in irgend einer constanten Richtung $S\,O$ von demselben, so bewegt sich mit ihm die dieser Richtung conjugirte Ellipse, je zwei conjugirte Durchmesser derselben bleiben parallel, conjugirt und gleich gross, und nur der Durchmesser in der Richtung $O\,S$ der Bewegung vergrössert sich so, dass seine Länge $\sqrt{x_s^2 + k^2}$ ist.

Trotzdem dass der Durchmesser sich beständig vergrössert, nähert sich sein Endpunkt doch mehr und mehr dem Schwerpunkt S; denn $\sqrt{x_s^2 + k^2} - x_s$ nimmt ab mit wachsendem x_s.

Die Tangentialebenen an den Endpunkten dieses wachsenden Durchmessers schneiden den Cylinder, der alle Trägheitsellipsoide umhüllt, die bei dieser Bewegung erzeugt werden, in einer Ellipse, die ebenfalls der Reihe der sich gleichgross bleibenden und

den Cylinder erzeugenden Ellipsen angehört. Projicirt man diese Ellipse aus dem Mittelpunkt des Ellipsoids, so enthält der entstehende Winkelraum jederzeit einen von allen möglichen Gruppen conjugirten Durchmesser, es können sogar deren zwei in der den Winkelraum umhüllenden Winkelfläche liegen; da ferner diese Winkelfläche das Centralellipsoid in zwei ähnlichen Ellipsen schneidet, also ganz durchdringt, so folgt noch, dass von je drei conjugirten Durchmessern eines Trägheitsellipsoids immer mindestens einer durch das Centralellipsoid durchgeht.

Sollen drei conjugirte Durchmesser so bestimmt werden, dass einer durch den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des Centralellipsoids gehe, und die zwei andern in einer gegebenen Ebene liegen, so ist der erste der der Stellung der gegebenen Ebene conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids, und die zwei andern laufen parallel zu zwei conjugirten Durchmessern desselben.

Können alle Kräfte ΔP zu je zweien so gruppirt werden, dass alle Verbindungslinien der Angriffspunkte parallel laufen und dass alle Angriffspunkte der Mittelkräfte der Gruppen in einer Ebene liegen, so sind die Richtung der Parallellinien und die Stellung der Ebene in allen Trägheitsellipsoiden conjugirt, deren Mittelpunkte in der durch den Schwerpunkt des ganzen Systems gehenden Parallelen zu obigen Verbindungslinien liegen. — Es genügt diess für das Centralellipsoid nachzuweisen, denn dann gilt es auch, laut dem eben Bewiesenen, für jedes Ellipsoid, dessen Mittelpunkt in der eben erwähnten Parallelen liegt.

Wird die Ebene, in der die Angriffspunkte der Mittelkräfte jeder Gruppe wirken, zur Ebene der xy und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zu der Verbindungslinie zweier, eine Gruppe bildender Kräfte zur Axe der z gewählt, so ist für je zwei Kräfte P und P_1 einer Gruppe x und y constant, $zP + z_1 P_1$ aber gleich 0, weil der Voraussetzung gemäss der Angriffspunkt der Mittelkraft in der Ebene der xy liegt, mithin ist für jede Gruppe $xzP + xz_1P_1$ und $yzP + yz_1P_1$ gleich 0, also auch ΣxzP und ΣyzP für das ganze System gleich 0, woraus laut obigem folgt, dass die diesen beiden Summen gemeinschaftliche Ordinate z der Ebene der xy conjugirt ist, aus denen das dritte Product ΣxyP gebildet ist.

Können alle Kräfte so gruppirt werden, dass die Angriffspunkte aller zu einer Gruppe gehöriger Kräfte in Parallelebenen

und die Angriffspunkte der Mittelkräfte einer jeden Gruppe in einer geraden Linie liegen, so ist diese Gerade der der Stellung der Parallelebene conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids. Denn wählt man diese Linie zur Axe der z und nimmt man die Ebene der xy parallel zur Stellung der übrigen Parallelebenen an, so ist der Voraussetzung gemäss für jede Gruppe $\Sigma x P$ und $\Sigma y P$ gleich 0; da aber z für jede Gruppe constant ist, so ist auch $\Sigma x z P$ und $\Sigma y z P$ im Ganzen gleich 0, mithin die Axe der z, die auch durch den Schwerpunkt geht (Nr. 59 S. 215) der der Stellung der Ebene der xy conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids.

Können endlich die Kräfte so gruppirt werden, dass die Mittelpunkte der Centralellipsoide aller Gruppen auf einer Geraden liegen, und dass irgend zwei dieser Geraden conjugirte Durchmesser in allen Gruppen parallel laufen, so sind auch im Centralellipsoid des ganzen Systems die Paralleldurchmesser der Verbindungslinie aller Mittelpunkte conjugirt; dieses wird ebenso wie oben bewiesen.

Alles bisher Gesagte gilt allgemein, welches auch die Stellung und Richtung der vorkommenden Ebenen und Linien sei; es gilt also auch dann, wenn sie rechtwinkelig auf einander stehen. Die drei rechtwinkelig auf einander stehenden Durchmesser des Trägheitsellipsoids heissen die Hauptaxen. Die Richtungen der Hauptaxen des Centralellipsoids sind in jedem Ellipsoid, dessen Mittelpunkt auf einer dieser Hauptaxen liegt, conjugirt (sind Hauptaxenrichtungen).

Können die Kräfte zu je zweien so gruppirt werden, dass die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht, und dass der Angriffspunkt ihrer Mittelkraft in dieser Ebene liegt, so ist die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zur Verbindungslinie der Kräfte eine Hauptaxe des Systemes.

Können die Kräfte so gruppirt werden, dass die Angriffspunkte aller zu einer Gruppe gehörigen Kräfte in Ebenen liegen, die senkrecht auf einer geraden Linie stehen, welche gleichzeitig auch die Angriffspunkte der Mittelkraft einer jeden Gruppe enthält, so ist diese Gerade eine Hauptaxe des Centralellipsoids.

Wenn endlich die Kräfte so gruppirt werden, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte in den Centralellipsoiden aller Gruppen eine Hauptaxe ist, so ist sie es auch im Centralellipsoid des ganzen Systems; laufen zudem noch die beiden übrigen Haupt-

axen in allen Partialellipsoiden parallel, so laufen auch die des Centralellipsoids mit ihnen parallel.

Die zuletzt ausgesprochenen Sätze reduciren sich auf die folgenden, wenn die Angriffspunkte aller ΔP in einer Ebene liegen, es tritt dann natürlich eine Trägheits- und eine Centralellipse an die Stelle der Ellipsoide.

Können alle Kräfte ΔP so gruppirt werden, dass die Schwerpunkte aller Gruppen in einer geraden Linie liegen und dass dieser Linie als gemeinschaftlichem Durchmesser aller Gruppen parallele Durchmesser conjugirt sind, so ist auch in der Centralellipse dem gemeinschaftlichen Durchmesser der eine parallele Durchmesser conjugirt, mithin auch in allen denjenigen Trägheitsellipsen, deren Mittelpunkte in dem gemeinschaftlichen oder in dem durch den Schwerpunkt gehenden parallelen Durchmesser liegen.

Können insbesondere alle Kräfte ΔP zu je zweien so gruppirt werden, dass die Angriffspunkte aller Kräfte parallel laufen und die Angriffspunkte der Mittelkräfte jeder Gruppe in einer geraden Linie liegen, so sind die mit diesen Linien parallel laufenden Durchmesser all jener Trägheitsellipsen conjugirt, deren Mittelpunkte in einer der durch den Schwerpunkt gehenden Parallellinien liegen.

An den obigen Aussagen ändert sich nichts, wenn die beiden Richtungen senkrecht aufeinander stehen; die conjugirten Durchmesser sind dann die Axen.

103. System von parallelen Kräften, deren Intensität der Entfernung ihres Angriffspunktes von einer Ebene proportional ist.

Das bisher Entwickelte wollen wir an dem hier in der Ueberschrift gegebenen System von Kräften erläutern, indem wir den Angriffspunkt dieser Kräfte bestimmen.

Es seien ΔP Constanten, die erst noch der Multiplication mit dem in irgend einer Richtung von einer Ebene gemessenen Abstand bedürfen, um zu Kräften zu werden. Behandeln wir diese Constanten schon wie Kräfte, so müssen wir sagen: die Mittelkraft des ganzen Systems ist gleich dem Moment jener Constanten in Bezug auf die gegebene Ebene. Bestimmt man daher den Schwerpunkt derselben nach Nr. 97 c S. 392, so ist die Intensität der

Mittelkraft gleich $x_s P$, wo x_s die in der gegebenen Richtung gemessene Entfernung dieses Schwerpunktes von der gegebenen Ebene E ist; dabei ist die Richtung der Kräfte ganz willkürlich, nur muss dieselbe für alle einzelnen Kräfte die gleiche bleiben.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes der Mittelkraft denken wir uns diesen mit dem schon bestimmten Schwerpunkt des Systems verbunden und nehmen diese Verbindungslinie als Axe der z und die gegebene Ebene E als die der xy an. Dann ist die Intensität jeder einzelnen Kraft dem Product $z \Delta P$ auch dann proportional, wenn z mit der die Intensität der Kräfte bestimmenden Entfernung nicht parallel läuft. Da nun der Angriffspunkt der Mittelkraft der Voraussetzung gemäss in der Axe der z, also gleichzeitig in der Ebene der xz und der yz liegt, so müssen $\Sigma y \,.\, z \Delta P$ und $\Sigma x \,.\, z \Delta P$ gleich 0 sein. Laut Nr. 102 S. 410 ist also die Richtung der z im Trägheitsellipsoid des Ursprungs der Coordinaten, und weil z durch den Schwerpunkt geht, auch im Centralellipsoid der Stellung der Ebene E conjugirt, und dadurch vollständig bestimmt.

Wir haben jetzt noch die Lage des Angriffspunktes in diesem der Stellung der Ebene E conjugirten Durchmesser des Centralellipsoids zu bestimmen. Da das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente aller Einzelkräfte bezüglich der Ebene E ist, so gelangen wir zu dieser Entfernung, indem wir diese Momenten-Summe durch die Mittelkraft dividiren.

Die Momenten-Summe ist:

$$\Sigma z^2 \Delta P = z_s z_p P,$$

wenn Nr. 101 S. 404 entsprechend, mit z_s, z_p die Entfernungen des Schwerpunktes und des Antipoles der Ebene E im Centralellipsoid von dieser Ebene bezeichnet werden.

Wir denken uns dabei z_s und z_p in der Richtung der z gemessen, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, weil diese Entfernungen den in jeder andern Richtung gemessenen Entfernungen proportional bleiben.

Die Intensität der Mittelkraft ist gleich der Grösse:

$$\Sigma z \Delta P = z_s \Sigma P;$$

demnach die Entfernung ihres Angriffspunktes vom Ursprung in der Ebene E gleich:

$$\frac{z_s z_p P}{z_s P} = z_p,$$

gleich der Entfernung der Ebene E von ihrem Antipol im Polarsystem, dessen Ordnungsfläche das Centralellipsoid ist.

Wir wiederholen:

Wenn in einem System von parallelen, sonst aber in jeder beliebigen Richtung wirkenden Kräften, jede einzelne Kraft ihrer in beliebiger Richtung gemessenen Entfernung von einer Ebene E multiplicirt mit einer Constanten ΔP (die auch negativ sein kann) gleich ist, und man die Constanten wie Kräfte behandelt, ihren Schwerpunkt und ihr Centralellipsoid bestimmt: so ist die Intensität der Mittelkraft dieses Systemes gleich der Summe aller Constanten P, multiplicirt mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von der Ebene E, und ihr Angriffspunkt ist im Polarsystem, dessen Ordnungsfläche das Centralellipsoid ist, der Antipol der Ebene E.

Da die statischen und die Trägheitsmomente jetzt an die Stelle der Kräfte und Momente getreten sind, so können sie auch gruppenweise nach den Regeln der vorigen Nummern mit Hülfe der Centralellipsen der einzelnen Gruppen zusammengesetzt werden.

104. Der Kern eines Körpers.

Da über die Zahl und Grösse der ΔP durchaus keine Voraussetzungen gemacht worden sind, so können wir uns die Zahl derselben ∞ gross und die ΔP selbst unendlich klein denken, und es werden die in der vorigen Nummer abgeleiteten Sätze noch volle Gültigkeit haben, z. B. sie werden unmittelbar angewendet werden können auf Körper, deren Elemente Kräften ausgesetzt sind, die dem Inhalt des Elementes multiplicirt mit seiner Entfernung von einer Ebene E proportional sind. Man wird dann das Centralellipsoid gerade so bestimmen können, wie das von $\Sigma \Delta P$ bestimmt wurde.

Denkt man sich ferner die Ebene E der vorigen Nummer nicht mehr fest, sondern veränderlich, so wird sich auch der Angriffspunkt der Mittelkraft der Kräfte nach den Gesetzen der reciproken Verwandtschaft im Polarsystem verändern, dessen Ordnungsfläche

das Centralellipsoid der Constanten P ist, indem der Angriffspunkt immer der Pol der zu E symmetrischen Ebene bleibt.

Beschreibt also die Ebene E:	so beschreibt der Angriffspunkt der Mittelkraft:
Einen Ebenenbüschel 1. Ordnung, indem sie sich um eine gerade Linie dreht.	Eine gerade Linie.
Einen Ebenenbüschel 2. Ordnung, indem sie eine Kegelfläche umhüllt.	Eine ebene Curve 2. Ordnung.
Einen Ebenenbündel 1. Ordnung, indem sie immer durch einen festen Punkt geht.	Eine Ebene, in der er immer bleibt.
Einen Ebenenbündel 2. Ordnung, indem sie eine Fläche 2. Grades umhüllt.	Eine Fläche 2. Ordnung, aus der er nicht heraustritt.
Irgend einen Körper, von dem sie ausgeschlossen ist.	Irgend einen Kern, in dem er bleibt.

Wir wollen die Bedeutung dieses Kernes durch ein Beispiel klar zu machen suchen.

Gesetzt, es seien die einzelnen Theilchen eines Körpers Anziehungskräften ausgesetzt, die von einer Ebene ausgehen, deren Intensität der Entfernung von dieser Ebene proportional ist, und es können die anziehenden Ebenen nie in das Innere des Körpers dringen, sondern ihn höchstens berühren, seien also von ihm ausgeschlossen, so ist der Kern dieses Körpers der Ort aller Lagen des Mittelpunktes der Anziehung, über den dieser nie heraustreten wird.

In der Folge werden wir es zwar nie mit einem System von Kräften zu thun haben, bei welchem deren Angriffspunkte im Raum zerstreut sind, dagegen sehr häufig mit solchen, deren Angriffspunkte alle in eine Ebene fallen. Gerade so wie wir uns oben die Körperelemente als Träger von Kräften dachten, die der Entfernung von einer Ebene E proportional waren, eben so können wir uns auch ebene Flächenelemente als Träger von Kräften denken, die den Entfernungen von Axen in der Ebene proportional sind. Dahin gehören z. B. die Spannungen der Fibern in dem eben vorausgesetzten Querschnitt eines gebogenen Balkens, indem diese Span-

nungen jederzeit den Entfernungen von der neutralen Faser proportional angenommen werden. Wir schliessen daher mit Anwendung des Entwickelten auf die Ebene und insbesondere auf das eben berührte Beispiel.

105. System paralleler an einem ebenen Querschnitt wirkender Kräfte, deren Intensität ihrer Entfernung von einer neutralen Axe proportional ist. Der Kern des Querschnitts.

Um die Resultate dieser Nummer später unmittelbar bei der Widerstandsfähigkeit der Balken verwenden zu können, wollen wir hier schon die zur Ermittelung derselben passende Bezeichnung einführen. Wo es möglich ist, nehmen wir die Axe des Balkens als Abscissenaxe an, die demnach ganz in der Ebene der xy liegt. Für den Querschnitt bleiben uns dann die Ordinaten y und z übrig. Den Ursprung der Coordinaten verlegen wir in den Schwerpunkt und nehmen als z Axe, von der aus die y gemessen werden, die Parallele zur neutralen Faser an, und als y Achse den dieser z Achse in der Centralellipse conjugirten Durchmesser. Ferner sei y_n die Ordinate der neutralen Faser und der Widerstand für ein Flächenelement ΔF, dessen Ordinate $y = c$ ist, gleich ϱ. Dann wird der Widerstand der Faser, deren Entfernung von der neutralen Axe gleich $y_n + y$ ist, gleich $\frac{y_n + y}{y_n + c}\,\varrho\,\Delta F$ sein, weil die Widerstände der einzelnen Fasern sich wie ihre Entfernungen von der neutralen Axen verhalten sollen.

Der totale Widerstand ist daher gleich:

$$Q = \Sigma \frac{y_n + y}{y_n + c}\,\varrho\,\Delta F = \frac{y_n}{y_n + c}\,\varrho\,F.$$

Wir bemerken, dass der Widerstand der Schwerpunktsfaser gleich $\frac{y_n}{y_n + c}\,\varrho$ ist. Man kann daher sagen: der Widerstand in der Parallelen zur neutralen Axe durch den Schwerpunkt ist so gross, als ob der totale Widerstand Q über den ganzen Querschnitt gleichförmig vertheilt wäre.

Das Moment der Widerstände in Bezug auf die z Axe ist gleich:

$$\mathfrak{Q} = \Sigma y \,.\, \frac{y_n + y}{y_n + c}\, \varrho\, \Delta F = \frac{k^2}{y_n + c}\, \varrho\, F,$$

wo, wie in Nr. 99 S. 397, $k^2 F$ das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende z Axe bezeichnet.

Durch Division des Momentes durch die Kraft erhalten wir die Ordinate des Angriffspunktes dieser letztern:

$$y_q = \frac{\mathfrak{Q}}{Q} = \frac{k^2}{y_n}, \text{ woraus}$$

$$y_n\, y_q = k^2 \text{ folgt.}$$

Das Moment $\Sigma z \,.\, \frac{y_n + y}{y_n + c}\, \varrho\, \Delta F$ der Widerstände in Bezug auf die y Axe ist gleich 0, weil wir vorausgesetzt haben, sie gehe durch den Schwerpunkt, woraus $\Sigma z\, \Delta F = 0$, und sei der z Axe conjugirt, woraus $\Sigma y\, z\, \Delta F = 0$ folgt. Der Angriffspunkt liegt also in der z Axe selbst, d. h. in dem der neutralen Axe conjugirten Durchmesser; da nun auch die Ordinate y_q desselben gleich der des Antipols ist, so folgt: der Angriffspunkt des Widerstandes ist der Antipol der neutralen Axe bezüglich der Centralellipse des Querschnitts. Wodurch dieser Widerstand vollständig bestimmt ist.

Sehr häufig ist der Widerstand und sein Angriffspunkt gegeben, und es handelt sich dann darum, die Maximalspannung in der Faser c zu bestimmen. Aus dem gegebenen Angriffspunkt y_q findet man zunächst die Ordinate der neutralen Faser $y_n = \frac{k^2}{y_q}$, und dann aus der ersten der entwickelten Gleichungen:

$$\varrho = \left(1 + \frac{c}{y_n}\right) \frac{Q}{F} = \left(1 + \frac{c\, y_q}{k^2}\right) \frac{Q}{F}.$$

Setzt man $c = y_n$, so ist $\varrho = 2\, \frac{Q}{F}$, d. h. die Spannung in der symmetrisch zur neutralen Axe gelegenen Linie ist doppelt so gross als wie die im Schwerpunkt. Ist $y_q = 0$, so wird $y_n = \infty$ und ϱ constant $= \frac{Q}{F}$. Wenn also Q im Schwerpunkt angreift, oder was dasselbe ist, wenn die neutrale Axe mit den unendlich fernen

Geraden zusammenfällt, so vertheilt sich Q gleichförmig über den ganzen Querschnitt.

Ist $y_\eta = \infty$, $y_n = 0$, d. h. ist $Q = 0$ eine unendlich kleine und ferne Kraft, so geht die neutrale Axe durch den Schwerpunkt; sie theilt die Querschnittsfläche in zwei Theile, deren statische Momente gleich gross sind, und Q reducirt sich auf ein Kräftepaar.

Die Spannung in der Faser c ist gleich:

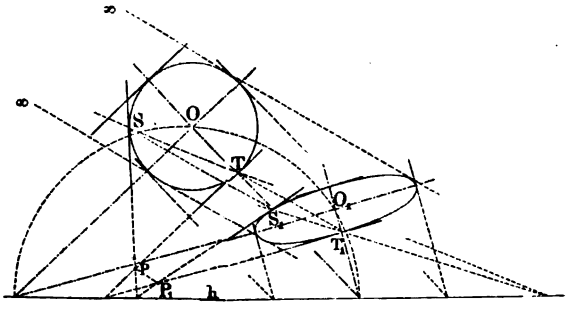
$$\varrho = \frac{\mathfrak{Q}\, c}{k^2 F}.$$

Construirt man für jeden der beiden durch die neutrale Axe getrennten Flächentheile die Centralellipse, so sind die Antipole der neutralen Faser in jeder der beiden Centralellipsen die Angriffspunkte der spannenden und drückenden Q, aus welchen sich das Kräftepaar zusammensetzt. Das Moment $\mathfrak{Q}$, getheilt durch die Entfernung der Antipole, giebt die Grösse der Kräfte.

Sind zwei Querschnitte affin verwandt, so sind es auch alle Constructionslinien, welche zur Bestimmung der Centralellipse dienten. Verwandten Axen werden daher auch verwandte Pole entsprechen und umgekehrt.

Fig. 169 ist der besondere Fall der affinen Verwandtschaft

Fig. 169.



dargestellt, wo die beiden Systeme einen unendlich fernen Punkt ∞ und die gerade Linie h entsprechend gemein haben.

Alle entsprechenden Punkte $O\ P\ S\ T$ und $O, P, S, T,$ liegen auf den Parallelen, die durch den Punkt ∞ gehen, und alle entsprechenden Linien, wie die Tangenten $S\ P$ und $S, P,,$ $T\ P$ und

T, P_n, so wie die Verbindungslinien irgend zweier entsprechenden Punkte schneiden sich auf h.

Da Aehnlichkeit nur ein besonderer Fall von Affinität ist, so gilt das eben Gesagte natürlich auch von ähnlichen Systemen.

Denkt man sich die neutrale Axe nicht mehr fest, so verändert sich auch die Lage des Angriffspunktes der Mittelkraft.

Beschreibt die neutrale Axe:	so beschreibt der Angriffspunkt der Mittelkraft:
Einen Strahlenbüschel 1. Ordnung, indem sie sich um einen Punkt dreht.	Eine gerade Linie.
Einen Strahlenbüschel 2. Ordnung, indem sie immer eine Curve 2. Ordnung umhüllt.	Eine Curve 2. Ordnung.
Den Umfang des Querschnitts, indem sie von ihm ausgeschlossen ist.	Den Kern des Querschnitts, in dem er eingeschlossen bleibt.

Die Bedeutung dieses Kerns erläutern wir an folgendem Beispiel. Es giebt Constructionstheile, wie z. B. Mauern, die nur in einer Richtung widerstehen sollen und können. Mauern sollen z. B. keinen Spannungen, sondern nur Pressungen ausgesetzt sein; damit nun die einzelnen Mauerschichten nur solchen auch wirklich ausgesetzt seien, darf der Mitteldruck der Belastung nicht aus dem Kern heraustreten; findet diess aber dennoch statt, indem die Mauer z. B. zu nahe am Rand belastet wird, so kann sie auf der andern Seite Risse bekommen.

106. Die Formeln des Trägheitsellipsoids.

Es sei ein System von constanten parallelen Kräften, Gewichten oder Massen ΔP_i gegeben, mit denen die Punkte $x_i\ y_i\ z_i$ 1 behaftet sind, und es sei die Summe der Producte aller ΔP mit den Entfernungen $p\ q$ der Punkte von zwei Ebenen, die durch einen festen Mittelpunkt $x_m\ y_m\ z_m$ 1 gehen, zu ermitteln; also $\Sigma p\, q\, \Delta P$, d. h. das sogenannte Centrifugalmoment in Bezug auf die beiden Ebenen, zu bilden. — Es geschieht dies, indem wir die Lage von zwei Ebenen $\xi\ \eta\ \zeta$ 1 und $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ 1, parallel zu jeder der gegebenen so bestimmen, dass das Product ihrer Entfernungen vom Mittelpunkt, multiplicirt mit $\Sigma \Delta P = P$, gleich der gewünschten Summe sei.

Die Entfernung eines Punktes $x_i\ y_i\ z_i\ 1$ von der Ebene $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ ist gleich:

$$\alpha_i \frac{\omega'}{\varrho} = (x_i\ \xi + y_i\ \eta + z_i\ \zeta + 1) \frac{\omega'}{\varrho};$$

die des Mittelpunktes von derselben Ebene:

$$\alpha_m \frac{\omega'}{\varrho} = (x_m\ \xi + y_m\ \eta + z_m\ \zeta + 1) \frac{\omega'}{\varrho},$$

demnach die Entfernung des Punktes von der gegebenen Ebene, mit der α parallel läuft, gleich: $(\alpha_i - \alpha_m) \frac{\omega'}{\varrho}$.

In gleicher Weise erhält man die Entfernungen der zweiten gegebenen Ebene durch den Mittelpunkt, von der gesuchten Parallelebene $\xi'\ \eta'\ \zeta'\ 1$ gleich: $\alpha'_m \frac{\omega'}{\varrho'}$, und von den Punkten i, gleich: $(\alpha'_i - \alpha'_m) \frac{\omega'}{\varrho'}$, indem man in α die $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ durch $\xi'\ \eta'\ \zeta'\ 1$ ersetzt. Die $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ und $\xi'\ \eta'\ \zeta'\ 1$ der beiden gesuchten Ebenen haben daher der Bedingungsgleichung zu genügen:

$$\Sigma (\alpha_i - \alpha_m) \frac{\omega'}{\varrho} \cdot (\alpha'_i - \alpha'_m) \frac{\omega'}{\varrho'} \cdot \Delta P = \alpha_m \alpha'_m \frac{\omega'^2}{\varrho \varrho'} \cdot P.$$

In dieser Gleichung heben sich die Producte $\frac{\omega'^2}{\varrho \varrho'}$; es ist also gleichgültig, in welchen Richtungen die p und q gemessen werden; nur müssen sie, einmal für jede Ebene angenommen, constant bleiben.

Die Gleichung reducirt sich daher auf:

$$\frac{1}{P} \Sigma (\alpha_i - \alpha_m)(\alpha'_i - \alpha'_m) \Delta P = \alpha_m \alpha'_m,$$

oder

$$\frac{1}{P} \Sigma \alpha_i \alpha'_i \Delta P = \alpha_m \alpha'_s + \alpha_s \alpha'_m,$$

wenn mit α'_s und $\alpha_s = x_s\ \xi + y_s\ \eta + z_s\ \zeta + 1$ die Entfernungen des Schwerpunktes von den Ebenen α und α' bezeichnet werden.

Diese Gleichungen ändern sich nicht, wenn α und α', d. h. $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ und $\xi'\ \eta'\ \zeta'\ 1$ vertauscht werden. Es haben demnach ξ und $\xi'\ \eta'$ dieselben Coefficienten als wie ξ' und $\xi'\ \eta$; da ferner jede dieser Grössen nur in der ersten Potenz vorkommt, so ist sie die Polargleichung der Fläche zweiter Classe und Ordnung, deren Gleichung man erhält, indem $\xi, \eta, \zeta, 1 = \xi', \eta', \zeta', 1$ gesetzt wird, nämlich:

$$\frac{1}{P} \Sigma (\alpha_i - \alpha_m)^2 \Delta P = \alpha_m^2,$$

$$\frac{1}{P} \Sigma \alpha_i^2 \Delta P = 2 \alpha_m \alpha_s.$$

Betrachten wir zunächst diese Fläche etwas genauer.

Nimmt man eine zweite Ebene parallel zu $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ so an, dass $+ \alpha_m = - \alpha_m$ wird, so wird auch $+ (\alpha_i - \alpha_m) = - (\alpha_i - \alpha_m)$, d. h. verschiebt man die

Ebene $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ parallel mit sich selbst so über den Mittelpunkt hinüber, dass dieser in der Mitte zwischen den beiden Ebenen sich befindet, so genügen die neuen Coordinaten ebenfalls noch der obigen Gleichung. Da dies nun für jedes $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ gilt, so ist der Mittelpunkt der Momente $x_m\ y_m\ z_m\ 1$ auch der Mittelpunkt der Fläche zweiter Classe.

Die zweite Gleichung stellt eine Fläche dar, die den zwei Kegeln einbeschrieben ist, deren Spitzen im Mittelpunkt $\alpha_m = 0$ und im Schwerpunkt $\alpha_s = 0$ liegen und welche die Fläche $\Sigma\ \alpha_i^2\ \Delta\ P$ umhüllen. Da nun die Gleichung dieser letztern ein Aggregat von Quadraten ist, so kann ihr, wenn alle $\Delta\ P$ positiv sind, durch keinen reellen Werth von $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ genügt werden; die beiden Kegel sind demnach imaginär, und sowohl der Mittelpunkt als auch der Schwerpunkt liegen im Innern der Fläche. Sie ist also ein Ellipsoid. Dieses Ellipsoid heisst das Trägheitsellipsoid, wenn der Mittelpunkt m beliebig, und Centralellipsoid, wenn er im Schwerpunkt angenommen wurde. Die Gleichung des Centralellipsoides ist:

$$\frac{1}{P}\ \Sigma\ \alpha_i^2\ \Delta\ P = 2\ \alpha_s^2.$$

Die Gleichung eines andern Ellipsoids, das seinen Mittelpunkt in $x_n\ y_n\ z_n\ 1$ hat, ist:

$$\frac{1}{P}\ \Sigma\ \alpha_i^2\ \Delta\ P = 2\ \alpha_s\ \alpha_n.$$

Zieht man diese von der des Ellipsoids m ab, so erhält man die Gleichung einer Fläche zweiter Classe, die alle gemeinschaftlichen Berührungsebenen der Ellipsoide m und n auch berührt. Sie ist

$$\alpha_s\ (\alpha_m - \alpha_n) = 0,$$

und zerfällt in die Gleichung des Schwerpunktes und des unendlich fernen Punktes der Verbindungslinie der zwei Mittelpunkte, weil aus $\alpha_m - \alpha_n$ das constante Glied ausfällt. Dass alle Trägheitsellipsoide eine und dieselbe imaginäre Kegelfläche berühren, welche im Schwerpunkt ihre Spitze hat, wussten wir schon; aber aus $\alpha_m - \alpha_n = 0$ ersehen wir noch: je zwei Trägheitsellipsoide desselben Systems von Constanten ΔP werden von einer reellen Cylinderfläche umhüllt, deren Erzeugenden mit der Verbindungslinie ihrer zwei Mittelpunkte parallel laufen. Diese zwei Ellipsoide durchschneiden sich immer nur in einer reellen Curve zweiter Ordnung.

Das eben Gesagte gilt natürlich auch vom Centralellipsoid und jedem andern.

Wir kehren zur Productensumme $\Sigma\ p\ q\ \Delta\ P$ zurück. Da die Gleichung:

$$\frac{1}{P}\ \Sigma\ \alpha_i\ \alpha'_i\ \Delta\ P = \alpha_m\ \alpha'_s + \alpha_s\ \alpha'_m$$

die Polargleichung des Trägheitsellipsoids ist, so wird sie, wenn in ihr die Coordinaten der einen Ebene $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ fest angenommen werden, die der andern aber als Variabeln betrachtet werden, die Gleichung des Poles der festen Ebene darstellen:

Das Centrifugalmoment eines Systems von ΔP in Bezug auf zwei durch den Mittelpunkt des Trägheitsellipsoids gehende Ebenen ist gleich P multiplicirt mit der Entfernung irgend einer Ebene, die man parallel zu einer der beiden gegebenen Ebenen geführt hat, und der Entfernung des Poles dieser Parallelebene von der andern gegebenen Ebene.

Da die Lage der Parallelebene willkürlich ist, so ist man im Stande, $\Sigma pq\Delta P$ mit jeder beliebigen Entfernung zu dividiren. Wird diese Entfernung insbesondere so gewählt, dass die Parallelebene das Trägheitsellipsoid tangirt, so ist der in ihr liegende Berührungspunkt selbst ihr Pol:

Das Centrifugalmoment ist also auch gleich P, multiplicirt mit den beiden Entfernungen eines jeden der Berührungspunkte der vier Parallelebenen, von den beiden gegebenen Ebenen.

Sind die beiden angenommenen Ebenen conjugirt, so geht jede derselben durch die Pole aller Parallelebenen der andern:

Das Centrifugalmoment in Bezug auf conjugirte Ebenen, die durch den Mittelpunkt gehen, ist gleich null.

In den meisten Fällen begnügt man sich damit, das Centralellipsoid zu construiren, und es ist dann das Centrifugalmoment in Bezug auf irgend zwei Ebenen, die nicht durch seinen Mittelpunkt gehen, zu bestimmen. Wir nehmen an, die erste Ebene $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ gehe durch den Schwerpunkt, dann ist $\alpha_s = 0$, und die Gleichung des Poles dieser Ebene in Bezug auf das Trägheitsellipsoid wird:

$$\Sigma\, \alpha_i\, \alpha'_i\, \Delta P = \alpha_m\, \alpha'_s.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der des Antipols der gegebenen Ebene in Bezug auf das Centralellipsoid. In der That, die Polargleichung desselben ist:

$$\Sigma\, \alpha_i\, \alpha'_i\, \Delta P = 2\, \alpha_s\, \alpha'_s.$$

Nimmt man nun $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ so an, dass der Schwerpunkt mitten zwischen ihr und der gegebenen Ebene liegt, so hat man offenbar:

$$2\, \alpha_s = \alpha_m,$$

wodurch die beiden Gleichungen identisch werden:

Das Centrifugalmoment eines Systems von ΔP in Bezug auf zwei beliebige Ebenen im Raum ist gleich P multiplicirt mit der Entfernung des Schwerpunktes der ΔP von der einen Ebene und der des Antipols dieser Ebene, bezüglich des Centralellipsoids, von der andern. Geht die eine Ebene durch den Antipol der andern und umgekehrt, so ist das Centrifugalmoment gleich null.

Endlich geht auch noch aus der Formel:

$$\Sigma(\alpha_i - \alpha_m)(\alpha'_i - \alpha'_m)\Delta P = (\alpha_s - \alpha_m)(\alpha'_s - \alpha'_m)P + \Sigma(\alpha_i - \alpha_s)(\alpha'_i - \alpha'_s)\Delta P$$

welche mit den von Nr. 99 S. 397 identisch ist, hervor, dass:

das Centrifugalmoment in Bezug auf beliebige Ebenen gleich sei P, multiplicirt mit den Entfernungen des Schwerpunktes von den gegebenen Ebenen, plus dem Centrifugal-

moment derselben ΔP in Bezug auf parallele Ebenen durch den Schwerpunkt.

Nichts ändert sich an dem bisher Bewiesenen, wenn die beiden gegebenen Ebenen zusammenfallen. $\Sigma p q \Delta P$ wird dann gleich $\Sigma p^2 \Delta P$ und heisst Trägheitsmoment. Wir wiederholen kurz:

Das Trägheitsmoment eines Systems von ΔP in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt eines Trägheitsellipsoids gehenden Ebene ist gleich:

P mal dem Producte der Entfernungen einer Parallelebene und ihres Poles bezüglich des Trägheitsellipsoids, von der gegebenen Ebene;

oder: P mal dem Quadrat der Entfernung der parallelen Tangentialebenen an das Trägheitsellipsoid;

oder: P mal dem Product der Entfernungen des Schwerpunktes von der einen Ebene und des Antipols dieser Ebene bezüglich des Centralellipsoids von der andern;

oder: gleich der Summe der Producte von P in die Quadraten der Entfernungen des Schwerpunktes von der gegebenen Ebene und von einer parallelen Tangentialebene an das Centralellipsoid.

Zum Gebrauch müssen die obigen Formeln entwickelt werden; wir dividiren sie durch P und setzen:

$$a^2 = \frac{1}{P} \Sigma x_i^2 \Delta P, \quad A = \frac{1}{P} \Sigma y_i z_i \Delta P, \quad x_s = \frac{1}{P} \Sigma x_i \Delta P,$$

$$b^2 = \frac{1}{P} \Sigma y_i^2 \Delta P, \quad B = \frac{1}{P} \Sigma z_i x_i \Delta P, \quad y_s = \frac{1}{P} \Sigma y_i \Delta P,$$

$$c^2 = \frac{1}{P} \Sigma z_i^2 \Delta P, \quad C = \frac{1}{P} \Sigma x_i y_i \Delta P, \quad z_s = \frac{1}{P} \Sigma z_i \Delta P.$$

Dann ist die Polargleichung, von der wir ausgegangen sind:

$$\begin{aligned} 0 = \\ &(a^2 - 2 x_s x_m) \xi \xi' + (C - x_m y_s - x_s y_m) \xi \eta' \\ &+ (B - x_m z_s - x_s z_m) \xi \zeta' - x_m \xi + \\ &(C - y_m x_s - y_s x_m) \eta \xi' + (b^2 - 2 y_s y_m) \eta \eta' \\ &+ (A - y_m z_s - y_s z_m) \eta \zeta' - y_m \eta + \\ &(B - z_m x_s - z_s x_m) \zeta \xi' + (A - z_m y_s - z_s y_m) \zeta \eta' \\ &- x_m \xi' - y_m \eta' \\ &+ (c^2 - 2 z_s z_m) \zeta \xi' - z_m \zeta - \\ &- z_m \zeta' - 1. \end{aligned}$$

Hat man alle Coefficienten berechnet, und handelt es sich darum, das Centrifugalmoment in Bezug auf Ebenen, die durch einen Punkt $x_m\ y_m\ z_m\ 1$ gehen, zu bestimmen, so substituire man alle diese Werthe in die obige Gleichung und das

Product der Abstände des angenommenen Momentenmittelpunktes von zwei Ebenen, deren $\xi\ \eta\ \zeta\ 1$ und $\xi'\ \eta'\ \zeta'\ 1$ der obigen Gleichung Genüge leisten, also:

$$(x_m\ \xi + y_m\ \eta + z_m\ \zeta + 1)\,(x_m\ \xi' + y_m\ \eta' + z_m\ \zeta' + 1)\,\frac{\omega'^2}{\varrho\,\varrho'}\,P$$

ist das gesuchte Moment, wenn die Abstände senkrecht gemessen werden sollen.

Wird $x_m\ y_m\ z_m\ 1$ gleich $x_s\ y_s\ z_s\ 1$ gesetzt, so erhält man die Polargleichung der Centralellipse, nämlich.

$$\begin{aligned}
&(a^2 - 2\,x_s^2\ )\,\xi\xi' + (C - 2\,x_s\,y_s)\,\xi\eta' + (B - 2\,x_s\,z_s)\,\xi\zeta' - x_s\,\xi + \\
&(C - 2\,y_s\,z_s)\,\eta\xi' + (b^2 - 2\,y_s^2\ )\,\eta\eta' + (A - 2\,y_s\,z_s)\,\eta\zeta' - y_s\,\eta + \\
&(B - 2\,z_s\,x_s)\,\zeta\xi' + (A - 2\,z_s\,y_s)\,\zeta\eta' + (c^2 - 2\,z_s^2)\,\zeta\zeta' - z_s\,\zeta - \\
&\quad - x_s\,\xi' \quad - y_s\,\eta' \quad - z_s\,\zeta' - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Ist die Lage des Schwerpunkts von vorn herein bekannt, und ist es möglich, den Anfangspunkt der Coordinaten dorthin zu verlegen, so hat man $x_s\,y_s\,z_s\,1 = 0$ und die Gleichung des Trägheitsellipsoids wird:

$$\begin{aligned}
&a^2\,\xi\,\xi' + C\,\xi\eta' + B\,\xi\zeta' - x_m\,\xi + \\
&C\,\eta\,\xi' + b^2\,\eta\,\eta' + A\,\eta\zeta' - y_m\,\eta + \\
&B\,\xi\,\xi' + A\,\xi\eta' + c^2\,\zeta\,\zeta' - z_m\,\zeta - \\
&- x_m\,\xi' - y_m\,\eta' - z_m\,\zeta' - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Sind endlich nur Momente in Bezug auf den Ursprung zu bestimmen, so ist $x_m\ y_m\ z_m\ 1 = 0$ zu setzen, und man erhält die einfachste Form des Trägheitsellipsoids:

$$\begin{aligned}
&a^2\,\xi\,\xi' + C\,\xi\eta' + B\,\xi\zeta' + \\
&C\,\eta\,\xi' + b^2\,\eta\,\eta' + A\,\eta\zeta' + \\
&B\,\zeta\,\xi' + A\,\zeta\eta' + c^2\,\eta\,\eta' = 1.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung die Centrifugalmomente in Bezug auf Ebenen giebt, die durch den Ursprung gehn also $x_m\ y_m\ z_m = 0$ sind, so reducirt sich dieses Moment einfach auf:

$$\frac{\omega'^2\,P}{\varrho\,\varrho'}.$$

Da zur Bestimmung des Centrifugalmomentes eine der beiden Ebenen $\xi\,\eta\,\zeta\,1$ ganz willkürlich angenommen werden kann, und von der andern die Verhältnisse der Coordinaten gegeben sind, so nehme man auch diese willkürlich an und substituire $\lambda\xi'\ \lambda\eta'\ \lambda\zeta'$ statt $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ in die Gleichungen; aus der Gleichung ersten Grades in Bezug auf λ lässt sich dieses dann leicht bestimmen, und damit hat man zwei Paar Coordinaten, welche den Gleichungen genügen.

Handelt es sich um ein Trägheitsmoment, und will man dasselbe durchaus in der Form eines Abstandes von einer Tangentialebene des Trägheitsellipsoids erhalten, so nehme man auch drei Coordinaten derart an, dass sie die Stellung der Ebene angeben, substituire $\lambda\xi = \lambda\xi'$, $\lambda\eta = \lambda\eta'$, $\lambda\zeta = \lambda\zeta'$ statt $\xi\,\eta\,\zeta$ und $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ in die Gleichungen, und man erhält eine Gleichung zweiten Grades in Bezug auf λ, wodurch dieses und damit die wirklichen Coordinaten berechnet werden können.

Hat man auf diese Weise die Coordinaten einer Berührungsebene berechnet,

und substituirt man sie in eine der Polargleichungen, so stellt diese dann die Gleichung des Berührungspunktes dar, was bereits schon weiter oben bemerkt wurde.

Soll mittelst der Gleichungen eines der Ellipsoide construirt werden, so thut man am besten die Gleichungen der Berührungspunkte der drei mit den Coordinatenebenen parallel laufenden Tangentialebene zu berechnen. Für die mit der yz Ebene parallele Tangentialebene ist η und ζ gleich 0, und ξ bestimmt sich aus:

$$(a^2 - 2\,x_s\,x_m)\,\xi^2 - 2\,x_m\,\xi = 1,$$
$$(a^2 - 2\,x_s\,x_m)\,\xi = x_m \pm \sqrt{a^2 - 2\,x_s x_m + x^2_m} = x_m + W_x,$$

worin W_x für die positive oder negative Wurzelgrösse gesetzt wurde; substituirt man diesen Werth und $\eta = \zeta = 0$ in die allgemeine Polargleichung, so erhält man die Gleichung des Berührungspunktes:

$$\begin{aligned}(a^2 - 2\,x_s x_m)\,W_x\,\xi' &+ [(C - x_m\,y_s - x_s y_m)\,(x_m + W_x) - y_m\,(a^2 - 2\,x_s x_m)]\,\eta' \\ &+ [(B - x_m\,z_s - x_s z_m)\,(x_m + W_x) - z_m\,(a^2 - 2\,x_s x_m)]\,\zeta' \\ &- (x_m + W_x)\,W_x = 0.\end{aligned}$$

In gleicher Weise erhält man die Gleichung des Berührungspunktes der Tangentialebene parallel zur zx Ebene:

$$W_y = \pm\sqrt{b^2 - 2\,y_s y_m + y^2_m},$$

$$[(C - y_m\,x_s - y_s x_m)\,(y_m + W_y) - x_m(b^2 - 2\,y_s y_m)]\,\xi' + (b^2 - 2\,y_s y_m)\,W_y\,\eta' +$$
$$[A - y_m\,z_s - y_s z_m)\,(y_m + W_y) - z_m(b^2 - 2\,y_s y_m)]\,\zeta' - (y_m + W_y)\,W_y = 0.$$

Und die des Berührungspunktes der xy Ebene:

$$W_z = \pm\sqrt{c^2 - 2\,z_s z_m + z^2_m},$$

$$[(B - z_m\,x_s - z_s x_m)\,(z_m + W_z) - x_m(c^2 - 2\,z_s z_m)]\,\xi' + (c^2 - 2\,z_s z_m)\,W_z\,\zeta' +$$
$$[(A - z_m\,y_s - z_s y_m)\,(z_m + W_z) - y_m(c^2 - 2\,z_s z_m)]\,\eta' - (z_m + W_z)\,W_z = 0.$$

Nur wenig vereinfachen sich diese drei Gleichungen von Berührungspunkten für das Centralellipsoid, und wir können uns daher enthalten, diese Gleichungen umzuschreiben; dagegen vereinfachen sie sich bedeutend für das Trägheitsellipsoid des Coordinatenursprungs. Für dieses sind die Gleichungen der Berührungspunkte von Ebenen die mit den Coordinaten parallel laufen:

$$a\,\xi' + \frac{C}{a}\,\eta' + \frac{B}{a}\,\zeta' \pm 1 = 0,$$
$$\frac{C}{b}\,\xi' + b\,\eta' + \frac{A}{b}\,\zeta' \pm 1 = 0,$$
$$\frac{B}{C}\,\xi' + \frac{A}{c}\,\eta' + c\,\zeta' \pm 1 = 0.$$

Da wir in diesen Gleichungen das letzte Glied auf ± 1 gebracht haben, so sind die Coefficienten von $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ die positiven oder negativen Coordinaten dieser Berührungspunkte selbst.

Die reciproken Gebilde der Ellipsoide in cartesischen Coordinaten braucht man nie, wir begnügen uns daher darauf die Formeln einfach hier anzuschreiben. Die Gleichung für das allgemeine Ellipsoid besteht aus der Determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 - 2x_s x_m, & C - x_m y_s - x_s y_m, & B - x_m z_s - x_s z_m, & -x_m, & x \\ C - y_m x_s - y_s x_m, & b^2 - 2 y_s y_m, & A - y_m z_s - y_s z_m, & -y_m, & y \\ B - z_m x_s - z_s x_m, & A - z_m y_s - z_s y_m, & c^2 - 2 z_s z_m, & -z_m, & z \\ -x_m & -y_m & -z_m & -1 & 1 \\ x & y & z & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

oder:

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 & C & B & x_s & x_m & x \\ C & b^2 & A & y_s & y_m & y \\ B & A & c^2 & z_s & z_m & z \\ x_s & y_s & z_s & 1 & 1 & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 & 0 & 0 \\ x & y & z & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die besondere Form für das Centralellipsoid, die sich aus $x_m\ y_m\ z_m\ 1 = x_s\ y_s\ z_s\ 1$ ergiebt, wollen wir nicht anschreiben; dagegen ist die einfachste Form für das Trägheitsellipsoid des Ursprungs, die man durch Substitution von $x_m\ y_m\ z_m = 0$ erhält:

$$0 = + \begin{vmatrix} a^2 & C & B & x \\ C & b^2 & A & y \\ B & A & c^2 & z \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}.$$

107. Die Formeln der Trägheitsellipse.

Wenn man sich auf die Ebene beschränkt, so ändert sich an der ganzen Beweisführung dieser Nummer durchaus nichts, man hat nur statt Ellipsoid, Ellipse und statt Tangentialebene, Tangente zu setzen. Wir dürfen uns daher wohl enthalten, die allgemeinen Sätze hier zu wiederholen, dagegen wollen wir doch die entwickelten Formeln anschreiben; sie entstehen aus den für den Raum dadurch, dass man alle ζ und z gleich 0 setzt.

Alle Momente in der Ebene können durch die folgenden 5 Constanten dargestellt werden.

$$a^2 = \frac{1}{P}\Sigma x_i^2 \Delta P,\ C = \frac{1}{P}\Sigma x_i y_i \Delta P,\ b^2 = \frac{1}{P}\Sigma y_i^2 \Delta P;$$

$$x_s = \frac{1}{P}\Sigma x_i \Delta P, \qquad y_s = \frac{1}{P}\Sigma y_i \Delta P.$$

Die Polargleichung der Trägheitsellipse in Bezug auf den Mittelpunkt $x_m\ y_m\ 1$ ist:

$$\begin{array}{llll}(a^2 - & 2\,x_s\,x_m)\,\xi\,\xi' + (C - x_m\,y_s - & x_s\,y_m)\,\xi\,\eta' - x_m\,\xi \\ (C - y_m\,x_s - & y_s\,x_m)\,\eta\,\xi' + (b^2 & - 2\,y_s\,y_m)\,\eta\,\eta' - y_m\,\eta \\ - & x_m\,\xi' & - y_m\,\eta' - & 1 = 0.\end{array}$$

Hat man irgend zwei Linien gefunden, deren Coordinaten dieser Polargleichung genügen, so ist das Centrifugalmoment in Bezug auf die Parallellinien durch den Mittelpunkt $x_m\ y_m$ 1

$$(x_m\,\xi + y_m\,\eta + 1)\,(x_m\,\xi' + y_m\,\eta' + z_m\,\zeta')\,\frac{\omega'^2}{\varrho\,\varrho}, P.$$

Die Polargleichung der Centralellipse ist:

$$\begin{array}{llll}(a^2 - 2\,x_s^2) & \xi\,\xi' + (C - 2\,x_s\,y_s)\,\xi\,\eta' - x_s\,\xi \\ (C - 2\,y_s\,x_s)\,\eta\,\xi' + (b^2 - 2\,y_s^2) & \eta\,\eta' - y_s\,\eta \\ - & x_s\ \ \xi' & - y_s & \eta' - 1 = 0.\end{array}$$

Wenn der Schwerpunkt mit dem Coordinatenursprung zusammenfällt, ist die Gleichung einer beliebigen Trägheitsellipse:

$$a^2\,\xi\,\xi' + C\,(\xi\,\eta' + \xi'\,\eta) + b^2\,\eta\,\eta' - x_m\,(\xi + \xi') - y_m\,(\eta + \eta') = 1$$

Endlich ist die Polargleichung einer Trägheitsellipse, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt:

$$a^2\,\xi\,\xi' + C\,(\xi\,\eta' + \xi'\,\eta) + b^2\,\eta\,\eta' = 1.$$

Hat man zwei Linien gefunden, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, so beschränkt sich das Centrifugalmoment auf:

$$\frac{\omega'^2\,P}{\varrho\,\varrho'}$$

Setzt man ferner:

$$W_x = \pm\sqrt{a^2 - 2\,x_s\,x_m + x_m^2},$$
$$W_y = \pm\sqrt{b^2 - 2\,y_s\,y_m + y_m^2},$$

so sind die Gleichungen der 4 Berührungspunkte der mit den Coordinatenaxen parallellaufenden Tangenten an die allgemeine Trägheitsellipse:

$$(a^2 - 2\,x_s\,x_m)\,W_x\,\xi' - (x_m + W_x)\,W_x +$$
$$[(C - x_m\,y_s - x_s\,y_m)\,(x_m + W_x) - y_m\,(a^2 - 2\,x_s\,x_m)]\,\eta' = 0$$
$$[(C - y_m\,x_s - y_s\,x_m)\,(y_m + W_y) - x_m\,(b^2 - 2\,y_s\,y_m)]\,\xi' +$$
$$(a^2 - 2\,x_s\,x_m)\,W_y\,\eta' - (y_m + W_y)\,W_y = 0.$$

Die Gleichungen dieser Berührungspunkte für die Trägheitsellipse, die ihren Mittelpunkt im Ursprung hat,

$$a\,\xi' + \frac{C}{a}\,\eta' \pm 1 = 0,$$
$$\frac{C}{b}\,\xi' + b\,\eta' \pm 1 = 0.$$

Die Gleichung der allgemeinen Trägheitsellipse in cartesischen Coordinaten ist:

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 - & 2x_s x_m, & C - x_m y_s - x_s y_m, & -x_m, & x \\ C - y_m x_s - & y_s x_m, & b^2 - & 2 y_s y_m, & -1, & y \\ - & x_m & - & y_m, & -1, & 1 \\ & x & & y & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

oder:

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 & C & x_s & x_m & x \\ C & b^2 & y_s & y_m & y \\ x_s & y_s & 1 & 1 & 1 \\ x_m & y_m & 1 & 0 & 0 \\ x & y & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

die Trägheitsellipse für den Ursprung ist:

$$O = + \begin{vmatrix} a^2 & C & x \\ C & b^2 & y \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} + 2\,\frac{C\,x\,y}{a^2\,b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{C^2}{a^2\,b^2}.$$

Viertes Kapitel.

Construction der Centralellipse und des Kerns von ebenen Figuren.

---

108. Construction der Centralellipse und des Centralellipsoids im Allgemeinen.

Da graphisch durch die Centralellipse und analytisch durch die statischen und die Centrifugalmomente, das Centralellipsoid und alle Momentenverhältnisse eines Querschnitts oder eines Körpers gegeben sind, so wollen wir sie hier für die einfachsten Querschnitte und Körper bestimmen und dann zeigen, wie sie für unregelmässige Querschnitte und Körper construirt werden können.

Unter einfachen Linien, Körpern und Querschnitten verstehen wir solche, an denen von vornherein die Lage zweier conjugirter Elemente, welche durch den Schwerpunkt gehen, angegeben, und die Länge oder der Flächeninhalt der Parallelelemente durch eine einfache Funktion ihrer senkrechten Entfernungen von einander ausgedrückt werden kann. In diesem Fall ist die Rechnung oder vielmehr das Auftragen der ein für allemal berechneten Resultate einfacher als die graphische Methode.

Wählt man daher den, den Parallelelementen conjugirten Durchmesser als Axe der y und bezeichnet man das Parallelelement mit z, durch das hier eine Länge oder eine Fläche dargestellt wird, so ist, je nachdem es sich um eine Fläche oder einen Körper handelt, innerhalb der Grenzen des Körpers oder Querschnittes

Der Inhalt $= \int z \, dy$

Das statische Moment $= \int y z \, dy$

Das Trägheitsmoment $(y_s^2 + k^2) \int z \, dy = \int y^2 z \, dy$

und weil $y_s = \dfrac{\int y z \, dy}{\int z \, dy}$ ist,

so wird das Quadrat des senkrecht zu y gemessenen halben Durchmessers

$$k^2 = \frac{\int y^2 z \, dy}{\int z \, dy} - \left(\frac{\int y z \, dy}{\int z \, dy} \right)^2.$$

Wird zum Ursprung der z das durch den Schwerpunkt gehende Parallelelement gewählt, so wird das letzte Glied

$$\frac{\int y z \, dy}{\int z \, dy} = 0.$$

Sind endlich zwei von diesem Parallelelement gleichweit abstehende z gleich lang oder gleichen Flächeninhalts, so kann man die Integration auf die eine Hälfte des Querschnitts oder Körpers beschränken, weil es genau auf das Gleiche herauskommt, wenn man das halbe Trägheitsmoment mit dem halben Inhalt, als wenn man das ganze Trägheitsmoment mit dem ganzen Inhalt dividirt.

109. Trägheitsmomente von Linien.

a) Das Trägheitsmoment einer geraden Linie.

Wir setzen voraus, die gerade Linie sei gleichmässig belastet, dann wird ihr Gewicht ihrer Länge proportional sein, und es sei diese das Gewicht mit inbegriffen $= l$. Der Schwerpunkt der geraden Linie liegt in diesem Fall in ihrer Mitte, und ihr Trägheitsmoment bezüglich eines Perpendikels auf ihrer Mitte, wird sein:

$$\mathfrak{M} = \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} y^2 \, dy = \frac{1}{12} l^3.$$

Die in der Richtung liegende Axe der Centralellipse ist:

$$a = \frac{1}{\sqrt{12}} l = 0,2889\, l.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Gerade selbst, ist $= 0$, also reducirt sich die Centralellipse auf zwei Punkte in der Linie selbst, deren Entfernung von ihrer Mitte gleich $\frac{l}{\sqrt{12}}$ ist. Jede Tangente an die Centralellipse geht durch einen dieser beiden Punkte, und bei allen Momenten-Rechnungen kann man sich das Gewicht von $\frac{1}{2} l$ in einem derselben vereinigt denken.

Es sei nun die Linie beliebig in der Ebene gegeben und die Coordinaten ihrer Endpunkte $y_1\ z_1$ und $y_2\ z_2$, dann ist das Centrifugalmoment in Bezug auf Parallele zu den Coordinatenaxen durch ihre Mitte gleich:

$$\frac{1}{12} (y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\, l.$$

und in Bezug auf die Axen selbst gleich:

$$\left[\frac{1}{4} (y_2 + y_1)(z_2 + z_1) + \frac{1}{12} (y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\right] l =$$
$$= \frac{1}{6} (2\, y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2\, y_2 z_2)\, l.$$

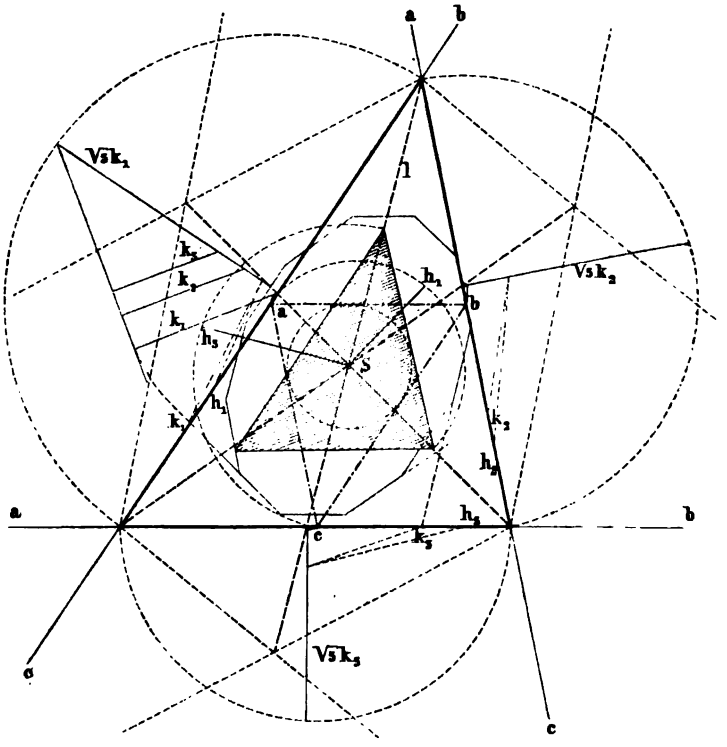
Hieraus ergeben sich die Trägheitsmomente dadurch, dass man $y = z$ setzt und man hat schliesslich:

$$b^2 = \frac{1}{3} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2),$$
$$A = \frac{1}{6} (2\, y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2\, y_2 z_2),$$
$$c^2 = \frac{1}{3} (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2).$$

b) Die Trägheitsmomente des Umfangs eines Dreiecks.

Der Schwerpunkt dieses Umfangs kann auf zweierlei Weise bestimmt werden, indem man sich entweder das Gewicht jeder Seite in ihrer Mitte, oder das halbe Gewicht zweier Seiten in ihrem Schnittpunkt vereinigt denkt. Bei der letzten Annahme könnte man direct nach Fig. 16 S. 13 jede Seite des Dreiecks so theilen, dass sich die Abschnitte umgekehrt verhalten, wie die an ihren Enden vereinigten Gewichte, die den Summen der anstossenden Seiten also $a+b$, $b+c$, $c+a$, proportional sind. Die drei Linien,

Fig. 170.



welche diese Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, schneiden sich im gesuchten Schwerpunkt *S*. Die Annahme, dass das Gewicht jeder Seite in ihrer Mitte vereinigt sei, führt

jedoch zu einer einfacheren und eleganteren Construction. Verbindet man die drei Seitenmitten, in welchen man sich die Gewichte *a b c* vereinigt denkt, durch Linien, so bilden diese das Fig. 170 strichpunktirte Dreieck, dessen Seiten halb so gross als wie die des ganzen Dreiecks sind, und sich demnach verhalten, wie die in den gegenüberliegenden Ecken concentrirter Gewichte. Setzt man zwei solcher Gewichte an den Endpunkten einer Seite zusammen, so wird das Mittelgewicht diese Seite in zwei Segmente theilen, die sich gerade so wie die anliegenden Seiten verhalten. Die Linie, welche den Angriffspunkt eines solchen Mittelgewichtes mit der gegenüberliegenden Seitenmitte verbindet, theilt demnach den Winkel des strichpunktirten Dreiecks in zwei gleiche Theile: Der Schwerpunkt des Dreieckumfangs ist der Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises, dessen Ecken in den Seitenmitten liegen.

Um die Punkte genau zu erhalten, in denen die Verbindungslinien des Schwerpunktes *S* mit einer Ecke die dieser Ecke gegenüberliegende Seite schneidet, wurden die Winkelhalbirungslinien nicht durch die Mitte jeder Seite, sondern zu je zweien durch die Ecken des grossen Dreiecks gezogen. Zwei solche Halbirungslinien durch verschiedene Dreiecksecken, bilden mit zwei Seiten des ganzen Dreiecks ein Viereck, das doppelt so gross und dem Viereck ähnlich ist, als wie dasjenige, welches dieselben Dreiecksseiten mit den beiden parallelen Halbirungslinien bilden. Die Linie, welche aus dem Schnitt dieser beiden Seiten den Schnitt der zwei Parallelen zu den Winkelhalbirungslinien projicirt, geht daher auch durch den Schwerpunkt, der in der Mitte dieser Linie liegt.

Die Parallelen zu den Winkelhalbirungslinien wurden direct als dritte Seiten gleichschenkeliger Dreiecke construirt, welche mit jedem Aussenwinkel und der anliegenden Seite gebildet wurden. Die äussersten Eckpunkte dieser Dreiecke fallen nicht mehr in den Rahmen der Figur, am Rand aber wurde angedeutet, welche Längen abgeschnitten worden sind. Diese Construction des Schwerpunktes ist jedenfalls die einfachste. Die sechs Parallelen zu den Winkelhalbirungslinien bilden ein Sechseck, von dem je zwei gegenüberliegende Seiten doppelt so lang und parallel zu den Linien sind, welche den Schwerpunkt mit den Seitenmitten

verbinden. Der Schwerpunkt ist der Mittelpunkt des Sechsecks, und seine Verbindungslinien mit den Dreiecksecken, sind Diagonalen.

Die Segmente, in welche die Seite c durch die Linie S $(a\,b)$ getheilt wird, sind auf der Seite von a:

$$\frac{b+c}{a+c+b+c}\,.\,c = \frac{s-a}{s+c}\,.\,c$$

wenn die Summe der drei Seiten mit:

$$s = a + b + c,$$

bezeichnet wird.

Und analog auf der Seite von b gleich $\frac{s-b}{s+c}\,.\,c$. Die ähnlichen Ausdrücke für die Segmente der übrigen Seiten, brauchen wir nicht anzuschreiben.

Zur Bestimmung der Segmente auf S $(a\,b)$ bezeichnen wir die Länge dieser Linie mit l, und erhalten dann, indem wir S als Ursprung der Ordinaten auffassen:

die Ordinate der Seite c gleich:

$$\frac{{}^1/_2\,(a+b)}{a+b+c}\,.\,l = \frac{s-c}{2s}\,.\,l,$$

die Ordinate des Eckpunktes $(a\,b)$ gleich:

$$l - \frac{s-c}{2s}\,.\,l = \frac{s+c}{2s}\,l,$$

und die Ordinate der Verbindungslinien der Mitten von a und b gleich:

$${}^1/_2\,l - \frac{s-c}{2s}\,l = \frac{c}{2s}\,l.$$

Das Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf eine Parallele zu c durch S ist gleich:

$$h^2_3\,s = \left[\left(\frac{c\,l}{2\,s}\right)^2 + {}^1/_{12}\,l^2\right](s-c) + \left(\frac{s-c}{2s}\,l\right)^2 c$$

$$= \frac{(s-c)\,(s+3\,c)}{12\,s}\,l^2$$

Um h_3, die halbe Höhe der in der Richtung von l gemessenen Centralellipse zu construiren, bringen wir es in folgende Form:

$$h^2_3 = \frac{s-c}{2s}\, l.\left(\tfrac{1}{6}\, l + \frac{c}{2s}\, l\right).$$

Bemerkt man, dass die Summe der beiden Factoren, in welche wir hier h^2_3 zerlegt haben, gleich $\frac{2}{3}\, l$ ist, so ergiebt sich h_3 als Ordinaten in S eines Halbkreises, der über den an c anstossenden $\frac{2}{3}$ von l beschrieben wird, weil die Ordinate von $c = \frac{s-c}{2\,l}\, l$ ist.

Die Constructionen von h_1 und h_3 wurden in Fig. 170 ausgeführt, und die Endpunkte dieser Ordinaten mit diesen Buchstaben bezeichnet. Das Herunterschlagen dieser Ordinaten auf die betreffenden l giebt die Punkte, in welchen die l von den zu den Seiten parallelen Tangenten geschnitten werden.

Schneidet die Centralellipse den Umfang des Dreiecks oder nicht?

Dies hängt davon ab, ob:

$$h_3 > \text{oder} < \text{als} \frac{s-c}{2s}\, l \text{ ist.}$$

Und dies hängt davon ab, ob:

$$\tfrac{1}{6}\, l + \frac{c}{2s}\, l \lesseqgtr \frac{s-c}{2s}\, l,$$

oder:

$$c \lesseqgtr \tfrac{1}{3}\, s \text{ ist.}$$

Sind die 3 Seiten des Dreiecks ungleich lang, so wird die längste immer grösser, die kürzeste immer kleiner als $\frac{1}{3}$ s sein.

Die längste Seite eines Dreiecks wird daher immer, die kürzeste nie von der Centralellipse seines Umfangs geschnitten.

Ist die Länge einer Seite gleich $\frac{1}{3}\, s$, so ist sie eine Tangente der Centralellipse.

Dieses letztere findet in Fig. 170 mit der Seite b statt, welche demnach von der Centralellipse berührt wird, h_2 ist in diesem Fall $= \frac{1}{3}\, l_2$ und brauchte nicht besonders construirt zu werden.

Die eben aufgestellten Regeln gelten allgemein, also auch von gleichschenkeligen Dreiecken. Sind die gleichen Schenkel grösser, als wie die dritte Seite, so werden beide, nicht aber die dritte Seite geschnitten, und umgekehrt.

Bei gleichseitigen Dreiecken fällt die Centralellipse mit dem einbeschriebenen Kreis zusammen.

Eigentlich genügen die 3 Paare construirter Tangenten zum Zeichnen der Centralellipse, doch wollen wir der Vollständigkeit wegen noch das Trägheitsmoment in Bezug auf l, und das Centrifugalmoment in Bezug auf die Axen l und die Parallele durch S zu c bestimmen.

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe l ist gleich:

$$k^2_3\, s = {}^1/_3 \left(\frac{s-a}{s+c} c\right)^2 \left(\frac{s-a}{s+c} c + a\right) + {}^1/_3 \left(\frac{s-b}{s+c} c\right)^2 \left(\frac{s-b}{s+c} c + b\right)$$

$$= \frac{(s-a)(s-b)}{3(s+c)^2} c^2 s.$$

Um die in der Richtung von c gemessene Höhe k_3 der Centralellipse zu construiren, bringen wir es in die Form:

$$3 k_3^2 = \frac{s-a}{s+c} c . \frac{s-b}{s+c} c.$$

Die beiden Factoren rechts sind nichts anderes als wie die Segmente, in welche l die Linie c theilt, demnach $\sqrt{3}\, k_3$ die in diesen Theilungspunkt errichtete Ordinate, des über c beschriebenen Halbkreises, wie solches in Fig. 170 angedeutet ist.

Um k_3 zu erhalten, hat man diese Ordinaten im Verhältniss von

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{0{,}57734} = \frac{97}{56},$$

zu reduciren. Diese Reduction wurde mittelst des Sinusverhältnisses über den längsten $\sqrt{3}\, k_1$ der Seite a ausgeführt, um so wie es in der Figur angedeutet ist, k_1 k_2 und k_3 zu erhalten. Diese k auf beiden Seiten der l in der Richtung der Seiten aufgetragen, geben die Lagen von 3 weiteren Tangentenpaaren. Die sechs bis jetzt construirten Tangentenpaare genügen vollständig; um die Centralellipse darzustellen, Fig. 170 wurde das durch diese Tangenten gebildete umschriebene Polygon statt der Ellipse ausgezogen. Durch das Centrifugalmoment können auch noch die Berührungspunkte auf diesen Tangenten bestimmt werden. Es ist in Bezug auf l und eine Parallele durch S zu c gleich:

$$As = \left[\frac{cl}{2s}\cdot\frac{(s-a)\,c}{2\,(s+c)} - \frac{l}{12}\cdot\frac{(s-a)}{s+c}\,c\right]a + \left[-\frac{cl}{2s}\cdot\frac{(s-b)\,c}{2\,(s+c)}\right.$$

$$\left. + \frac{l}{12}\cdot\frac{s-b}{s+c}\,c\right]b + \frac{(s-c)\,l}{2\,s}\left(\frac{(s-b)}{s+c}\cdot c - {}^1/_2\,c\right)c = \frac{(a-b)\,c^2 l}{6\,(s+c)}.$$

Laut Nr. 109a S. 431 ist nämlich dieses Centrifugalmoment gleich den Producten der Coordinaten der Linienmitten $+{}^1/_{12}$ der Producte der Coordinatendifferenzen der Linienendpunkte. Dieses letztere Product ist aber bei der Linie c gleich 0, weil die Ordinatendifferenz in der Richtung der l gleich 0 ist.

A bringen wir auf die Form:

$$A = \frac{a-b}{2\,(s+c)}\cdot c.\,\frac{c}{3s}\,l.$$

$\frac{a-b}{2\,(s+c)}\,c = \frac{s-b}{s+c}\,c - {}^1/_2\,c$, ist die Abscisse der Mitte der Linie c in Bezug auf l, $\frac{c}{3s}\,l$ ist ${}^2/_3$ der Ordinate $\frac{c}{2s}\,l$ der Verbindungslinie der Mitten von a und b. Um daher $\frac{A}{k}$ und $\frac{A}{h}$ die Abscissen und Ordinaten der Berührungspunkte zu erhalten, wurden vom Fusse eines jeden $\sqrt{3}\,k$ aus in der Seite h und k gegen den entfernten Eckpunkt auf dem Perpendikel ${}^2/_3\,\frac{c}{2s}\,l$ aufgetragen, der Endpunkt der letztern Länge mit den von h und k verbunden, und durch die Mitte jeder Seite, d. h. durch den Endpunkt von $\frac{a-b}{2\,(s+c)}$ Parallele zu diesen zwei Verbindungslinien gezogen, welche auf $\sqrt{3}\,k$ die Längen $\frac{A}{h}$ und $\frac{A}{k}$ abgeschnitten haben. In Fig. 170 sind diese Grössen so klein geworden, dass man sie kaum berücksichtigen konnte.

Wir haben jetzt noch den Centralkern des Dreiecks zu construiren. Die Ordinate des Antipoles der Seite c ist gleich:

$$-h_3^2 : \frac{s-c}{2s}\,.\,l = -\frac{(s-c)\,(s+3c)}{12\,s^2}\,l^2 : \frac{s-c}{2s}\,l = -{}^1/_6\,l - \frac{c}{2s}\,l.$$

oder gleich der Ordinate des obern Drittels der Länge l.

Die Eckpunkte des Centralkerns des Umfangs

eines Dreiecks liegen also in $^2/_3$ der Höhe des Dreiecks.

Allein sie liegen nicht auf der Linie l, sondern auf der Linie, welche die Berührungspunkte auf der zu c parallelen Tangenten mit S verbindet, und welche mit l auf diesen Tangenten die Segmente $\frac{A}{h}$ ausschneiden, die wir so eben construirt haben. In Fig. 170 ist das Segment $\frac{A}{h_2}$ noch merklich lang ausgefallen, die Segmente $\frac{A}{h_1}$ und $\frac{A}{h_3}$ so klein, dass die Figur aussieht, als ob der Centralkern schlecht eingezeichnet sei. Der Centralkern sieht aus, als ob er dem Dreieck ähnlich wäre, und zwar halb so gross sei; allein es ist das nur annähernd der Fall, und die entsprechenden Seiten convergiren, obgleich nur sehr wenig in Fig. 170.

110. Centralellipse und Kern ebener, geradlinigt begrenzter Figuren.

a) Die Centralellipse und der Kern eines Parallelogramms.

Conjugirte Durchmesser sind die durch den Schwerpunkt gehenden Parallelen zu den Seiten.

$y = b$ ist constant; bezeichnet man die Höhe des Parallelogramms mit h, so erhält man:

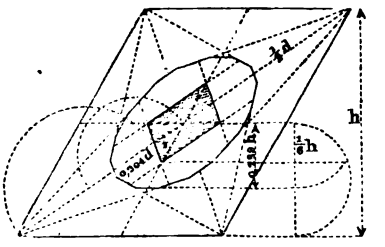
$$k^2 = \frac{\int_0^{1/2\,h} b\, z^2\, dz}{\int_0^{1/2\,h} b\, dz} = {}^1/_{12}\, h^2$$

$$= (0{,}2887\ h)^2.$$

Am schnellsten gelangt man wohl immer zur Centralellipse, wenn man direct die Länge 0,2887 h als senkrechte Höhe der halben Ellipse (Fig. 171) aufträgt, will man aber diese Grösse durchaus construiren, so kann man über der halben Höhe einen

Halbkreis beschreiben, dann ist die Sehne, welche $^1/_6\ h$ (siehe Fig. 171) zur Projection hat, die halbe Höhe der Ellipse, denn ihr Quadrat ist $= {}^1/_6\ h\ .\ {}^1/_2\ h$ $= {}^1/_{12}\ h^2$.

Fig. 171.



Das Trägheitsmoment in Bezug auf den Durchmesser b ist natürlich gleich $^1/_{12}\ b\ h^3$.

Nimmt man eine Seite als Axe an, so erhält man als Entfernung des Mittelpunktes aller Kräfte, oder als Entfernung der entsprechenden Ecke des Kernes von dieser Axe:

$$y_s + \frac{k^2}{y_s} = {}^1/_2\ h + \frac{{}^1/_{12}\ h^2}{{}^1/_2\ h} = {}^1/_2\ h + {}^1/_6\ h.$$

Die halbe Höhe des Kernes ist daher gleich dem $^1/_6$ der Höhe des Parallelogramms. Er nimmt also in Höhe das innere Drittel desselben ein.

Die zwei parallelen Seiten entsprechenden Ecken liegen natürlich auf dem conjugirten, den andern Seiten parallellaufenden Durchmesser. Da ferner die Diagonalen eines jeden, einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen Vierecks conjugirt sind, so laufen auch die Tangenten an den Curvenpunkten der einen Diagonale mit der andern parallel. Die Curvenpunkte selbst sind dadurch gegeben, dass sie vom Eckpunkt des Parallelogramms und von der schon bekannten Kernseite harmonisch getrennt sind, während ihre Mitte mit dem Mittelpunkt der Curve zusammenfallen muss. Die Hälfte des sie verbindenden Durchmessers (siehe Fig. 171) ist daher gleich der Entfernung des Mittelpunktes der Curve vom Schnitt zweier Halbkreise, wovon der eine über den zu trennenden Punkten und der andere über der Distanz der Mittelpunkte dieses Kreises und der Curve beschrieben wurde; denn die Schnitte zweier sich rechtwinkelig schneidender Kreise mit einer Linie, die durch den Mittelpunkt des einen geht, liegen immer harmonisch.

Uebrigens kann man diesen Durchmesser direct auftragen, da er von der Kernseite in dem $^1/_{12}$ der ganzen Diagonallänge d geschnitten wird und demnach

$$\frac{k^2}{1/2\, d} = 1/12\, d$$

sein soll, so muss seine halbe Länge

$$k = \sqrt{1/24\, d^2} = 0{,}2041\ d \text{ sein.}$$

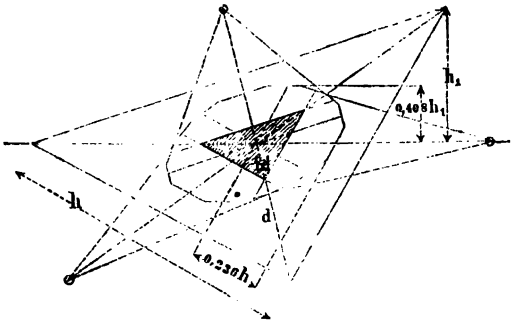
Werden auch noch die 8 durch die Parallelogrammecken gehenden Tangenten, von denen nur eine construirt zu werden braucht, weil alle anderen symmetrisch liegen, eingezeichnet, so sind 16 Tangenten vorhanden, welche Fig. 171 statt der Ellipse ausgezogen wurden.

Verwandelt sich das Parallelogramm in ein Quadrat, so stehen die beiden gleich langen conjugirten Durchmesser senkrecht auf einander und die Ellipse wird ein Kreis; dasselbe findet natürlich auch bei allen stern- und kreuzförmigen Querschnitten statt, welche bezüglich von 4 Durchmessern, die Winkel von 45° mit einander bilden, symmetrisch sind.

b) Die Centralellipse und der Kern eines Dreiecks.

Conjugirte Durchmesser sind (Fig. 172) die Linie, welche eine Spitze mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet,

Fig. 172.



und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zu dieser Seite. Bezeichnet man die Länge einer Lamelle in der parallel zu h gemessenen Entfernung z von der Spitze mit $\tau\ z$, so ist das Quadrat der halben Höhe der Ellipse:

$$k^2 = \frac{\int_0^h \tau\, z^3\, dz}{\int_0^h \tau\, z\, dz} - \left(\frac{\int_0^h \tau\, z^2\, dz}{\int_0^h \tau\, z\, dz}\right)^2$$

$$= \left(\tfrac{2}{4} - (\tfrac{2}{3})^2\right) h^2 = \tfrac{1}{18}\, h^2 = (0{,}2357\, h)^2.$$

Hierdurch ist auch die Höhe der Centralellipse des halben Dreiecks mit $\frac{1}{18}\, h_1^2$ bekannt; um aber den Trägheitshalbmesser bezüglich der um $\frac{1}{3}\, h_1$ vom Schwerpunkt desselben abstehenden Halbirungslinie des Dreiecks zu erhalten, hat man nur $(\frac{1}{3}\, h_1)^2$ zu addiren.

Das Quadrat der halben Höhe der Ellipse über der Halbirungslinie des Dreiecks ist demnach:

$$= (\tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{9})\, h_1^2 = \tfrac{1}{6}\, h_1^2 = (0{,}4082\, h_1)^2.$$

Wiederholt man die sub a) angeführten Schlüsse, so folgt, dass die Entfernung der der Spitze des Dreiecks entsprechenden und mit der gegenüberliegenden Seite parallel laufenden Seite des Kerns vom Schwerpunkt gleich:

$$\frac{\frac{1}{18}\, h^2}{\frac{2}{3}\, h} = \tfrac{1}{12}\, h,$$

und die Entfernung der einer Seite entsprechenden Ecke des Kernes vom Schwerpunkt

$$= \frac{\frac{1}{18}\, h^2}{\frac{2}{3}\, h} = \tfrac{1}{6}\, h$$

sei. Bemerkt man nun, dass $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{12}$ die $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ sind, so folgt, dass der Kern ein dem gegebenen Dreieck ähnliches und bezüglich des Schwerpunktes ähnlich gelegenes Dreieck sei, dessen sämmtliche Dimensionen $\frac{1}{4}$ des gegebenen Dreiecks sind.

$\sqrt{\frac{1}{18}\, h^2}$ und $\sqrt{\frac{1}{6}\, h_1^2}$ können auch so construirt werden, wie es bei dem Paralleltrapez gezeigt werden wird.

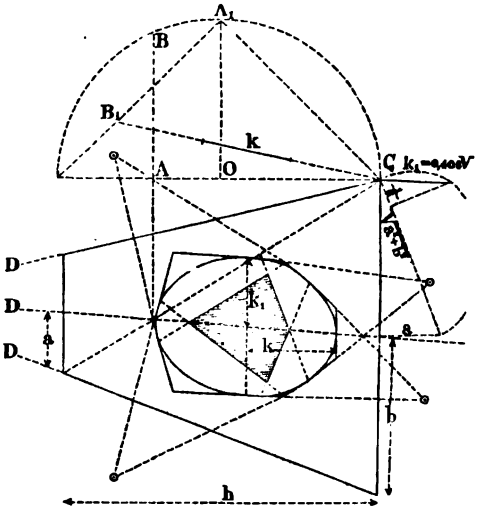
Bei der Construction giebt jede Seite 4 Tangenten der Ellipse, werden ausserdem noch durch jeden Eckpunkt die beiden Tangenten an der Trägheitsellipse construirt, so erhält man 18 Tangenten, welche Fig. 172 statt der Ellipse ausgezogen wurden.

c) Die Centralellipse und der Kern eines Paralleltrapezes.

Conjugirte Durchmesser sind: die Linie, welche die Mitten der beiden Parallelseiten mit einander verbindet und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zu diesen.

Wir theilen das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, deren Inhalte gleich $a\,h$ und $b\,h$ sind (siehe Fig. 173, be-

Fig. 173.



züglich der Bezeichnung und des Folgenden). Die Schwerpunkte dieser beiden Dreiecke liegen in den Dritteln von h und die Entfernung derselben wird durch den Schwerpunkt des Trapezes im umgekehrten Verhältniss von a und b getheilt, so dass diese Entfernungen gleich

$$\frac{b}{a+b} \cdot {}^1/_3\, h \text{ und } \frac{a}{a+b} \cdot {}^1/_3\, h \text{ sind.}$$

Das Trägheitsmoment der beiden Dreiecke oder des Trapezes bezüglich des zu den Parallelseiten parallelen Durchmessers ist demnach gleich:

$$\left[{}^1/_{18} + \left(\frac{b}{3(a+b)}\right)^2 \right] h^2 \cdot a\,h + \left[{}^1/_{18} + \left(\frac{a}{3(a+b)}\right)^2 \right] h^2 \cdot b\,h.$$

Theilt man dieses Moment durch den Inhalt $(a + b)\,h$, so erhält man:

$$k^2 = \left({}^1/_{18} + \frac{a\,b}{9\,(a+b)^2} \right) h^2.$$

Um dieses k zu construiren, schreibe man es also an:

$$3\,k = \sqrt{{}^1/_2 h^2 + \frac{a\,b}{(a+b)^2} \cdot h^2}.$$

Wir beschreiben einen Halbkreis über der Höhe h (Fig. 173). Jede der Seiten des ihm einbeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecks ist gleich:

$$A_1\,C = \sqrt{{}^1/_2\,h^2}.$$

Die durch den Kreuzungspunkt der Diagonalen des Trapezes bestimmte Ordinate ist gleich:

$$A\,B = \sqrt{\frac{a}{a+b}\,h \cdot \frac{b}{a+b}\,h}.$$

Wir machen daher $A_1\,B_1 = A\,B$ gleich dieser Ordinate, so erhalten wir in $B_1\,C$ die Länge $3\,k$.

Das Drittel derselben ist gleich der halben Höhe der Centralellipse.

Diese Construction ist unter allen Verhältnissen einfacher als die Rechnung, sie ist nicht schwer auswendig zu lernen, und dann auch auf das Dreieck, wo $k = {}^1/_3\,A_1\,C$ ist, und auf das Parallelogramm, wo $A_1\,B_1 = A\,O$ gleich dem Halbmesser des Kreises zu machen ist, anwendbar.

Um die Länge des den Parallelseiten parallelen Durchmessers zu erhalten, ergänzen wir das Trapez zum Dreieck, dessen Spitze in D liegt (der Punkt selbst fällt nicht mehr in den Rahmen der Figur), und stellen bei Bestimmung des entsprechenden k, a und b senkrecht auf den sie halbirenden Durchmesser und erhalten dadurch ein affines Trapez, dessen halbe Axenlänge gleich der halben Durchmesserlänge (nicht halben Höhe) des vorliegenden Trapezes ist, laut Nr. 105 S. 419. Bezeichnet dann h die Höhe des verwandelten Trapezes, so ist:

		des grossen Dreiecks	des kleinen Dreiecks
Die Höhe	=	$\frac{b\,h}{b-a}$	$\frac{a\,h}{b-a}$
Der Inhalt	=	$\frac{b^2\,h}{b-a}$	$\frac{a^2\,h}{b-a}$
Das Trägheitsmoment	=	$\frac{1}{6}\frac{b^4\,h}{b-a}$	$\frac{1}{6}\frac{a^4\,h}{b-a}$

demnach $k^2 = \frac{1}{6}\frac{b^4 - a^4}{b^2 - a^2} = \frac{1}{6}(a^2 + b^2)$

oder $k = 0{,}4082\sqrt{a^2 + b^2}$.

Unter allen Verhältnissen ist es am einfachsten $\sqrt{a^2 + b^2}$ zu construiren, wie es in Fig. 173 gezeigt ist. Dann kann man entweder direct 0,4082 der Länge nehmen, oder auch noch $\sqrt{\frac{1}{6}(a^2 + b^2)}$ construiren, wie es in der Figur angedeutet ist. Auf dieselbe Weise kann auch die Höhe der Centralellipse über einer das Dreieck halbirenden Seite construirt werden.

Allgemein lässt sich die Lage der Ecken und Seiten des Centralkerns nicht mehr einfach festsetzen und wird daher wohl am zweckmässigsten durch Zeichnung der Polaren der Ecken des symmetrischen Trapezes bestimmt; dabei ist nur zu bemerken, dass die den Parallelseiten entsprechenden Ecken auf den conjugirten Durchmesser, der das Trapez hälftet, fallen müssen. Die Ecken, welche den beiden übrigen Seiten entsprechen, liegen auf den Polaren des zu *D* symmetrischen Punktes.

d) Berechnung der Polygonmomente.

Als Fortsetzung von Nr. 95 c S. 378 und als Grundlage der Berechnung der Centrifugalmomente von Polygonen im Allgemeinen, berechnen wir zuerst die Momente für Trapeze zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten des Perimeters eines Polygons. Genau so fortfahrend, wie in der eben citirten Nummer begonnen wurde, erhält man für die Momente zweiten Grades:

$$\mathfrak{M}_{y\,y} = \tfrac{1}{12}(y_2 - y_1)\left[(3\,y_1^2 + 2\,y_1\,y_2 + y_2^2)\,z_1 + (y_1^2 + 2\,y_1\,y_2 + 3\,y_2^2)\,z_2\right],$$

$$\mathfrak{M}_{y\,z} = \tfrac{1}{24}(y_2 - y_1)\left[(3\,z_1^2 + 2\,z_1\,z_2 + z_2^2)\,y_1 + (z_1^2 + 2\,z_1\,z_2 + 3\,z_2^2)\,y_2\right],$$

$$\mathfrak{M}_{z\,z} = \tfrac{1}{12}(y_2 - y_1)(z_1^3 + z_1^2\,z_2 + z_1\,z_2^2 + z_2^3) = \tfrac{1}{6}F(z_1^2 + z_2^2).$$

Mit Berücksichtigung des in Nr. 99 S. 397 Gesagten lassen sich diese Momente auch wie folgt ausdrücken:

$$\mathfrak{M}_{y\,y} = F y_s^2 + \frac{z_1^2 + 4 z_1 z_2 + z_2^2}{36 (z_1 + z_2)} (y_2 - y_1)^3 = F (y_s^2 + h^2),$$

$$\mathfrak{M}_{y\,z} = F y_s z_s + \frac{z_1^2 + 4 z_1 z_2 + z_2^2}{72 (z_1 + z_2)} (z_2 - z_1) (y_2 - y_1)^2 = F (y_s z_s + A),$$

$$\mathfrak{M}_{z\,z} = F z_s^2 + \frac{z_1^4 + 2 z_1^3 z_2 + 2 z_1 z_2^3 + z_2^4}{36 (z_1 + z_2)} (y_2 + y_1) = F (z_s^2 + k^2).$$

Woraus die Dimensionen der Centralellipse also folgen:

$$h^2 = \frac{z_1^2 + 4 z_1 z_2 + z_2^2}{18 (z_1 + z_2)^2} (y_2 - y_1)^2 = {}^1/_{18} \left(1 + \frac{2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}\right) (y_2 - y_1)^2,$$

$$A = \frac{z_1^2 + 4 z_1 z_2 + z_2^2}{36 (z_1 + z_2)^2} (y_2 - y_1) (z_2 - z_1) = \frac{z_2 - z_1}{2 (y_2 - y_1)} h^2,$$

$$k^2 = \frac{z_1^4 + 2 z_1^3 z_2 + 2 z_1 z_2^3 + z_2^4}{18 (z_1 + z_2)^2} = {}^1/_{18} \left(z_1^2 + z_2^2 - \frac{2 z_1^2 z_2^2}{(z_1 + z_2)^2}\right).$$

Zunächst ist die Uebereinstimmung dieser Resultate mit den in Nr. 110 c S. 442 gefundenen klar, ausserdem geht noch aus der Ordinate des Berührungspunktes:

$$\frac{A}{h} = \frac{z_2 - z_1}{2 (y_2 + y_1)} h,$$

hervor, dass derselbe auf der Verbindungslinie der Mitten der beiden Ordinaten z_2 und z_1 liege. Mittelst der Werthe $\mathfrak{M}_{y\,y}\ \mathfrak{M}_{y\,z}\ \mathfrak{M}_{z\,z}$ lassen sich nun auch die Gleichungen für die Trägheitsellipsen verschiedener Polygone aufstellen.

Wir berechnen die Dreiecksmomente; es seien die Coordinaten $y_1 z_1, y_2 z_2, y_3 z_3$ der Eckpunkte gegeben, so erhält man das Centrifugalmoment des Dreiecks einfach durch Summation der Momente der drei Trapeze zwischen den Ordinaten $z_1\ z_2\ z_3$.

Wird der Inhalt des Dreiecks gleich:

$$F = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

gesetzt, so muss das Moment des Trapezes zwischen den Ordinaten bei y_1 und y_2 und also das der Fläche ${}^1/_2 (y_2 - y_1) (z_2 + z_1)$ negativ genommen werden, wenn der Sinn 1 2 3 positiv ist. Durch das Zeichen dieses Trapezes ist auch das der beiden andern gegeben. Man hat demnach die Momente der Trapeze ${}^1/_2 (y_1 - y_2) (z_1 + z_2)$, ${}^1/_2 (y_2 - y_3) (z_2 + z_3)$, und ${}^1/_2 (y_3 - y_1) (z_3 + z_1)$ zu addiren. Die Summe wird durch F theilbar und man erhält:

$$\mathfrak{M}_{y\,z} = {}^1/_{12} F [(2 y_1 + y_2 + y_3) z_1 + (y_1 + 2 y_2 + y_3) z_2 + (y_1 + y_2 + 2 y_3) z_3]$$
$$= {}^1/_{12} F (9 y_s z_s + y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3),$$

worin wie gewöhnlich y_s und $z_s = {}^1/_3 (z_1 + z_2 + z_3)$ die Coordinaten des Schwerpunktes bezeichnen.

Die Momente $\mathfrak{M}_{y\,y}$ und $\mathfrak{M}_{z\,z}$ erhält man einfach dadurch, dass man y und z einander gleich setzt. Um übersichtliche Formen dieser Momente zu erhalten, setzen wir die symmetrischen Functionen:

$$S_{y\,z} = (2\,y_1 + y_2 + y_3)\,z_1 + (y_1 + 2\,y_2 + y_3)\,z_2 + (y_1 + y_2 + 2\,y_3)\,z_3,$$
$$= y_1\,z_1 + y_2\,z_2 + y_3\,z_3 + 9\,y_s\,z_s,$$
$$T_{y\,z} = y_1\,z_1 + y_2\,z_2 + y_3\,z_3 - 3\,y_s\,z_s,$$
$$S_{y\,y} = 2\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1\,y_2 + y_2\,y_3 + y_3\,y_1) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9\,y_s^2,$$
$$T_{y\,y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3\,y_s^2.$$

Die Dimensionen der Trägheits- und der Centralellipse ergeben sich also aus den Gleichungen:

$$b^2 = \mathfrak{M}_{y\,y} : F = {}^1/_{12}\,S_{y\,y} = y_s^2 + {}^1/_{12}\,T_{y\,y} = y_s^2 + h^2,$$
$$A = \mathfrak{M}_{y\,z} : F = {}^1/_{12}\,S_{y\,z} = y_s\,z_s + {}^1/_{12}\,T_{y\,z} = y_s\,z_s + A,$$
$$c^2 = \mathfrak{M}_{z\,z} : F = {}^1/_{12}\,S_{z\,z} = z_s^2 + {}^1/_{12}\,T_{z\,z} = z_s^2 + k^2.$$

Setzt man in diesen Formeln y_1, z_2, $y_3 = 0$, $z_3 = -z_1$, d. h. nimmt man als Coordinatenaxen die Basis des Dreiecks und die Linie an, welche die Mitte dieser Basis mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet, so folgt:

$$y_s = {}^1/_3\,y_2 : z_s = 0 : A = 0.$$

Die beiden Axen sind also bezüglich der Centralellipse conjugirt, dann ist:

$$h^2 = {}^1/_{12}\,T_{y\,y} = {}^1/_{12}\,(y_2^2 - {}^1/_3\,y_2^2) = {}^1/_{18}\,y_2^2,$$
$$k^2 = {}^1/_{12}\,T_{z\,z} = {}^1/_{12}\,(z_1^2 + z_2^2) = {}^1/_6\,z_1^2,$$

was mit den Resultaten von *b* S. 441 vollkommen übereinstimmt.

Die Trägheitsmomente mehr als dreiseitiger Polygone können nun durch Summation der $\mathfrak{M}$ ihrer einzelnen Dreieckflächen bestimmt werden. Die allgemeine Entwickelung dieser Momente in Functionen der Coordinaten der Eckpunkte wird zu complicirt, um hier unternommen werden zu können.

111. Centralellipse und Kern parabolischer und elliptischer Figuren.

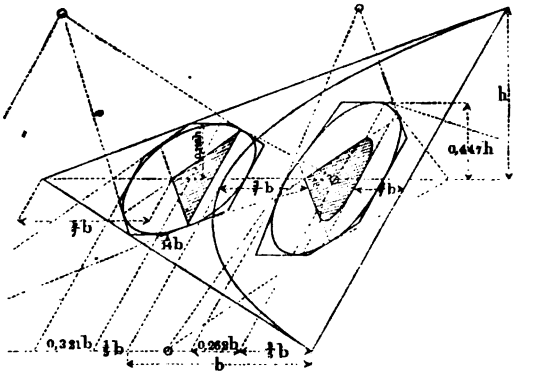
a) Centralellipse und Kern eines Parabelsegmentes.

Conjugirte Durchmesser sind der der Sehne conjugirte Durchmesser der Parabel, und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zur Sehne.

Zur Bestimmung des im Parabeldurchmesser liegenden Durchmessers der Centralellipse hat man die Parabelgleichung

$$y = \sqrt{p} \cdot z^{1/2}.$$

Fig. 174.



und demnach für eine Segmentlänge $= b$ (siehe Fig. 174)

$$k^2 = \frac{\int_0^b \sqrt{p}\, z^{5/2}\, dz}{\int_0^b \sqrt{p}\, z^{1/2}\, dz} - \left(\frac{\int_0^b \sqrt{p} \cdot z^{3/2}\, dz}{\int_0^b \sqrt{p}\, z^{1/2}\, dz}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{7} - \frac{3^2}{5^2}\right) b^2 = \frac{12}{175} b^2 = (0{,}26186\, b)^2.$$

Für die auf b senkrechte Höhe der Ellipse hat man bei der Bezeichnung von Fig. 174

$$y = b\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right),$$

und

$$k^2 = \frac{\int_0^h b\left(z^2 - \frac{z^4}{h^2}\right) dz}{\int_0^h b\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) dz} = \frac{1/3 - 1/5}{1 - 1/3} h^2 = 1/5\, h^2 = (0{,}44721\, h)^2.$$

Die Entfernung der Spitze des Kerns, welche der Parabelsehne entspricht, vom Schwerpunkt, ist gleich:

$$\frac{k^2}{2/5\, b} = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{125} b = \frac{6}{35} b,$$

den sich in dieser Spitze schneidenden Tangenten der Kernellipse entsprechen die Endpunkte der Sehne als Parabelpunkte.

Da alle Tangenten der Parabel von der Centralellipse ausgeschlossen sind, so liegen alle entsprechenden Punkte des Kernumfangs im Innern der Centralellipse; der gekrümmte Theil desselben kann daher nur einer Ellipse angehören, welche durch den Mittelpunkt der Centralellipse, den Schwerpunkt, gehen muss, weil die unendlich ferne Gerade die Parabel berührt.

Der Scheiteltangente der Parabel entspricht ein Punkt der Kernellipse, dessen Entfernung vom Schwerpunkt gleich:

$$\frac{k^2}{{}^3/_5\, b} = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{175}\, b = \frac{4}{35}\, b.$$

Die Entfernungen zwischen dem Kern und dem Segment betragen einerseits:

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{6}{35} = \frac{3}{7}\right) b,$$

andrerseits:

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{75} = \frac{2}{7}\right) b,$$

und der Kern nimmt im Innern des Segments nur ${}^2/_7$ von dessen Breite ein.

Die übrigen Dimensionen des Kerns werden wohl immer am zweckmässigsten mittelst der Centralellipse construirt.

b) Centralellipse und Kern eines Parabeldreiecks.

Unter diesem verstehen wir die Fläche zwischen zwei Parabeltangenten und dem zwischen-liegenden Parabelbogen (siehe Fig. 174).

Conjugirte Durchmesser sind der durch den Schnittpunkt der Tangenten gehende Parabeldurchmesser, der mit dem Segmentdurchmesser zusammenfällt und die zur Scheiteltangente Parallele durch den Schwerpunkt.

Am leichtesten gelangt man wohl zu den Durchmesserlängen, wenn man das Parabeldreieck als Differenz des durch die beiden Tangenten und die Sehne gebildeten Dreiecks und des Parabelsegments betrachtet.

Bezeichnen wir den Inhalt des Parabeldreiecks mit F, so ist der des Segments $= 2\,F$ und der des ganzen Dreiecks $= 3\,F$.

Ferner liegt der Schwerpunkt laut Nr. 96 d S. 382 in dem $^1/_5$ der Basis vom Scheitel ab gemessen. Da nun die Breite des Segments ebenfalls gleich der des Parabeldreiecks $= b$ ist, so beträgt die Entfernung des Schwerpunkts dieses letztern von dem des ganzen Dreiecks:

$$\frac{6}{5}\,b - \frac{1}{3}\,2\,b = \frac{8}{15}\,b,$$

und die vom Schwerpunkt des Segments:

$$\frac{6}{5}\,b - \frac{2}{5}\,b = \frac{4}{5}\,b.$$

Das Moment des ganzen Dreiecks ist daher gleich:

$$\left[\frac{1}{18}\cdot(2\,b)^2 + \left(\frac{8}{15}\,b\right)^2\right] 3\,F,$$

und das des Segments laut a) gleich:

$$\left[\frac{12}{175}\cdot b^2 + \left(\frac{4}{5}\,b\right)^2\right] 2\,F.$$

Dividirt man die Differenz dieser beiden Trägheitsmomente durch den Inhalt F des Parabeldreiecks, so erhält man:

$$k^2 = \left[3\left(\frac{4}{18} + \frac{64}{225}\right) - 2\left(\frac{12}{175} + \frac{16}{25}\right)\right] b^2$$

$$= \frac{18}{175}\,b^2 = (0{,}32071\,b)^2.$$

Das Moment in Bezug auf den Parabeldurchmesser gestaltet sich einfacher, weil alle drei Schwerpunkte in ihm liegen; man erhält für das Moment:

$$\frac{1}{6}\,h^2 \cdot 3\,F - \frac{1}{5}\,h^2 \cdot 2\,F \text{ und}$$

$$k^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) h^2 = \frac{1}{10}\,h^2 = (0{,}31623\,h)^2.$$

Bei Bestimmung des Kerns fällt der Parabelbogen ausser Betracht, weil alle seine Tangenten das Dreieck schneiden und daher keine von demselben ausgeschlossen ist. Der Kern entspricht daher dem ganzen vollen Dreieck.

Die Entfernung der dem Schnitt der Tangenten entsprechenden Seite vom Schwerpunkt ist gleich:

$$\frac{18}{175}\,b^2 : \frac{4}{5}\,b = \frac{9}{70}\,b$$

und die Entfernung derselben, von dem nur um $\frac{1}{5}\,b$ abstehenden Parabelrand gleich:

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{9}{70} = \frac{1}{14}\right) b.$$

Die Entfernung des der Sehne entsprechenden Eckpunktes vom Schwerpunkt ist gleich:

$$\frac{18}{175}\,b^2 : \frac{6}{5}\,b = \frac{3}{35}\,b$$

und die Entfernung desselben vom Eckpunkt des Parabeldreiecks gleich:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{35} = \frac{5}{7}\right) b.$$

Die übrigen Elemente des Kerns bestimmen sich wohl immer am zweckmässigsten durch Construction.

In der Regel betrachtet man alle Abrundungen der Querschnitte, sei es, dass sie auswärts oder dass sie einwärts gekehrt sind, als solche Parabelbogen; gewöhnlich genügt es, die eben gezeichneten Centralellipsen nach dem Augenmaass einzuzeichnen, um das Wenige, um welches bei Bestimmung der Trägheitsmomente der Schwerpunkt verrückt werden muss, bemessen zu können.

Den Centralkern wird man wohl nie brauchen, denn die kleinen Dimensionen desselben zeigen schon, wie ungünstig die Verwendung solcher Parabelquerschnitte zu selbstständig tragenden Theilen ist.

c) Centralellipse und Kern des Parabeltrapezes.

Im Anschluss an Nr. 96 d S. 384 wollen wir hier noch die Trägheitsmomente der Fig. 163 S. 383 berechnen. Indem wir die Bezeichnung und den Werth von y, wie er dort als Function von z gegeben wurde, beibehalten, erhalten wir die Werthe der Trägheitsmomente $\mathfrak{M}_{y\,y}$ in Bezug auf die untere Begrenzungslinie, $\mathfrak{M}_{z\,z}$ auf die Mittellinie und das Centrifugalmoment $\mathfrak{M}_{y\,z}$ auf beide, wie folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_{z\,z}}{2\,l^3} = {}^1/_2 \int_{-1}^{+1} y\,z^2\,dz = {}^1/_3\,(2f + {}^1/_2\,g) - {}^1/_5 \cdot {}^3/_2\,g = {}^2/_3 f - {}^2/_{15}\,g,$$

$$\frac{\mathfrak{M}_{y\,z}}{2\,l^2} = {}^1/_4 \int_{-1}^{+1} y^2 z\,dz = {}^1/_3\,(2f + {}^1/_2\,g)\,d - {}^1/_5 \cdot {}^3/_2\,g\,d = ({}^2/_3 f - {}^2/_{15}\,g)\,d,$$

$$\frac{\mathfrak{M}_{y\,y}}{2\,l} = {}^1/_6 \int_{-1}^{+1} y^3\,dz = {}^1/_3\,(2f + {}^1/_2 g)^3 + {}^3/_9[(2f + {}^1/_2\,g)\,d^2 - {}^3/_2\,g\,(2f + {}^1/_2 g)^2]$$

$$+ {}^3/_{15}\,[(2f + {}^1/_2\,g)\,{}^9/_4\,g^2 - {}^3/_2\,g\,d^2] - \frac{1}{21} \cdot \frac{27}{8}\,g^3,$$

$$= {}^8/_3 f^3 + {}^2/_5 f g^2 - \frac{2}{7 \cdot 15}\,g^3 + ({}^2/_3 f - {}^2/_{15}\,g)\,d^2.$$

Der Einfachheit wegen setzen wir $\frac{d}{f} = \gamma$, $\frac{g}{f} = \delta$ und erhalten dann aus obigen Formeln die Elemente der Trägheitsellipse:

$$\frac{k^2}{l^2} = \frac{\mathfrak{M}_{z\,z}}{l^3 F} - z_s^2 = {}^1/_3\,(1 - {}^1/_5\,\gamma - {}^1/_{12}\,\delta^2),$$

$$\frac{C}{f\,l} = \frac{\mathfrak{M}_{y\,z}}{f\,l\,F} - \frac{y_s\,z_s}{f} = ({}^1/_3 - {}^1/_{15}\,\gamma)\,\delta - {}^1/_6\,\delta\,(1 + {}^1/_{12}\,\delta^2 + {}^1/_{20}\,\gamma^2)$$

$$= {}^1/_6\,\delta\,[(1 - {}^1/_2\,\gamma)\,(1 + {}^1/_{10}\,\gamma) - {}^1/_{12}\,\delta^2)],$$

$$\frac{k^2}{f^2} = \frac{\mathfrak{M}_{y\,y}}{f^2 F} - \frac{y_s^2}{f^2} = {}^4/_3 + {}^1/_5\,\gamma^2 - {}^1/_{105}\,\gamma^3 + {}^1/_3\,\delta^2 - {}^1/_{15}\,\gamma\,\delta^2 - (1 + {}^1/_{12}\,\delta^2 + {}^1/_{20}\,\gamma^2)^2$$

$$= {}^4/_3\,(1 - {}^1/_5\,\gamma)^3 + {}^4/_{21}\,({}^3/_5\,\gamma)^3 - [(1 - {}^1/_2\,\gamma)\,(1 + {}^1/_{10}\,\gamma) - {}^1/_{12}\,\delta^2]^2.$$

Diese Grössen wurden Fig. 175 und 176 S. 452 construirt. Die Construction des Schwerpunktes (Fig. 174) ist identisch mit der von Fig. 163 S. 383. Um die Sinusverhältnisse der verschiedenen γ und δ zu erhalten, wurde seitlich (Fig. 176) über $2f$ als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben, und indem man auf diesen vom Endpunkt $2f$ ab die Sehnen:

$${}^1/_5\,g,\ {}^1/_3\,d,\ {}^6/_5\,g,\ d,\ 2f - g,\ 2f - {}^2/_5\,g$$

auftrug, erhielt man durch Verbindung ihrer Endpunkte mit dem obern Endpunkte des Durchmessers die Sinusverhältnisse:

$${}^1/_{10}\,\gamma,\ {}^1/_6\,\delta,\ {}^3/_5\,\gamma,\ {}^1/_2\,\delta',\ \gamma'' = 1 - {}^1/_2\,\gamma,\ \gamma' = 1 - {}^1/_5\,\gamma.$$

Trägt man auf dem Strahl ${}^1/_2\,\delta$ die Längen 1 und f auf, so ist die Entfernung dieser Endpunkte von der Verticallinie gleich ${}^1/_2\,\delta\,1$ und ${}^1/_2\,\delta\,f$. Werden dann diese Längen auf dem Strahl ${}^1/_6\,\delta$ aufgetragen, so erhält man als Entfernung ihrer Endpunkte von der Verticallinie die Längen $\delta'\,l = {}^1/_{12}\,\delta^2\,l$ und $\delta'\,f = {}^1/_{12}\,\delta^2\,f$.

Wird auf dem Strahl γ' die Länge l aufgetragen, so ist die Entfernung desselben von der Verticallinie gleich $\gamma'\,l = (1 - {}^1/_5\,\gamma)\,l$. In Fig. 176 wurde von dieser Länge $\delta'\,l = {}^1/_{12}\,\delta^2\,l$ abgezogen und man erhielt:

$$l' = (1 - {}^1/_5\,\gamma - {}^1/_{12}\,\delta^2)\,l.$$

Ein Halbkreis über diesem l' und über ${}^1/_3\,l$ schneidet auf der Verticallinie k aus, wie die Figur es zeigt.

Die Entfernung des Punktes f der Verticallinie von dem Strahl γ'' ist gleich $\gamma'' f = (1 - {}^1/_2 \gamma) f$.

Diese Länge wurde auf dem Strahl ${}^1/_{10} \gamma$ aufgetragen (sie reicht bis zum kleinen Ring⌒und dann noch auf die Horizontale durch denselben herabgeschlagen. Die Entfernung des Endpunktes von der Verticallinie ist dann laut Fig. 15 S. 11 gleich $(1 - {}^1/_2 \gamma)(1 + {}^1/_{10} \gamma) f$. Indem man von dieser Länge noch $\delta' f$ abzieht, erhält man:

$$\delta'' f = [(1 - {}^1/_2 y)(1 + {}^1/_{10} y) - {}^1/_{12} \delta^2] f.$$

Wird endlich dieses $\delta'' f$ noch auf den Strahl ${}^1/_6 \delta$ getragen, so ist die Entfernung seines Endpunktes von der Verticallinie gleich $\frac{C}{l}$, wie es in der Figur angedeutet ist.

Um h zu erhalten, wurde zunächst $\delta' f$ mit δ'' multiplicirt, indem auf den Verticalen $\delta'' f$ aufgetragen und über ihr mittelst eines Strahles und zweier Parallel-

Fig. 175.

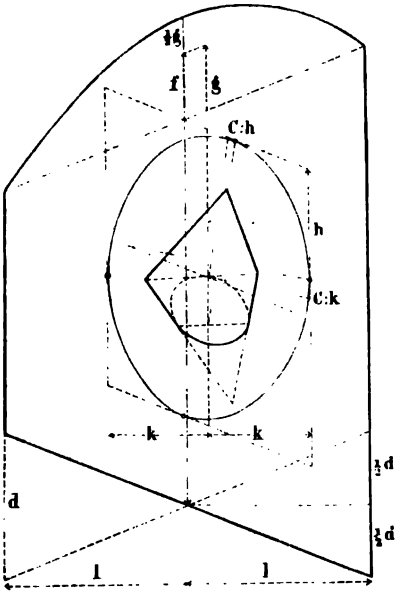
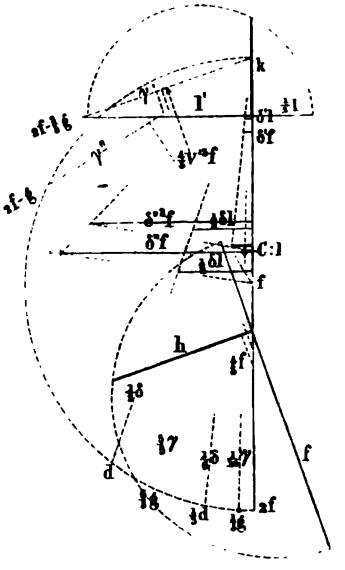


Fig. 176.



linien ein f und $\delta' f$ ähnliches Gebilde $f \delta''$ und $f \delta''^2$ construirt wurde. Ferner wurde auf der Verticallinie ${}^4/_3 f$ aufgetragen, dreimal mit dem Sinusverhältniss γ' multiplicirt und so ${}^4/_3 \gamma'^3 f = {}^4/_3 (1 - {}^1/_5 \gamma)^3 f$ erhalten, wie die Figur es andeutet. Hierzu sollte jetzt noch ${}^4/_{21} ({}^3/_5 \gamma)^3 f$ addirt werden; allein diese Grösse war im vorliegenden Fall nicht mehr construirbar; die Rechnung ergab, dass sie nur gleich ${}^1/_{10}$ Mmtr. sei, sie wurde daher ausser Acht gelassen. Wird von ${}^4/_3 \gamma' f$ die schon construirte Länge $\delta''^2 f$ abgezogen, so erhält man $\frac{h^2}{f}$; an dieses wurde noch f an-

gefügt, über dem Ganzen ein Halbkreis beschrieben und so h erhalten, wie es aus der Figur zu ersehen ist.

In den Entfernungen h und k vom Schwerpunkt (Fig. 175) wurden zu Seiten des Trapezes parallele Linien gezogen, welche die Centralellipse berühren, und demnach ein umschriebenes Parallelogramm bilden. Laut Nr. 100 S. 401 liegen die Berührungspunkte in den Entfernungen $\frac{C}{h}$ und $\frac{C}{k}$, von den den Seiten des Parallelogramms parallelen Durchmessern auf der positiven Coordinatenseite, weil C positiv sich ergeben hat. Diese beiden Entfernungen wurden an der Stelle, wo man sie gerade braucht, über den Durchmessern h und k mittelst den bekannten und construirten Längen l und $\frac{C}{l}$ construirt und so zwei Berührungspunkte erhalten; die beiden übrigen Berührungspunkte liegen ihnen symmetrisch gegenüber. Die vier Berührungspunkte sind die Ecken eines einbeschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten parallel mit den Diagonalen des umschriebenen laufen. Mittelst diesen vier Tangenten und ihren Berührungspunkten kann die Centralellipse nun leicht gezeichnet werden.

Auch der Centralkern wurde noch in Fig. 175 eingetragen. Seine vier geradlinigten Seiten sind die vier Antipolaren der vier Eckpunkte des Parabeltrapezes. Die Parabel geht durch zwei Eckpunkte des Trapezes und durch den unendlich fernen Schnittpunkt der parallelen Seiten, in dem sie die unendlich ferne Gerade berührt; demnach berührt der ihr entsprechende Kegelschnitt die beiden Antipolaren jener Eckpunkte und die Verbindungslinie der beiden Eckpunkte des Kerns, welche den parallelen Seiten entsprechen und die demnach mit dem ihnen conjugirten Durchmesser zusammenfällt, und durch den Pol geht, in welchem er diese Verbindungslinie berührt. In beiden Figuren entsprechen den Schnittpunkten der Endtangenten die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte. Da die Parabel ganz ausserhalb des Trapezes liegt und nur durch zwei seiner Ecken geht, so liegt der ihr entsprechende Kegelschnitt ganz im Innern des Kerns und berührt nur zwei seiner Seiten; er ist daher eine Ellipse.

Dass in den jetzt entwickelten Formeln für die Trägheitsmomente des Parabeltrapezes auch die für das Parabeldreieck (siehe b) enthalten seien, versteht sich von selbst.

d) Trägheitsmomente von Ellipsen und Hyperbeln begrenzter Flächen.

Die Gleichungen der Kegelschnitte mit Mittelpunkt lassen sich immer auf die Form bringen:

$$z = \varepsilon y + c \pm \sqrt{\alpha (y - b)^2 + R}.$$

Ist z. B. die allgemeine Gleichung:

$$0 = a_{11} y^2 + 2 a_{12} yz + a_{22} z^2 + 2 a_{13} y + 2 a_{23} z + a_{33},$$

gegeben, so ist:

$$\varepsilon = -\frac{a_{12}}{a_{22}},\ c = -\frac{a_{23}}{a_{22}},\ \alpha = -\frac{A_{33}}{a_{22}},\ b = \frac{A_{13}}{A_{33}},\ R = -\frac{D}{a_{22} A_{33}}.$$

Die Fläche F, die statischen Momente M_y, M_z, und die Trägheitsmomente $\mathfrak{M}_{yy}$, $\mathfrak{M}_{yz}$, $\mathfrak{M}_{zz}$ ergeben sich nun für Flächen zwischen zwei Ordinaten z, dem Bogen einerseits, und der Axe andererseits aus der folgenden Uebersicht, in der die in z vorkommende Wurzelgrösse mit $+ w = \pm \sqrt{\alpha (y - b)^2 + R}$, bezeichnet wurde:

$$F = \int z\, dy = {}^1/_2\, \varkappa y^2 + cy + \int w\, dy;$$

$$M_y = \int y\, z\, dy = {}^1/_3\, \varkappa y^3 + {}^1/_2\, c\, y^2 + \int y\, w\, dy;$$

$$M_z = {}^1/_2 \int z^2\, dy = \frac{1}{6\varkappa}\left(\varkappa y + c\right)^3 + \varkappa \int y w\, dy + c \int w\, dy + {}^1/_2 \int w^2\, dy;$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = \int y^2 z\, dy = {}^1/_4\, \varkappa y^4 + {}^1/_3\, c\, y^3 + \int y^2 w\, dy;$$

$$\mathfrak{M}_{yz} = {}^1/_2 \int y z^2 dy = {}^1/_8 \varkappa^2 y^4 + {}^1/_3 c \varkappa y^3 + {}^1/_4 c^2 y^2 + \varkappa \int y^2 w\, dy + c \int y w^2\, dy + {}^1/_2 \int w^2\, dy;$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = {}^1/_3 \int z^3\, dy = \frac{1}{12\varkappa}\left(\varkappa y + c\right)^4 + \varkappa \int y w^2 dy + c \int w^2 dy + \varkappa^2 \int y^2 w\, dy + 2\varkappa c \int y w\, dy + c^2 \int w\, dy + {}^1/_3 \int w^3\, dy.$$

In dieser Zusammenstellung wurden die Constanten weggelassen, denn es versteht sich, dass alle Integrale innerhalb der Grenzen der äussersten Coordinaten zu nehmen sind; doch ist darauf zu achten, dass der Bogen zwischen den Grenzen nicht durch das Unendliche gehen darf.

Sind die beiden Axen hinsichtlich des Kegelschnitts conjugirt, so sind $c = \varkappa = 0$, und die Momente reduciren sich auf die letzten Glieder, die noch zu integriren sind, und die wir zum Unterschied der obigen Momente mit Accenten versehen wollen; wir erhalten:

$$F' = \int w\, dy = {}^1/_2 (y - b)\, w + {}^1/_2\, R \int \frac{dy}{w},$$

$$M'_y = \int y w\, dy = \frac{1}{3\alpha} w^3 + {}^1/_2\, b\, (y - b)\, w + {}^1/_2\, b\, R \int \frac{dy}{w},$$

$$M'_z = {}^1/_2 \int w^2\, dy = {}^1/_6\, \alpha\, y^3 - \alpha\, b\, y^2 + {}^1/_2\, (\alpha b^2 + R)\, y,$$

$$\mathfrak{M}'_{yy} = \int y^2 w\, dy = \frac{2}{3\alpha} b\, w^3 + \frac{1}{8\alpha} (2 w^2 + 4 \alpha b^2 - R)(y - b)\, w + \frac{1}{8\alpha} (4 \alpha b^2 - R) R \int \frac{dy}{w},$$

$$\mathfrak{M}'_{yz} = {}^1/_2 \int y w^2\, dy = {}^1/_8\, \alpha\, y^4 - {}^1/_3\, \alpha\, b\, y^3 + {}^1/_8\, (\alpha b^2 + R)\, y^2,$$

$$\mathfrak{M}'_{zz} = {}^1/_3 \int w^3\, dy = {}^1/_{24} (2 w^2 - 3 R)(y - b)\, w + {}^1/_8\, R^2 \int \frac{dy}{w}.$$

Das noch nicht bestimmte Integral $\frac{1}{2} R \int \frac{dy}{w}$ ist nichts anderes, als der Flächeninhalt zwischen dem Bogen und den beiden Strahlen, welche aus dem Mittelpunkt der Curve, dessen Endpunkte projiciren; denn ein Element dieser Fläche ist gleich:

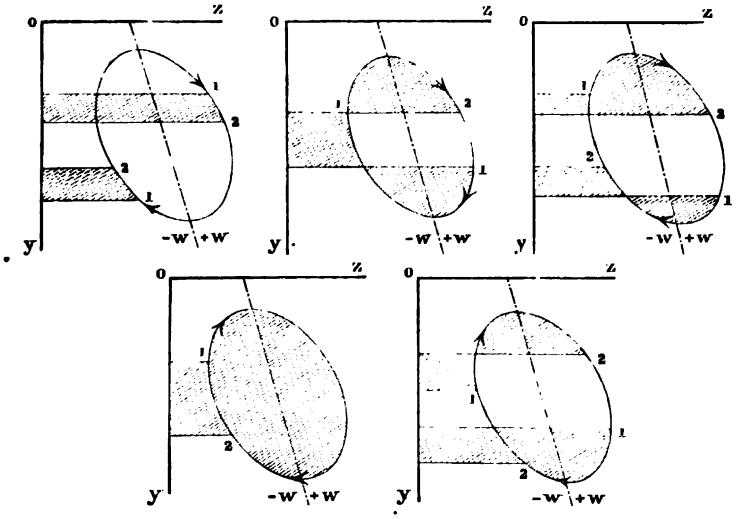
$$\frac{1}{2}\left[(y-b)\,dw - w\,dy\right] = \frac{1}{2w}\left[\alpha\,(y-b)^2 - w^2\right]dy = \frac{R\,dy}{2w}.$$

Diese Flächeninhalte müssen nun für Ellipsen und Hyperbeln auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Für Ellipsen, wo α negativ und R immer positiv ist, hat man:

$$\frac{1}{2} R \int \frac{dy}{w} = \frac{R}{2\sqrt{-\alpha}} \arcsin \sqrt{\frac{-\alpha}{R}}\,(y-b) = \frac{R}{2\sqrt{-\alpha}} \arccos \frac{w}{\sqrt{R}}.$$

Durch die Zeichen von sin und von cos sind die Bogenstücke, die einzuführen sind, vollständig bestimmt, der Bogen ist gleich null für $y - b = 0$, $w = \sqrt{R}$; gleich $\frac{1}{2}\pi$ für $y - b = \sqrt{\frac{R}{-\alpha}}$, $w = 0$; gleich π für $y = b = 0$, $w = -\sqrt{R}$ und gleich $\frac{3}{2}\pi$ für $y - b = -\sqrt{\frac{R}{-\alpha}}$, $w = 0$. Lässt man in dem hier auf der Ellipse durch diese Reihenfolge gegebenen Sinn, jederzeit den Punkt 2 auf den

Fig. 177.



Punkt 1 folgen, so dass man bei dem Einsetzen der Grenzordinaten in die obigen Integrale nur positive Bogen erhält, indem man nöthigenfalls den Bogen des 2ten

Punktes um 2π vermehrt, so geben die Formeln für verschiedene Bogen der Punkte 1 und 2 die Momente der Flächen, die wir durch die Fig. 177 zur Anschauung bringen wollen.

In diesen Figuren sind die positiven Flächen schraffirt, die negativen Flächen punktirt, und die aufgestellten Integrale geben die Differenz der Momente beider Flächen.

Bei Hyperbeln, wo α positiv ist und R beliebiges Zeichen haben kann, wird das Flächenintegral:

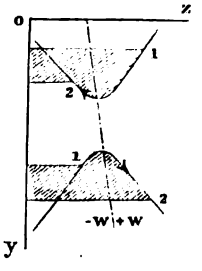
$$\tfrac{1}{2} R \int \frac{dy}{w} = \frac{R}{2\sqrt{\alpha}} \log \left[\sqrt{\alpha}\,(y-b) + w \right].$$

In diesem Integral wechselt bei dem Uebergang von einem Arm der Hyperbel zum andern, das grössere der beiden Glieder $\sqrt{\alpha}\,(y-b)$ und w sein Zeichen. Ist z. B. R positiv, so ist w immer grösser, als wie $\sqrt{\alpha}\,(y-b)$, zwischen $+\sqrt{R}$ und $-\sqrt{R}$ imaginär, und wechselt demnach sein Zeichen bei dem Uebergang von $+\sqrt{R}$ zu $-\sqrt{R}$ d. h. von einem Arm der Hyperbel zum andern. Ist dagegen R negativ, so ist $\sqrt{\alpha}\,(y-b)$ grösser als wie w, $y-b$ ist zwischen $+\sqrt{\frac{-R}{\alpha}}$ und $-\sqrt{\frac{-R}{\alpha}}$ imaginär, und wechselt sein Zeichen bei dem Uebergang von einem Arm zum andern. Hieraus folgt, dass die Grösse $\sqrt{\alpha}\,(y-b)+w$ ebenfalls bei dem Uebergang von einem Arm zum andern ihr Zeichen wechselt, und dass wenn bei der Substitution der Grenzwerthe y_1 w_1 und y_2 w_2 in den Bruch:

$$\frac{\sqrt{\alpha}\,(y_2-b)+w_2}{\sqrt{\alpha}\,(y_1-b)+w_1},$$

dessen Logarithmus gleich der zu berechnenden Differenz ist, die Coordinaten von Punkten verschiedener Arme der Hyperbel substituirt werden, dieser Quotient negativ und sein log imaginär sei. Werden daher die Coordinaten vom Punkte verschiedener Arme der Hyperbel als Grenzen der Integrale in obige Formeln substituirt, so ist das Resultat ein imaginäres; es müssen daher die Integrationsgrenzen auf einem und demselben Arm der Hyperbel angenommen werden.

Fig. 178.



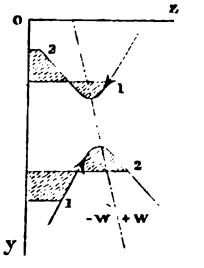
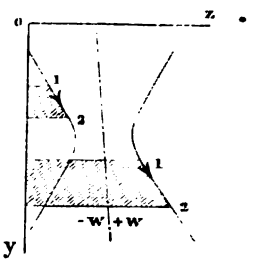


Fig. 179.



Auch für die Hyperbeln wollen wir durch Fig. 178 und Fig. 179 zeigen, welches die Flächen sind, deren Momente die obigen Formeln geben, wenn die Coordinaten des Punktes 2 als obere, und die des Punktes 1 als untere Grenze substituirt werden.

Diese Figuren bedürfen keiner Erläuterung; man sieht, dass die Verhältnisse einfacher als wie bei elliptischen Bogen sind.

Selten wird man in der Praxis die Momente von Flächen mit dem unregelmässigen Trapez zwischen der Axe und der Curve, sondern in der Regel nur von Curvensegmenten zu bestimmen haben, welche von einer oder von zwei Parallelen zu einer Coordinatenaxe begrenzt sind.

Man könnte diese Momente dadurch bestimmen, dass man in die bisher entwickelten Formeln die Coordinaten $y, +w$ für die obere, und $y, -w$ für die untere Grenze einsetzte, wobei sich alle Glieder heben würden, die w in einer geraden Potenz enthalten, allein es ist einfacher, diesen Fall besonders zu entwickeln. Man hat allgemein:

$$\int y^i\,dy \int_{\iota y+c-w}^{\iota y+c+w} z^{n-1}\,dz = \frac{2}{n}\int [(\iota y+c+w)^n-(\iota y+c-w)^n]\,y^i\,dy$$
$$= \frac{2}{n}\int [n\,(\iota y+c)^{n-1}\,w+\binom{n}{3}(\iota y+c)^{n-3}\,w^3+\ldots]\,y^i\,dy.$$

Demnach erhält man:

$$F = 2\int w\,dy = (y-b)\,w + R\int \frac{dy}{w},$$

$$M_y = 2\int y\,w\,dy = \frac{2}{3\alpha}\,w^3 + b\,(y-b)\,w + b\,R\int\frac{dy}{w},$$

$$M_z = 2\int(\iota y+c)\,w\,dy = \iota M_y + c\,F,$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = 2\int y^2\,w\,dy = \frac{4}{3\alpha}\,bw^3 + \frac{1}{4\alpha}\,(w^2+4\,\alpha\,b^2-R)\,(y-b)\,w$$
$$+ \frac{1}{4\alpha}\,(4\,\alpha\,b^2-R)\,R\int\frac{dy}{w},$$

$$\mathfrak{M}_{yz} = 2\int(\iota y+c)^2 y\,w\,dy = \iota\,\mathfrak{M}_{yy} + c\,M_y$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = 2\int(\iota y+c)^2\,w\,dy + {}^2/_3\int w^3\,dy = \iota^2\,\mathfrak{M}_{yy} + 2\,\iota\,c\,M_y + c^2\,F$$
$$+ {}^1/_{12}\,(2w+3R)\,(y-b)\,w + {}^1/_4\,R^2\int\frac{dy}{w}.$$

In diesen Integralen sind die w wesentlich positiv, es können daher für die Grenzen nur solche eingezetzt werden. Zwischen diesen Grenzen dürfen also in diesem Fall nie Punkte sich befinden, für welche w gleich 0 ist; es dürfen, wenn

die Fläche sich bis zum Scheitel erstreckt, solche Punkte höchstens die eine Grenze sein. Die Coordinaten dieser Punkte sind durch die Bedingung:

$$w = 0,\ y - b = \sqrt{\frac{R}{\alpha}},$$

gegeben. Sie sind daher nur dann reell, wenn R und α verschiedene Zeichen haben, also bei Ellipsen und bei Hyperbeln die den Durchmesser $\tau y + c = 0$ in reellen Punkten schneiden. Substituirt man diese Coordinaten als Grenzen in die obigen Formeln, so verschwinden alle Glieder mit Ausnahme der $\int \frac{dy}{w}$.

Da durch die Art der Aufstellung die Momente negativer Flächen ausgeschlossen worden, so sind bei Ellipsen die $\int \frac{dy}{w}$ nicht mehr cyclisch, sondern innerhalb der Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$, $0 + \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Bei Hyperbeln fällt diese doppelte Möglichkeit aus.

Wir unterlassen die wirkliche Substitution, indem die Divisionen mit F dennoch nicht ausführbar werden.

Durch Division von M_x durch F erhält man:

$$z_s = \tau y_s + c,$$

woraus hervorgeht, dass in dem vorliegenden Fall der Schwerpunkt der Fläche immer auf den Durchmesser $\tau y + c = 0$, liegt.

Die Dimensionen der Centralellipsen von Segmenten lassen sich nicht mehr allgemein ausdrücken, es ist das nur dann möglich, wenn die Flächen im Endlichen geschlossen sind, also bei Ellipsen. Für diesen Fall setzen wir zur Bestimmung dieser Dimensionen τ, c, $b = 0$ und erhalten:

$$F = \frac{R}{\sqrt{-\alpha}}\pi;\ \mathfrak{M}_{yy} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{R}{\alpha}F;\ \mathfrak{M}_{xx} = -\frac{1}{4}RF$$

$$M_y,\ M_x,\ \mathfrak{M}_{xy} = 0.$$

Die conjugirten Durchmesser der Centralellipse sind demnach:

$$h = \sqrt{\frac{M_{yy}}{F}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{-\alpha}} = {}^1/_2\, a_1,\ k = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_{xx}}{F}} = \frac{1}{2}\sqrt{R} = \frac{1}{2}\, b_1;$$

wenn man mit a_1 und b_1 die Längen der gegebenen Durchmesser bezeichnet. Ist aber die Trägheitsellipse in jeder Richtung halb so hoch als die Ellipse der sie zugeordnet ist, so wird sie ihr auch ähnlich gelegen sein, und alle ihre Dimensionen halb so gross als die jener sein.

Dasselbe gilt natürlich auch vom Kern; da i immer gleich h ist, so wird die halbe Höhe der Kernellipse gleich:

$$\frac{k^2}{i} = \frac{\frac{1}{4}a_1^2}{a_1} = \frac{1}{4}\, a_1$$

Die Dimensionen der Kernellipse werden also gleich dem $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen und gleich $\frac{1}{2}$ der Trägheitsellipse sein.

Der Kreis, der zugeordnete Trägheitskreis und der Kern sind Kreise, deren Halbmesser gleich

$$r, \quad \frac{1}{2}\, r \text{ und } \frac{1}{4}\, r$$

sind.

Für den Ring zwischen zwei ähnlichen Ellipsen ist das Trägheitsmoment

$$F = \frac{1}{4}\left(a_1^2 - \frac{1}{4}\, a_1^2\, \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) F$$

wenn wir mit F den Flächeninhalt der grössern Ellipse, und mit a_2 den a_1 entsprechenden Durchmesser der kleinern bezeichnen, denn die Flächeninhalte ähnlicher Gebilde verhalten sich wie die Quadrate ähnlicher Dimensionen; man erhält daher:

$$k^2 = \frac{\frac{1}{4}\, a_1 - \frac{1}{4}\, \frac{a_2}{a_1^2}}{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}} = \frac{1}{4}\,(a_1^2 + a_2^2)$$

112. Trägheitsmomente zweier Flächen.

Nr. 83 S. 325 haben wir gesehen, dass wenn es sich um die Zusammensetzung von nur zwei Kräften handelt, es eine einfachere Construction giebt, als wie die zwei Kräfte durch ein Seilpolygon mit einander zu verbinden. Dasselbe ist auch der Fall, wenn das Trägheitsmoment von nur zwei Flächen, in Bezug auf den Schwerpunkt bestimmt werden soll.

Die zwei Flächen seien ΔF_1 und ΔF_2, die Abscissen, ihre Schwerpunkte und ihre Momente seien der Bezeichnung Nr. 99 S. 367 entsprechend x_i, y_i, $x_i \Delta F_i$ $y_i \Delta F_i$, $(x_i^2 + k_i^2)\, \Delta F_i$ $(x_i y_i + C_i)\, F_i$, $(y_i^2 + h_i^2)\, F_i$. Die Summe der beiden Flächen bezeichnen wir mit F, und alle Momentensummen gerade wie angedeutet wurde mit Weglassung des Index.

Wir construiren zunächst den Schwerpunkt nach Nr. 83, dann ist:

$$x_1 \Delta F_1 + x_2 \Delta F_2 = 0,$$

und

$$\frac{\Delta F_1}{x_2} = \frac{\Delta F_2}{-x_1} = \frac{F}{x_2 - x_1} = \frac{F}{l},$$

indem wir mit l die Entfernungen dieser beiden Schwerpunkte bezeichnen. Substituirt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von ΔF_1 und ΔF_2 in die Momentengleichung einer der beiden Axen, der y Axe z. B. so erhält man:

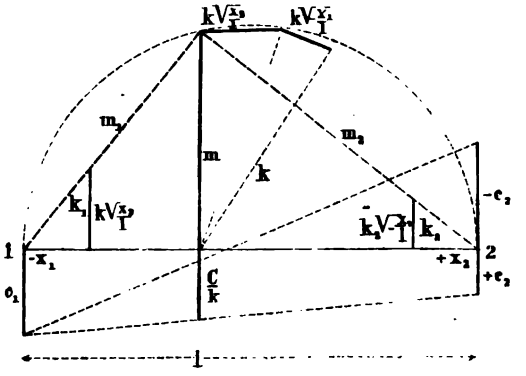
$$k^2 = \frac{1}{F}[(x_1^2 + k_1^2)\Delta F_1 + (x_2^2 + k_2^2)\Delta F_2] = {}^1/_8[x_1 x_2 (x_1 - x_2)$$

$$+ k_1^2 x_2 - k_2^2 x_1] = -x_1 x_2 + \frac{x_2}{l} k_1^2 - \frac{x_1}{l} k_2^2.$$

Eine Formel die auch direct aus Nr. 99 S. 398 abgeleitet werden könnte.

Wir bemerken: x_1 muss der Natur der Aufgabe gemäss negativ sein, alle Glieder der letzten Gleichung sind daher positiv und sehr leicht zu construiren.

Fig. 180.



Wir beschreiben über der Verbindungslinie l der beiden Schwerpunkte (Fig. 180) einen Halbkreis, messen im Schwerpunkt den Perpendikel m, verbinden seinen Endpunkt mittelst der Linien m_1 und m_2 dann ist $m = \sqrt{-x_1 x_2}$; $m_1 = \sqrt{-l x_1}$; $m_2 = \sqrt{l x_2}$. Trägt man schliesslich vom Punkt 1 aus k_1 auf m_1 ab, so ist der Perpendikel vom Endpunkt von k_1 auf l, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke gleich:

$$\frac{k_1 m}{m_1} = k_1 \frac{\sqrt{-x_1 x_2}}{\sqrt{-l x_1}} = k_1 \sqrt{\frac{x_2}{l}}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man durch Auftragen von k_2 auf m_2 die Höhe $k_2 \sqrt{\frac{x_1}{l}}$.

Reiht man eine dieser Grössen $k_1 \sqrt{\frac{x_2}{l}}$ unter rechtem Winkel an m so erhält man $\sqrt{m^2 + \frac{k_1^2 x_2}{l}}$, und an dieses auch unter rechtem Winkel $k_2 \sqrt{\frac{x_1}{l}}$, so erhält man:

$$k_2 = \sqrt{- x_1 x_2 + \frac{x_2}{l} k_1^2 - \frac{x_1}{l} k_2^2}$$

wie die Figur es angiebt.

Da es bei der Construction von $k_1 \sqrt{\frac{x_2}{l}}$ und $k_2 \sqrt{\frac{x_1}{l}}$ nur auf die Winkel ankam, den m_1 und m_2 mit l bilden und diese Winkel constant bleiben, wenn sich die Verhältnisse $x_1 : x_2$ nicht ändern, so braucht die (Fig. 180) nur einmal ausgeführt zu werden, und zwar am besten auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte selbst, weil diese die grösste Figur geben; zur Construction des h für eine andere Richtung die der y, z. B. hat man das auf l heruntergeschlagene m, in dieser Richtung zu projiciren und an das so verkürzte m, die $h_1 \sqrt{\frac{x_2}{l}}$ und $h_2 \sqrt{-\frac{x_1}{l}}$, welche zwischen denselben Winkeln $m_1 l$ und $m_2 l$ construirt wurden, unter rechten Winkeln anzureihen.

Um das Moment $(x_1 y_1 + C_1) \Delta F_1 + (x_2 y_2 + C_2) \Delta P_2$ zu construiren, verwandeln wir die Flächen $x_i y_i + C_i$ in $c_i k$, entweder mit Benutzung der Ordinaten der Antipole, oder direct graphisch, und erhalten nach Substitution der Werthe von ΔF_1 und ΔF_2:

$$C = \frac{k}{l} (c_1 x_2 - c_2 x_1);$$

$\frac{C}{k}$ aber ist die, auf der Tangente k gemessene Entfernung des Berührungspunktes, vom Durchmesser der mit der Tangente h parallel läuft, man hat also nur noch $\frac{c_1 x_2}{l}$ und $-\frac{c_2 x_1}{l}$ zu construiren, was

auf verschiedene Weise geschehen kann. In (Fig. 180) geschah es, indem $+ c_1$ bei 1 in irgend einer Richtung, $+ c_2$ bei 2 parallel in der gleichen Richtung aufgetragen wurden, die Verbindungslinien der Endpunkte von c_1 mit 2, und von c_2 mit 1, schneiden selbstverständlich auch auf m die Länge $\frac{C}{k}$ ab, mittelst der nun die Ellipse vollständig bestimmt ist.

Bei den hier summirten Grössen sind alle $k_2 \Delta F$ positiv angenommen worden. Hinsichtlich des Zeichens der C aber ist zu merken: die C von Flächen zwischen den Scheitelwinkeln der Axe haben gleiche Zeichen, zwischen Nebenwinkeln aber ungleiche Zeichen. C zwischen gleichgerichteten Schenkeln paralleler Axen, haben auch gleiche Zeichen. Indem man dieses berücksichtigt, sieht man sofort aus der Figur, ob die Momente addirt oder von einander abgezogen werden müssen; sind die Momente zu addiren, so müssen beide c auf der gleichen Seite der Schwerpunktslinien aufgetragen werden, sind sie entgegengesetzten Zeichens, so sind sie auch auf entgegengesetzten Seiten aufzutragen. Beide Fälle wurden in die Figur eingezeichnet, und durch $+ c_2$ und $- c_2$ von einander unterschieden; $\frac{C}{k}$ steht bei der $+ c_2$ entsprechenden Länge.

Die hier erläuterten Constructionen geben am schnellsten die Momente von Winkeleisen oder T Eisen, wenn man die kleinen Abstumpfungen an den Ecken vernachlässigen kann. Der Grund, weshalb (Fig. 180) nicht gerade auf eine solche Figur bezogen wurde, ist der, dass die C gleich 0 sind, wenn die Seiten der partiellen Rechtecke parallel laufen, und sehr klein sind, wenn sie, wie es gewöhnlich der Fall ist, nahezu parallel laufen; es hätte demnach an einem solchen Winkeleisen nicht gezeigt werden können. Sollen die Abstumpfungen an den Ecken berücksichtigt werden, so sind die Constructionen von Nr. 116 anzuwenden.

113. Das Trägheitsmoment ringförmiger Figuren.

Man hat das Trägheitsmoment ringförmiger Figuren mit dünner Wandstärke, näherungsweise als Differential der ganzen Fläche berechnen wollen; z. B. das Trägheitsmoment eines hohlen

Rechtecks dessen ganzes Moment gleich $^1/_{12}\ b\ c^3$ ist, mittelst der Formel:

$$^1/_{12}\ (3\ b\ c^2\ .\ d\ c + c^3\ d\ b),$$

in welche für $d\ b$ und $d\ c$ die Breiten- und Höhendifferenzen des vollen und hohlen Querschnitts eingesetzt wurden.

Das Trägheitsmoment der ringförmigen Figur mit dünnem Rand ist annähernd gleich:

$$e \int y^2\ d\ s = k^2\ e\ s,$$

worin k die Höhe der Centralellipse des Umfangs in Bezug auf dessen Schwerpunkt, und e die Randdicke bezeichnet.

Bezeichnen wir mit $\int y^2\ dF$ das Trägheitsmoment des hohlen Querschnittes, so wird das Differential dieses Integrals in Bezug auf seine Grenzen, überhaupt nur dann mit $k^2\ e\ s$ verglichen werden und einen Näherungswerth geben können, wenn beide Integrale $e \int y^2\ d\ s$ und $\int y^2 dF$ auf die gleichen Coordinatenaxen bezogen sind. Es müssen also die Schwerpunktsaxen des Umfangs und der ganzen Fläche zusammenfallen. Wäre die Entfernung der beiden Schwerpunktsaxen gleich y_s, so könnte, wenn keine sonstige Compensation stattfindet, der Fehler die Grösse $y_s^2\ .\ e s$ erreichen, was unter Umständen so bedeutend werden kann, dass von Annäherung nicht mehr gesprochen werden darf. Dieses Zusammenfallen wird im Allgemeinen nur bei symmetrischen Figuren stattfinden; wenn es auch bei andern Querschnitten stattfindet, so findet zufällige Compensation statt.

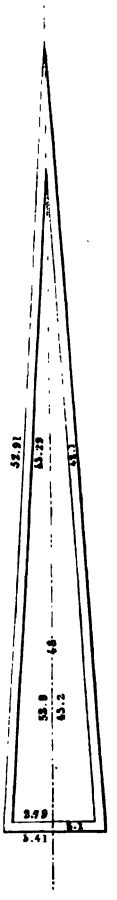
Ist diese Bedingung erfüllt, so muss weiter der Zuwachs der Integrationsgrenzen in den Flächenintegralen, eine Fläche erzeugen, deren Rand vom Rand der ursprünglichen Fläche um e entfernt ist. Dies findet aber annäherungsweise nur bei Flächen statt, deren Ränder bei Parallelcoordinaten annähernd parallel mit den Axen laufen, und bei Polarcoordinaten, deren Rand annähernd senkrecht auf dem durch den Schwerpunkt gehenden Radiusvector steht, also bei Kreisen, bei regelmässigen Polygonen mit vielen Seiten, bei Ellipsen, deren Axenlängen und Axenzuwachse, sehr wenig von einander verschieden sind. Werden diese beiden Bedingungen nicht erfüllt, so kann überhaupt das ganze Differential von $\int y^2\ d\ F$ nicht als Näherungswerth von $e \int y^2 d s$ betrachtet werden. Die Differenz wird desto grösser sein, je grösser die Ent-

fernung der Schwerpunkte der vollen Figur und des Umfangs, und je grösser der Winkel ist, den die Richtung des Umfangs mit der Abscissenaxe, d. h. der Axe, von der ab die y gemessen werden, bildet.

Diese Verhältnisse wollen wir dadurch erläutern, dass wir das Trägheitsmoment eines hohlen gleichschenkeligen Dreiecks mit sehr kleiner Basis nach den verschiedenen Methoden berechnen.

Es sei Fig. 181 das Dreieck; die mittlere Basis, Höhe und Seite messen 6,2, 48 und 48,1. Die Dimension des inneren Profils sei $^1/_{10}$ kleiner, also gleich: 5,58, 43,2 und 43,29 und die des äussern $^1/_{10}$ grösser, also gleich: 6,82, 52,8 und 52,91. Die normal gemessene Ringstärke ist überall $\frac{9{,}3}{160} = 0{,}58125$; sie ist nur gleich $^1/_{10}$ der Basis, und $^1/_{80}$ der Höhe, also jedenfalls klein genug um als dünne Wand bezüglich der übrigen Abmessungen zu gelten. Auch bietet das Verhältniss $^1/_8$ der Basis zur Höhe genügende Stabilität für einen tragenden Balken.

Fig. 181.



Von vornherein können wir schon auf das Resultat schliessen. Das Differential des Flächenmoments, in Bezug auf die zur Basis parallele Axe durch den Schwerpunkt, wird ein sehr abweichendes Resultat geben; denn senkrecht zu dieser Axe gemessen, liegen die Schwerpunkte der Fläche und des Umfangs weit auseinander, der erstere in dem $^1/_3$ der Höhe, der letztere beinahe in der Mitte derselben; und die beiden Seiten des Dreiecks bilden einen grossen Winkel mit der Basis. Dagegen wird das Differential für das Trägheitsmoment, in Bezug auf den Höhenperpendikel, eine viel bessere Annäherung geben, denn in ihm selbst liegen beide Schwerpunkte, also ist ihre Entfernung senkrecht darauf gemessen, gleich 0, und der Winkel, den die Seiten mit dem Höheperpendikel bilden, sind klein.

Rechnen wir zunächst die wirklichen Momente aus, so erhalten wir Fläche, statisches und Trägheitsmomente wie folgt:

$F = 3{,}41 \cdot 52{,}8 - 2{,}79 \cdot 43{,}2 = 180{,}048 - 120{,}528 = 59{,}52;$
$M_y = 180{,}048 \cdot 17{,}6 - 120{,}528 \cdot 14{,}98125 = 1363{,}184;$
$y_s = 1363{,}184 \cdot 59{,}52 = 22{,}9029$
$y_s - 17{,}6 = 5{,}3029;\ y_s - 14{,}98125 = 7{,}92165$
$\mathfrak{M}_{yy} = (5{,}3029^2 + {}^1/_{18} \cdot 52{,}8^2)\,180{,}048 - (7{,}92165^2 + {}^1/_{18} 43{,}2^2)\,120{,}528$
$= 32948{,}92 - 20059{,}77 = 12889{,}1$
$\mathfrak{M}_{zz} = {}^1/_6 (3{,}41^2 \cdot 180{,}048 - 2{,}79^2 \cdot 120{,}528) = 348{,}94 - 156{,}37$
$= 192{,}57$

Mit diesen wahren Werthen wollen wir jetzt $e \int y^2 \, d\,s$ als erste Annäherung vergleichen; wir denken uns dabei die Mittellinie des Randes mit einer Fläche von 0,58125 Breite gleichförmig belastet.

Es folgen hier die Rechnungen.

Die Fläche erhält man, wie oben, gleich:

$$F = 2\,(48{,}1 + 3{,}1) \cdot 0{,}58125 = 51{,}2 \cdot 1{,}1625 = 59{,}52,$$

die übrigen Momente am einfachsten durch Substitution der Werthe: $a = b = 48{,}1$; $c = 6{,}2$; $s = 102{,}4$ in die Gleichungen von Nr. 109 S. 434 nämlich:

$$y_s = \frac{s - c}{2\,s}\, l = \frac{96{,}2}{2 \cdot 102{,}4} \cdot 48 = 22{,}546875.$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = \frac{(s-c)(s+3c)}{12\,s}\, l^2 \cdot 0{,}58125 = \frac{96{,}2 \cdot 121 \cdot 48^2 \cdot 0{,}58125}{2 \cdot 102{,}4}$$
$$= 12686$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = \frac{s(s-a)(s-b)\,c^2}{3\,(s+c)^2}\, 0{,}58125 = \frac{102{,}4 \cdot 54^2{,}3 \cdot 6^2{,}2 \cdot 0{,}58125}{3\ 108^2{,}6}$$
$$= 190{,}7.$$

Der Schwerpunkt der Mittellinie des Umfangs weicht um: $22{,}547 + {}^1/_2 \cdot 0{,}58125 - 21{,}707 = 1{,}13$, also um ${}^1/_{40}$ der Höhe vom wahren Schwerpunkt ab, was noch ziemlich bedeutend ist; die $\mathfrak{M}_{yy}$ des Näherungswerthes um 203 oder ${}^1/_{60}$; und die $\mathfrak{M}_{zz}$ um 1,9 oder ${}^1/_{90}$ von den wahren Trägheitsmomenten ab.

Diese drei Abweichungen haben darin ihren Grund, dass die Ränder namentlich die Seitenränder von aussen merklich länger als innen sind, und dass demnach die Schwerpunkte der drei

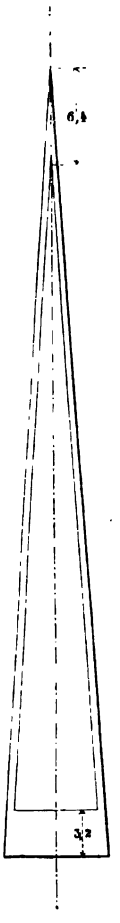
Seiten nicht in den Mittellinien, sondern ausserhalb derselben liegen, woraus sich sofort ergiebt, dass der wahre Schwerpunkt näher beim $^1/_3$ der Höhe liege, und dass die wahren Trägheitsmomente grösser, als wie die der Mittellinien des Randes sein müssen.

Berechnen wir nun zum Schluss das Differential des Trägheitsmomentes der ganzen Fläche. Man hat:

$$\mathfrak{M}_{yy} = d \cdot \frac{1}{36} b h^3 = \left(\frac{h}{6}\right)^2 (3\, b \cdot dh + h \cdot db) =$$

$$= \left(\frac{48}{6}\right)^2 (18{,}6 \cdot 9{,}6 + 48 \cdot 1{,}24) = 15233{,}3,$$

Fig. 182.



$$\mathfrak{M}_{zz} = d \cdot \frac{1}{48} b^3 h = \frac{b^2}{48} (b \cdot dh + 3\, h \cdot db) =$$

$$= \frac{3{,}2^2}{12} \cdot 1 (6{,}2 \cdot 9{,}6 + 144 \cdot 1{,}24) = 190{,}66.$$

$\mathfrak{M}_{zz}$ weicht nur um 1,91 also $^1/_{100}$ vom wahren Werth, dagegen $\mathfrak{M}_{yy}$ um 2444 beinahe $^1/_5$ von demselben ab, und kann daher nicht mehr als Näherungswerth gelten. Von dieser bedeutenden Abweichung kann man sich leicht Rechenschaft ablegen, wenn man die Figur construirt, auf die sich die letzten Trägheitsmomente beziehen.

Da $^1/_{36}\, b h^3$ das Moment in Bezug auf den Schwerpunkt ein Centralmoment ist, so kann $d \cdot {}^1/_{36}\, b h^3$ nur dann ein Centralmoment sein, wenn auch $^1/_{36}\, (b + d\,b)\, (h + d\,b)^3$ ein solches ist. Demnach geben, wenn die höheren Potenzen von $d\,b$ und $d\,h$ vernachlässigt werden können, die Differentiale der Momente das Moment des Ringes zwischen den zwei Dreiecken, deren Dimensionen durch $b\,h$ und $b + db$, $h + dh$ bestimmt werden, und deren Schwerpunkte zusammenfallen; Fig. 182 wo die Höhe der Basis $= {}^1/_3 \cdot dh = 3{,}2$ und die der Spitze $^2/_3 \cdot dh = 6{,}4$, statt 0,58125 und 8,01775 ist, stellt demnach das Dreieck dar, dessen Trägheitsmomente durch jene Differentiale gegeben werden. Man sieht die Fläche der kleinen Basis ganz besonders verbreitert, wodurch das grössere Moment erzeugt

worden ist, weil laut Nr 119 d S. 435 die kleinste Seite eines Dreiecks nie von der Centralellipse geschnitten wird. Dagegen stimmt das Trägheitsmoment in Bezug auf den Höhenperpendikel vollständig mit dem wahren Trägheitsmoment überein, denn jede Parallele zu ihm schneidet die Fig. 182 in Segmenten, die gleichgross sind.

Durch die Resultate dieses Beispiels, wurde das im Eingang dieser Nummer allgemein Entwickelte voll bestätigt. Bei ringförmigen Figuren dürfen wohl die Momente des Umfangs, nie aber die Differentiale der Flächen als Näherungswerthe der wahren Momente betrachtet werden.

114. Das Momentenplanimeter.

Im I. Band 1856 der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, hat Herr Prof. *Amsler* von Schaffhausen, die Construction eines Planimeters mitgetheilt, der auf mechanischem Wege gerade so, wie sein Nr. 27 S. 129 beschriebener Polarplanimeter durch Umfahren mittelst eines Stiftes gleichzeitig Fläche, statisches und Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe giebt.

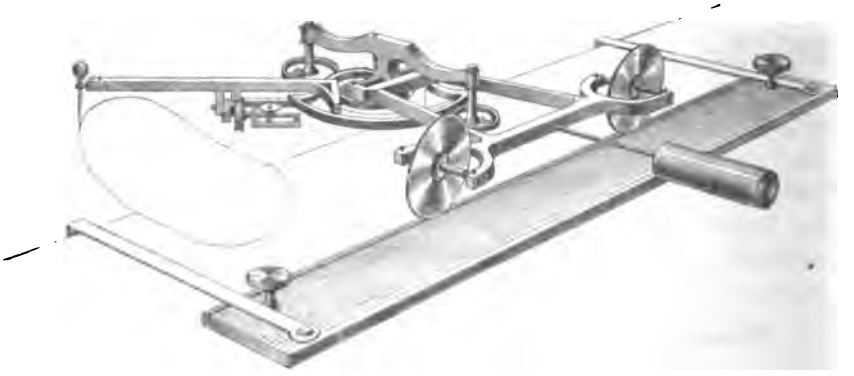
An einem vom Polytechnikum bestellten Instrument wurden dann noch wesentliche Verbesserungen angebracht; in dieser neuen Form leistet es uns ausgezeichnete Dienste, und wir wollen hier das Instrument, siehe Fig. 183, kurz beschreiben und dessen Theorie entwickeln.

Es besteht in einem Wagen, dessen zwei Räder in der Rinne eines Lineals laufen, so dass sich der Wagen nur parallel zu sich selbst geradlinigt verschieben kann. Der Wagen trägt die Zapfenlager eines horizontalen Zahnrades, das durch einen radialen Stab gedreht wird, an dessen Ende der Fahrstift sich befindet.

Das Zahnrad greift in zwei andere kleinere Zahnräder, deren Theilradien $^1/_2$ und $^1/_3$ des grossen Zahnrades sind. Der Radius des grossen Rades ist übrigens nicht constant, sondern die der kleinen Räder sind es, und jener variirt je nachdem der treffende Theil des Rades in das eine, oder in das andere der beiden kleinern Räder greifen soll. Die kleinern Räder sind auf einer Senkrechten zum

Lineal so angebracht, dass sie das Spiel des Fahrstiftes möglichst wenig beschränken, auf der andern Seite aber auch das Umschlagen verhindern; es ist und soll also nicht möglich sein, dass der Wagen einmal rechts, und einmal links vom Fahrstift sich befinde.

Fig. 183.



Mit dem Stab, der den Fahrstift trägt, ist eine Laufrolle verbunden, deren Axe parallel mit dem Stab liegt. Da das am Wagen befestigte Ende des Stabes hin und zurück eine gerade Linie, also eine Figur, deren Inhalt gleich null ist beschreibt, so giebt laut Nr. 26 S. 127 der Weg der Rolle multiplicirt mit der Stablänge den Inhalt F, der vom Fahrstift umfahrenen Fläche an.

In den Scheiben der beiden kleinern Zahnräder sitzen zwei weitere Laufrollen. Steht der Fahrstift auf der Parallelen zum Lineal, welche das andere Ende des Fahrstiftes oder den Mittelpunkt des grossen Zahnrades beschreibt, so steht die Axe des Zahnrädchens, dessen Halbmesser halb so gross, als wie der des grossen ist, senkrecht auf dem Lineal; und die des Rädchens, dessen Halbmesser $^1/_3$ des grossen ist, parallel zu demselben. Ist φ der Winkel, den der Stab in irgend einer Stellung mit dem Lineal bildet, so sind $90 + 2\varphi$ und 3φ die Winkel, welche die Axen der beiden Laufrollen mit dem Lineal bilden. Diese Verhältnisse sind schematisch durch Fig. 184 dargestellt.

Die Balancirung und die Construction des Instrumentes sind ungemein fein und sinnreich. Der Rahmen, der die 3 Zahnräder trägt, ist nicht fest sondern durch ein Charnier mit dem Wagen

verbunden und so durch ein Gegengewicht balancirt, dass die beiden Laufrädchen gleichmässig sanft an das Papier angedrückt werden. Ein zweites Charnier verbindet den Stab mit dem grossen Zahnrad, er drückt nur vermöge seines eigenen Gewichtes auf das Papier. Ein drittes Charnier verbindet mit diesem Stab den Rahmen, der die Axe seiner Laufrolle trägt; da diese nicht schwer genug ist, um den passenden Druck auf das Papier auszuüben, so wird sie noch durch eine Feder etwas stärker angedrückt. Sämmtliche Charniere haben verhältnissmässig lange Axen, so dass, unbeschadet der nothwendigen Steifigkeit, die drei Rollen und der Fahrstift so gleichmässig sanft an das Papier angedrückt werden, dass sie nie aus der Berührung mit dem Papier treten und doch ganz leicht dem Zug des Stiftes folgen, der ohne Anstrengung mit der Hand um die Figur geführt wird. Diese gewiss nicht leichte mechanische Aufgabe ist hier sicher mit grosser Eleganz und Einfachheit gelöst.

Untersuchen wir nun, welche Wege die drei Laufrollen zurücklegen, wenn der Fahrstift (siehe Fig. 184) eine geschlossene Figur des Inhaltes F umfährt.

Es sei b die Länge des Stabes, u_1 der Umfang der auf ihm sitzenden ersten Laufrolle und α_1 die Zahl ihrer Umdrehungen, also $\alpha_1 u_1$ der Weg, den sie nach dem Umfahren der Figur zurückgelegt hat.

Dann ist laut Nr. 26 S. 127 der Inhalt der umfahrenen Figur:

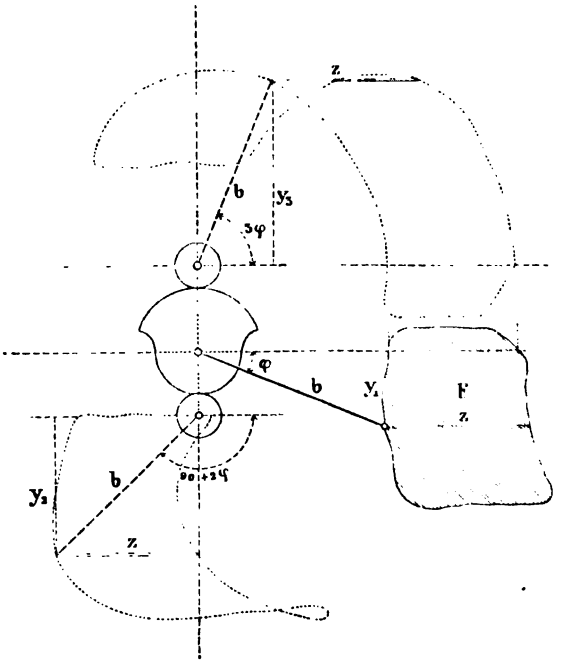
$$F = \alpha_1 (u_1 b).$$

Da α_1 den Flächeninhalt angeben soll, so müssen die Dimensionen von u_1 und b so gewählt sein, dass das Product $u_1 b$ gleich der Flächeneinheit sei, gleich 1 □Decimtr. bei dem Instrument, das wir vor uns haben.

Um die Wege $\alpha_2 u_2$ und $\alpha_3 u_3$ der beiden andern Rollen zu erhalten, ermitteln wir die Inhalte $\alpha_2 (u_2 b)$ und $\alpha_3 (u_3 b)$ der beiden Figuren, die Fahrstifte umfahren würden, welche wir uns an Stäben angebracht denken können, deren Längen vom Mittelpunkt der kleinen Räder an in der Richtung der Laufrollenaxen gemessen, ebenfalls gleich b wären. Diese Stäbe sind in Fig. 184 punktirt, wie auch die Figuren, die sie umfahren würden, wenn sie vorhanden wären.

Theilen wir die gegebene Figur durch Parallelen zum Lineal in Lamellen von der Länge z, so werden die Lamellen gleich lang sein, welche einem und demselben φ entsprechen, und deren Ordinaten

Fig. 184.



in Bezug auf Axen, die parallel zum Lineal durch die Mittelpunkte der drei Räder gezogen werden, durch φ wie folgt gegeben sind:

$$y_1 = b \sin \varphi,$$

$$y_2 = b \sin (90 + 2\varphi) = b \cos 2\varphi = b(1 - 2\sin^2\varphi) = b - \frac{2y_1^2}{b},$$

$$y_3 = b \sin 3\varphi = b(3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi) = 3y_1 - 4\frac{y_1^3}{b^2}.$$

Die Flächeninhalte der drei Figuren sind also:

$$\alpha_1 (b\, u_1) = \int z\, dy_1 = F,$$

$$\alpha_2 (b\, u_2) = \int z\, dy_2 = -\frac{4}{b}\int y_1\, z\, dy_1 = -\frac{4}{b} M_y,$$

$$\alpha_3 (b\, u_3) = \int z\, dy_3 = 3\int z\, dy_1 - \frac{12}{b^2}\int y_1^2 z\, dy_1 = 3F - \frac{12}{b^2}\mathfrak{M}_{yy}.$$

Und hieraus ergeben sich die gesuchten Momente:

$$F = \alpha_1 (b u_1),$$
$$M_y = -\alpha_2 (1/4\ b^2 u_2),$$
$$\mathfrak{M}_{yy} = \alpha_1 (1/4\ b^3 u_1) - \alpha_3 (1/12\ b^3 u_3).$$

Die eingeklammerten Grössen hängen nur von den Dimensionen des Instrumentes ab und erscheinen daher als constante Zahlencoefficienten. Für unser Instrument sind sie:

$$F = \alpha_1,$$
$$M_y = 0{,}4485\ \alpha_2,$$
$$\mathfrak{M}_{yy} = 0{,}7753\ \alpha_1 - 0{,}2633\ \alpha_3.$$

Der Zeichenwechsel von M_y wurde einfach dadurch bewirkt, dass die Theilstriche der 2ten Rolle in entgegengesetztem Sinne als wie die der zwei andern Rollen numerirt wurden.

Nach vollendetem Instrument wurde durch kleine Correction der Stablänge b, die am Stift vorgenommen werden kann, das Product $b\ u_1 = 1$ gemacht und dann die übrigen Coefficienten durch Umfahren von Figuren bekannten Flächeninhaltes und Momentes ermittelt. Ein Vergleich derselben mit den obigen Formeln setzt uns in den Stand, rückwärts die Dimensionen der einzelnen Constructionstheile genau zu berechnen. Aus:

$$1/4\ b^3 u_1 = 0{,}7753,$$

folgt da $b\ u_1 = 1$ ist:

$$b = 1{,}7610 \text{ Decim.}$$

und

$$u_1 = \frac{1}{b} = 0{,}5678;\quad d_1 = \frac{u_1}{2\pi} = 0{,}1808,$$

wenn mit d_1 der Durchmesser der ersten Rolle bezeichnet wird; den der beiden andern werden wir entsprechend mit d_2 und d_3 bezeichnen. Ferner ist:

$$\frac{b^2 u_2}{b^3 u_1} = u_2 = \frac{0{,}4485}{0{,}7753} = 0{,}5785;\quad d_2 = 0{,}1841.$$

Endlich hat man noch:

$$\frac{3\ (1/12\ b^3 u_3)}{b\ (1/4\ b^3 u_1)} = u_3 = \frac{3 \cdot 0{,}2633}{1{,}7610 \cdot 0{,}7753} = 0{,}5785;\quad d_3 = 0{,}1841.$$

Wie das Polarplanimeter, so macht auch dieses Instrument eher einen absoluten als wie einen relativen Fehler. Das mit dem

Nonius abgelesene $^1/_{1000}$ des Umfangs einer Rolle ist absolut nicht mehr sicher. Dies beträgt bei F $^1/_{10}$ □Ctm., mag die Fläche gross oder klein sein. Bei $\mathfrak{M}_{yy}$ aber beträgt es $^1/_{1000}$ Decim.^{4} = 10 Ctm.^{4}, also relativ viel mehr, weil der Inhalt der meisten Eisenquerschnitte, die wir einzeln zu behandeln haben, kleiner als ein □Decim. ist. Immerhin ist die Genauigkeit noch viel grösser als wie diejenige, mit der Festigkeitscoefficienten bestimmt werden können, also überhaupt die, mit der wir construiren. Es ist daher ein vorzügliches Mittel, um praktisch die Momente der Querschnitte zu bestimmen.

Liegt ein Querschnitt vor, dessen Schwerpunktsaxe nicht von vorn herein bekannt ist, so bestimmt man die Momente zunächst für eine approximativ möglichst nahe am Schwerpunkt angenommene Axe und berechnet dann mittelst der erhaltenen F, M_y und $\mathfrak{M}_{yy}$ mit Hülfe des Rechenschiebers die zum Lineal parallele Schwerpunktsaxe aus:

$$y_s = \frac{M_y}{F},$$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe aus:

$$\mathfrak{M}'_{yy} = \mathfrak{M}_{yy} - \frac{M_y^2}{F}.$$

Mittelst zweier oder dreier solcher Momente erhält man die Centralellipse, der dann die sämmtlichen Momentenverhältnisse entnommen werden können.

So eben hat uns Herr *Amsler* ein bedeutend vereinfachtes Momentenplanimeter vorgezeigt, dessen Preis viel geringer als wie der des eben beschriebenen Planimeters sein wird, mit dem man dagegen 3mal eine Figur wird umfahren müssen, um ihren Flächeninhalt und ihre beiden ersten Momente zu erhalten.

Da es uns nicht mehr möglich ist, für die folgende kurze Beschreibung einen Holzschnitt anfertigen zu lassen, so bitten wir, die Fig. 84 S. 129 nach Maassgabe der Beschreibung mit Theilen der Fig. 184 ergänzen zu wollen.

Der Leitstab OB (Fig. 84) trägt an seinem Ende das grosse Rad der Fig. 184, so dass sein Mittelpunkt mit B zusammenfällt; durch eine Klinke kann das Rad fest mit dem Stabe verbunden oder auch so ausgelöst werden, dass es frei um seine Axe spielt, wodurch es ganz ausser Function tritt.

Der Fahrstab AB trägt bei C ein Zahnrädchen, das in das vorige Rädchen eingreift, welches die einzige vorhandene Laufrolle trägt und dessen Durchmesser halb so gross als wie der des grossen Rades ist. Auch dieses Rädchen kann mit dem Stab festgeklemmt oder gelöst werden.

Ist dieses Rädchen festgeklemmt und das bei B gelöst, so hat man das ganz gewöhnliche Planimeter, die Laufrolle auf dem Rädchen bei C beschreibt einen Weg, der dem Flächeninhalte proportional ist.

Wird das Ende A des Stabes AB auf einen Wagen festgeklemmt, der wie in Fig. 184 auf einem Lineal hin und her läuft, und das grosse Rad fest mit dem Stabe OB verbunden, so erhält man eine Anordnung, die ganz mit derjenigen der Theile von Fig. 184 übereinstimmt, welche zur Bestimmung der statischen Momente dienen. Die Umdrehungszahl der Laufrolle bei dem Umfahren einer Figur mit dem Stift O ist dem statischen Moment proportional.

Wird dagegen der Stab OB auf den Wagen geklemmt, das Rad B fest mit ihm verbunden, allein in einer andern Stellung als wie vorhin, was mittelst besonderer Kerben durch die Klinke besorgt wird, so beschreibt die Laufrolle auf dem kleinen Rädchen bei C, das wie ein Planetenrad um das grosse sich herumdreht, einen Weg, der der Summe des Trägheitsmomentes und des Productes der Fläche mit Constanten proportional ist.

Die Formeln für den Flächeninhalt und für das statische Moment der umfahrenen Figur sind identisch mit den oben aufgestellten, dagegen gestaltet sich die für das Trägheitsmoment in etwas anderer Weise. Denken wir uns nämlich im Mittelpunkte des kleinen Planetenrädchens einen ideellen Stab mit der Länge a angebracht, und untersuchen wir die geschlossenen Figuren, welche seine Endpunkte beschreiben, so ist der Inhalt der Figur, welche der Mittelpunkt des Rädchens beschreibt, nicht mehr gleich 0 wie in Fig. 184, wo er eine gerade Linie hin und her beschreibt, sondern er beschreibt eine Figur, deren Inhalt berücksichtigt werden muss.

Bezeichnen wir die Ordinaten dieser Figur mit y'_2 und die Entfernung der Mittelpunkte beider Räder mit a_2, so sind die Ordinaten der von dem Ende des ideellen Stabes umschriebenen Figuren:

$$y_2 = a \sin 3\varphi - a_2 \sin \varphi = \left(3 - \frac{a_2}{a}\right) y - 4 \frac{y^3}{a^2},$$

$$y'_2 = a_2 \sin \varphi = \frac{a_2}{a} y.$$

Hieraus ergeben sich die Differentialquotienten:

$$d y_2 = \left[\left(3 - \frac{a_2}{a}\right) - 12 \frac{y^2}{a^2}\right] d y, \quad d y'_2 = \frac{a_2}{a} d y.$$

Und die Inhalte der von den entsprechenden Stiften umschriebenen Figuren sind gleich:

$$\left(3 - \frac{a_2}{a}\right) F - \frac{12}{a^2} k^2 F, \qquad \frac{a_2}{a} F.$$

Man überzeugt sich leicht, dass beide Figuren von ihren ideellen Stiften in entgegengesetztem Sinne umfahren werden, und dass demnach der Weg der Laufrolle gleich ist:

$$a_2 a u_2 = \left(3 - 2\frac{a_2}{a}\right) F - \frac{12}{a^2} k^2 F,$$

woraus sich ergiebt:

$$k^2 F - \frac{1}{12}(3a - 2a_2)\, a F - \frac{1}{12} a_2 a^3 u_2$$

$$= \frac{\alpha}{12}(3a - 2a_2)\, a^2 u - \frac{a_2}{12} a^3 u_2.$$

Das Rückwärtsberechnen der Dimensionen aus den Constanten unterlassen wir, weil uns gerade kein derartiges Instrument vorliegt.

Man sieht, die Bedeutung der Constanten hat sich etwas geändert, im Uebrigen aber hat die Formel die gleiche Form behalten.

Dieses neue Momentenplanimeter ist jedenfalls viel einfacher und handlicher, als das erstbeschriebene mit seinen 3 Laufrädern, allein das Umfahren kostet viel mehr Mühe und es fragt sich, ob es ebenso genaue Resultate liefern wird. Werden bei dem wiederholten Festklemmen der Stäbe an den Wagen, bei dem beständigen Ein- und Ausklinken der Rädchen alle diese Theile jedesmal wieder hinlänglich genau an ihre ursprüngliche Stelle kommen? Geben doch schon diejenigen gewöhnlichen Planimeter (Fig. 84), bei welchen alles fest und steif ist, viel genauere

und zuverlässigere Resultate, als wie diejenigen, deren Fahrstab zur Veränderung der Reductionsbasis ein- und ausgeschoben werden kann.

115. Centralellipse und Kern eines Schienenprofils.

Wir können zum Trägheitsmoment und dann zum Trägheitshalbmesser h eines unregelmässig begrenzten Querprofils dadurch am bequemsten gelangen, dass wir, wie es in Nr. 98 S. 393 angedeutet wurde, die Figur in Lamellen zerlegen und das Moment 2. Grades derselben bilden.

Die hierzu nothwendigen Constructionen wollen wir an demselben Schienenprofil (Taf. 12_1) erläutern, dessen Schwerpunkt auf ähnlichem Wege schon in Nr. 96 d S. 387 bestimmt wurde, und wir fahren hier gerade da fort, wo wir dort stehen geblieben sind.

Wir zeigten, dass die Segmente $\Delta z''$ auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt den einfachen Momenten $y \Delta F$ des Inhalts der Lamellen in der Art proportional sind, dass sie mit $\frac{1}{2} a z'_{19} = F = 47{,}76$ □Ctm. multiplicirt werden müssen, um diese Momente zu geben. Betrachten wir daher die Linie z'' als die eines Kräftepolygons, dessen einzelne Kräfte durch die Segmente $\Delta z''$ dargestellt sind, und nehmen wir an, dass sie ebenfalls in der Richtung der Lamellenmitten wirken, indem wir ein zweites Polygon construiren, dessen Ecken auf denselben Horizontalen liegen: so werden uns die Polygonseiten dieses zweiten ∞förmigen Polygons auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt Segmente abschneiden, welche den Momenten der $\Delta z''$ in der Art proportional sind, dass sie mit c, der Entfernung des Pols des neuen Kräftepolygons von der Linie z'' der Kräfte multiplicirt werden müssen, um die Momente der $\Delta z''$ also $y \Delta z''$ darzustellen; es ist also:

$$c \Delta z''' = y \Delta z''.$$

Nun ist aber laut Nr. 96 d S. 387 schon:

$$\frac{1}{2} F \Delta z'' = \frac{1}{2} a z'_{19} \Delta z'' = y \Delta F,$$

mithin wird

$$\frac{1}{2} F c \Delta z''' = y^2 \Delta F \text{ sein.}$$

Aus der ∞förmigen Gestalt dieses zweiten Polygons geht hervor, dass alle $\Delta\, z'''$ gleiches Zeichen zu beiden Seiten der Horizontalen durch den Schwerpunkt haben; wie es auch sein muss, weil y^2 mit y sein Zeichen nicht ändert. Die sämmtlichen $\Delta\, z'''$ summiren sich daher so zu z'''_{19}, dass

$$^1/_2\, F\, c\, z'''_{19} = \sum_{o}^{19} y^2\, \Delta\, F \text{ ist.}$$

Da das Trägheitsmoment mit seinen 4 Dimensionen nie im Ganzen verwerthet werden kann, indem sogar Momente mit einem Coefficient pro Flächeneinheit nur 3 Dimensionen haben, so wird es immer mit irgend welchen Flächen oder Linien dividirt werden müssen.

Soll die Höhe der Centralellipse construirt werden, so ist das Trägheitsmoment durch die Fläche F des Querschnitts zu dividiren, deshalb nahmen wir das Product der beiden ersten Basen gleich $^1/_2\, a\, z'_{19} = {}^1/_2\, F$ gleich einem Untervielfachen der Querschnittsfläche an. Soll das Widerstandsmoment bestimmt werden, so ist das Trägheitsmoment durch die Entfernung c der äussersten Faser vom Schwerpunkt zu dividiren. Aus diesem Grunde wurde Taf. 12_I als Distanz des zweiten Poles von der Linie der z'' die Entfernung des Schienenkopfes von dieser Linie angenommen. Die auszuführenden Divisionen sind dann vollzogen, wenn man die treffenden Factoren weglässt.

Zur Uebersicht stellen wir hier noch einmal die in Nr. 96 d erhaltenen und jetzt construirten Momente zusammen und schreiben dabei ihre Factoren in der Reihenfolge an, in der sie als Basen zur Verwendung kamen:

$$\Sigma \quad \Delta\, F = a\, z' = F,$$

$$\Sigma\, y\, \Delta\, F = a \,.\, {}^1/_2\, z'_n \,.\, z'' = {}^1/_2\, F_n\, z'',$$

$$\Sigma\, y^2\, \Delta\, F = a \,.\, {}^1/_2\, z'_n \,.\, c \,.\, z''' = {}^1/_2\, F_n\, c\, z''',$$

$$h^2 = \sum_{o}^{n} y^2\, \Delta\, F : F = {}^1/_2\, c\, z'''_n.$$

Soll die Construction dazu dienen, die Momente der im Querschnitt wirkenden Kräfte zu bestimmen, so ist, wenn die neutrale Faser mit der Schwerpunktsaxe zusammenfällt und die Faser in der Entfernung c mit ϱ pro Flächeneinheit in Anspruch genommen ist, die in einer beliebigen Zahl Lamellen wirkende Kraft nebst ihrem Moment laut Nr. 105, wenn $y_n = 0$ zu setzen ist:

$$Q = (\varrho F_n) \cdot \frac{z''}{2c},$$

$$\mathfrak{Q} = (\varrho F_n) \cdot {}^1/_2 z'''.$$

In allen diesen Summen müssen natürlich die Grenzen der z mit denen der Lamellen, auf die sich die Kräfte und Momente erstrecken müssen, übereinstimmen. F_n und z_n erstrecken sich über die sämmtlichen n Lamellen (19 im vorliegenden Beispiel), welche demnach in obigen Formeln als Constanten erscheinen. F_n ist der ganze Schienenquerschnitt und ϱF_n die Kraft, der der Balken widerstehen könnte, wenn er überall gleichmässig mit ϱ pro Einheit in Anspruch genommen wäre. In Q und $\mathfrak{Q}$ tritt diese Kraft als Reductionsbasis auf; also ist ${}^1/_2 z'''$ der Hebelsarm, an dem sie wirken muss, um das Moment der in einer beliebigen Anzahl Lamellen wirkenden Kräfte darzustellen.

Nach vollendeter Construction der Seilpolygone erhält man h dadurch, dass man an z'''_n, ${}^1/_2 c$ anreiht, über der Summe beider einen Halbkreis, der dann auf der Ordinate im Stosspunkte der Strecken die Höhe h der Centralellipse ausschneidet.

Zur Bestimmung der Momente in Bezug auf die verticale Schienenaxe können wir uns die halbe Fläche jeder Lamelle laut Nr. 101 S. 405 in den Endpunkten der dieser Axe conjugirten Durchmesser, oder, weil die Axe eine Symmetrieaxe ist und also die Mittelpunkte aller Lamellenellipsen enthält, die ganze Fläche in einem Endpunkt dieser Durchmesser vereinigt denken. Wenn die Lamellen als Rechtecke betrachtet werden können, so liegt dieser Endpunkt im $\sqrt{{}^1/_3} = 0{,}57735$ der halben Lamellenbreite, war die Lamelle nicht rechteckig oder gar wie die 1te parabelförmig, so wurde die Centralellipse besonders construirt. Die Endpunkte der Durchmesser sind fortlaufend numerirt und bestimmen die Verticallinien, die unter der Schiene durch zwei Seilpolygone miteinander verbunden sind.

Zur Construction des ersten Polygons wurde das schon vorhandene Kräftepolygon benutzt. Die Seilpolygonseiten stehen senkrecht auf den entsprechenden Strahlen des Poles O_1 und auf den Seiten des Polygons, das zur Construction des Schwerpunktes diente. Die z'', die seine Seiten auf der verticalen Schienenaxe ausschneiden, dienten als Kräftepolygon für das zweite Seilpolygon; der Pol O_2 wurde in der Distanz c' der äussersten Faser des

Schienenfusses angenommen. Die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygon schneiden auf der Schienenaxe die Länge z'''_{19} aus. Die transversale Widerstandsfähigkeit der Schiene erhält man also gleich $^1/_2\ (\varrho\ F)\ z'''_{19}$. Um die Länge der horizontalen Axe zu erhalten, wurde $^1/_2\ c'$ an z'''_{19} angereiht und k als Ordinate im Stosspunkt des über beiden beschriebenen Halbkreises bestimmt.

Wenn man über der Axe einer Ellipse zwei concentrische Kreise beschreibt und das zwischen ihnen liegende Segment eines Halbmessers als Diagonale eines Rechtecks betrachtet, dessen Seiten parallel mit den Axen laufen, so ist der dritte Eckpunkt des Rechtecks zwischen dem Halbmesser und dem Endpunkt der grossen Axe ein Punkt der Ellipse, und der Strahl, welcher vom Mittelpunkt aus den 4ten Eckpunkt des Rechtecks projicirt, läuft parallel mit der Normalen. Diese übrigens allgemein bekannten Eigenschaften der Ellipse wurden Taf. 12_1 dazu benutzt, die Centralellipse und den Kern zu construiren. Ausgezogen wurde daselbst die Construction der Antipolaren m des Punktes M und des Antipoles N der Linie n.

Vom Schwerpunkt S aus wurden mit h und k die beiden concentrischen Kreise und über dem Segment des Strahles $S\,M$ zwischen den Kreisen ein rechtwinkeliges Dreieck beschrieben, dessen Katheten parallel mit den Axen laufen; sein Eckpunkt liegt in der Diagonale desjenigen Rechtecks, dessen dritter Eckpunkt U auf $S\,M$ liegt und ein Curvenpunkt ist, und dessen vierter T die Richtung $S\,T$ der Normalen angiebt. Die Antipolare m schneidet $S\,M$ in der Entfernung $\overline{S\,U}^2 : S\,M$ von S. Diese Länge wurde dadurch construirt, dass $S\,U' = S\,U$ senkrecht auf $S\,M$ aufgetragen wurde. Der Perpendikel in U' auf $U'\,M$ schneidet dann auf der Verlängerung von $S\,M$ einen Punkt der Antipolaren m aus, die eben so wie die Tangente in U senkrecht auf $S\,T$ steht.

Die Normale von S auf n enthält einen Punkt des Rechtecks. Ein rechtwinkeliges Dreieck über seinem Segment giebt die Diagonale des Rechtecks; ein zweites Dreieck, welches das Rechteck ergänzt, giebt den Curvenpunkt V, dessen Tangente mit n parallel läuft. Der gesuchte Antipol von n liegt daher auf $S\,V$; diese Linie wurde bis zu N' in n verlängert, $S\,V'$ senkrecht und gleich $S\,V$ gemacht, dann schneidet der Perpendikel auf $N'\,V'$ in V' auf $S\,V$ den gesuchten Antipol N aus. Ist auf diese Weise die dem convexen Umfang des Schienenprofils entsprechende reciproke Figur, der Cen-

tralkern construirt, so hat man mittelbar gewöhnlich hinlänglich viele Punkte und Tangenten der Centralellipse erhalten.

Die hier erläuterte Construction ist wohl immer die einfachste, wenn die Axen gegeben oder leicht erhältlich sind.

116. Centralellipse und Kern eines Winkeleisens.

Um auch zu zeigen, wie grössere Flächen bei Construction der Trägheitsmomente zusammengesetzt werden können, wurde noch (Taf. 13) die Centralellipse eines Winkeleisens construirt, indem dasselbe in nur 4 Paralleltrapeze getheilt wurde, von denen zwei die ganzen Schenkel bilden.

Die auf die Basis $a = 4$ Centimeter reducirten Flächeninhalte wurden nur einmal auf der Linie z' aufgetragen, die Poldistanz als zweite Basis $= z' = 10{,}19$ Ctm. angenommen, und dann mittelst zweier Polygone, deren Seiten einmal parallel und einmal senkrecht zu den Strahlen des Kräftepolygons gezogen wurden und deren Ecken auf den Horizontal- und Verticallinien durch die Schwerpunkte der 4 Partialflächen des Winkeleisens lagen, der Schwerpunkt S bestimmt; die Bleistiftlinien, die hierzu gedient hatten, aber wurden wieder ausgelöscht.

Die Trägheitsellipsen der 4 Flächenelemente wurden eingezeichnet. Die Dimensionen der Fläche 1 sind so klein und die Entfernung ihres Schwerpunktes so gross, dass die Abweichung des Antipoles vom Schwerpunkt nicht mehr sichtlich ist. Man darf sich daher die Fläche ΔF_1 im Schwerpunkt vereinigt denken.

An ΔF_2 wurden die Antipole zur Bestimmung der höheren Momente benutzt. Der Antipol der verticalen Axe musste genau bestimmt werden, weil er zur Construction von $\frac{C}{h}$ dienen soll. Es wurde daher zunächst der der verticalen Axe conjugirte Durchmesser eingezeichnet, seine Länge in 2 senkrecht gestellt und dann mittelst seines Axenschnittes der Punkt $2'$ construirt, wie das schon öfters erklärt worden ist. Der Antipol der horizontalen Axe wird nur zur Construction von k^2 benutzt, man braucht daher nur die Horizontallinie, in der er liegt. Es durfte daher in diesem Fall die Construction des der horizontalen Axe conjugirten Durchmessers unterlassen werden und die Construction von $2''$ auf einem

verticalen Durchmesser mittelst einer der beiden horizontalen Tangenten an die Centralellipse vorgenommen werden; 2'' ist aber in Folge dessen nicht der Antipol der verticalen Axe, sondern liegt nur auf der gleichen Horizontalen.

Die Centralellipse von ΔF_3 wird von einer der Axen geschnitten; in diesem Fall ist es vortheilhaft, sich die halben Flächen $^1/_2 \Delta F_3$ an den Endpunkten der den Axen conjugirten Durchmesser vereinigt zu denken. Wegen der Construction von $\frac{C}{h}$ müssen die Flächen 3' und 3'' wirklich an den Endpunkten des der verticalen Axe conjugirten Durchmessers angenommen werden, während 3_1 und 3_2 bei der Construction von k^2 nur auf den horizontalen Tangenten zu liegen brauchen.

Die Eckpunkte des ersten Polygons, welches Verticallinien verbindet, liegen auf den Verticalen: 1, 2, 3', 3'', 4. Auf der Schwerpunktsaxe schneiden die Polygonseiten die $\Delta z''$ aus, welche dem zweiten Polygon als Linie der Kräfte dienen. Die Poldistanz wurde gleich der Entfernung c der äussersten Faser angenommen. Die Eckpunkte des zweiten Polygons liegen auf den Verticallinien 1 2' 3' 3'' 4, geben z'''_n, mittelst dessen h construirt wurde als $\sqrt{c\, z'''_n}$, was keiner weiteren Erläuterung mehr bedarf.

In gleicher Weise wurde k construirt. Die Eckpunkte des ersten Seilpolygons, welches Horizontallinien verbindet, liegen auf den Horizontalen 1, 2, 3_1 3_2 und 4. Sie schneiden auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt die $\Delta z''$ aus, die mit der Entfernung c der äussersten Faser als Poldistanz zur Construction des zweiten Polygons gedient haben, dessen Ecken auf den Horizontalen 1 2'' 3_1 3_2 4' liegen und das z'''_n auf der Horizontalen ausschneidet, mit dem $k = \sqrt{c\, z'''_n}$ construirt wurde.

Zur Construction von $\frac{A}{k}$ wurden die $\Delta z''$ auf der Verticallinie durch den Schwerpunkt benutzt, als Poldistanz k angenommen und mit diesem Kräftepolygon ein Seilpolygon construirt, das die Horizontallinien 1 2' 3' 3'' 4' verbindet und dessen Seiten senkrecht auf den entsprechenden Strahlen des Kräftepolygons stehen. Da die Mittelpunkte aller Flächen in einem und demselben Axenwinkel liegen und demnach alle $y\, z\, \Delta F$ gleichen Sinn haben, so kann über die Lage des Berührungspunktes auf den horizontalen

Tangente an die Centralellipse, deren Entfernung vom Schwerpunkt $= k$ ist, kein Zweifel bestehen; dieser Berührungspunkt muss in demselben Axenwinkel liegen, in welchem sich auch alle ΔF befinden. Lägen die ΔF nicht in demselben Axenwinkel und hätten demnach die $\Delta z''' = x y \Delta F : c F$ verschiedene Sinne, so müsste der Berührungspunkt in dem Axenwinkel derjenigen ΔF liegen, deren $\Sigma \Delta z'''$ die grössere ist, was jederzeit ein Blick auf die Zeichnung entscheidet.

Die Construction der Centralellipse mittelst h, k und $\frac{A}{h}$ wurde Taf. 12_2 nach den in Nr. 101 S. 402 entwickelten Regeln, vorgenommen. Ein Halkreis, beschrieben über den Schnittpunkten der beiden zu z parallelen Tangenten $+ h$ und $- h$ mit der Tangente $+ k$, schneidet auf dem gestrichten Perpendikel im Berührungspunkte bei $\frac{A}{k}$ das Involutionscentrum C aus. Ein Halbkreis, der durch das Involutionscentrum C und durch den Schwerpunkt S geht, schneidet auf der Tangente $+ k$ Axenpunkte aus. Schlägt man von diesen aus das Involutionscentrum auf die Tangente $+ k$ herab, so erhält man Punkte der Scheiteltangenten. Schlägt man den Perpendikel C selbst von seinem Fusspunkt aus auf die Tangente herunter, so erhält man Punkte der Tangenten an den Endpunkten der y Axe. Mittelst zweier Kreise über den Axen der Ellipse könnten nun auf dieselbe Weise, wie es in der vorigen Nummer gezeigt wurde, entsprechende Antipole und Polaren construirt werden. Taf. 12_2 wurde gezeigt, wie sie auch direct, ohne vorher die Axen zu bestimmen, mit Hülfe des Involutionscentrum C construirt werden können. Ist die Antipolare des Punktes N zu bestimmen, so ziehe man durch N und S den Durchmesser n', der Halbkreis durch C giebt dann den conjugirten Durchmesser m', mit dem die Antipolare parallel läuft. Ist dagegen der Antipol der Linie m zu construiren, so ziehe man durch den Schwerpunkt S den parallelen Durchmesser m' und ermittele mittelst eines Halbkreises durch C den conjugirten Durchmesser n', in welchem der gesuchte Antipol liegt. Wird nun vom Punkt m' aus das Involutionscentrum auf die Tangente $+ k$ heruntergeschlagen, so erhält man Punkte der Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers n'; diese Tangenten sind nun vollständig bestimmt, weil sie mit m' parallel laufen, sie schneiden daher Curvenpunkte auf n' aus.

Wird ihre Entfernung von S senkrecht zu n' in $S\ T$ aufgestellt, so schneidet der rechte Winkel $N\ T\ M$ in M den Antipol der Linie m aus. Eine Parallele n zu m' durch diesen Punkt giebt die Antipolare des Punktes n.

Diese Construction ist kaum complicirter als wie die mittelst der Axenkreise, die in der vorigen Nummer erklärt wurde.

Die Antipolarelemente aller Punkte und Linien des Umfangs des Winkeleisens (Taf. 13) geben den Centralkern.

Da die Centralellipse nicht ganz im Innern des Winkeleisens liegt, so liegt der Centralkern nicht ganz im Innern der Centralellipse.

117. Verschiedene Profile mit ihren Centralellipsen und ihren Kernen.

Auf Taf. 14 stellen wir einige der üblichsten Eisenprofilformen zusammen, um zu zeigen, wie der Kern derselben aussehe, damit das Auge sich daran gewöhne die Ellipse und den Kern zum Profil zu schätzen, und man die Fähigkeit erlange, diese Constructionselemente nach dem Augenmaass einzuzeichnen, und dann auch um diese Formen hinsichtlich ihrer Zweckmässigkeit mit einander zu vergleichen.

Bei der Construction der Ellipsen und Kerne sind auch noch die älteren graphischen Constructionen zur Anwendung gekommen, die wir zwar für weniger zweckmässig, als wie die in den beiden vorigen Nr. erklärten halten, die aber doch unter Umständen nützlich sein können, und daher der Mittheilung werth sind.

Taf. 14_2 wurde die Centralellipse mittelst drei Tangentenpaaren statt mittelst der Centrifugalmomente construirt. Auf der untern horizontalen Tangente wurden über ihren Schnittpunkten mit den beiden andern Tangentenpaaren Halbkreise beschrieben; ihr Schnitt giebt das Involutionscentrum C. Wie in der vorigen Nummer geben Halbkreise durch C und den Schnitt einer Parallelen zur Tangente durch den Schwerpunkt S einen Punkt des Durchmessers des Berührungspunktes dieser Tangenten. Die Axenrichtungen giebt ein Halbkreis, der durch C und S geht. Um die

Länge der kleinen Axe zu erhalten, wurde über ihrem Schnitt mit der nächsten Tangente, und mit der Ordinate des Berührungspunktes dieser, ein Halbkreis beschrieben; die Länge der kleinen Axe ist jetzt gleich der der Tangente von S an diesen Kreis. Denn beschreibt man mit dieser Tangentenlänge einen Kreis, so wird die kleine Axe von beiden Kreisen harmonisch geschnitten, weil beide Kreise sich rechtwinkelig kreuzen; da nun auch noch S in der Mitte der beiden so bestimmten Punkte liegt, so sind sie die Endpunkte der kleinen Axe. — Die Centralellipse ist mittelst dreier Tangentenpaare zu construiren, wenn drei Trägheitsmomente, d. h. drei Entfernungen dreier Tangenten mit Hülfe des Momentenplanimeters bestimmt worden sind.

Taf. 14_6 wurde die Centralellipse so collinear auf den über der kleinen Axe beschriebenen Kreis bezogen, dass beide die kleine Axe selbst und den unendlich fernen Punkt der grossen entsprechend gemein haben. Punkte entsprechen sich also, wenn ihre Abscissen sich wie die Ellipsenaxen verhalten. Indem man die dem Umfang des Querschnitts entsprechende Figur im Kreissystem construirt, können alle Polarconstructionen an diesen Kreis vorgenommen werden, und dann die Elemente des so erhaltenen verzerrten Kerns, in das System der Ellipse wieder zurückgebracht werden. Die Lage des dem Gegenpunkt M_1 des Punktes M entsprechenden Punktes M_2 ergiebt sich daraus, dass die Strahlen SM_1 und SM_2 zwei Paralleltangenten zur kleinen Axe an die Kreise der beiden Axen, auf einer und derselben Abscisse schneiden müssen. Zwei Tangenten von M_2 an den kleinen Kreis geben die Kreispolare m_2 des Punktes M_2. Werden die Radien nach den Berührungspunkten dieser Tangenten dazu benützt, um mit Hülfe der beiden concentrischen Axenkreise, nach der bekannten, und schon oft benützten Methode Ellipsenpunkte zu bestimmen, so sind diese, Punkte der Antipolaren m des Punktes M.

Taf. 14_5 unterscheidet sich von Taf. 14_6 nur dadurch, dass die Ellipse auf den grossen und nicht auf den kleinen Axenkreis bezogen wurde, und demnach die Tangenten an diesen vom hinausgeworfenen Gegenpunkt aus, gezogen wurden.

Wird ein Balken als selbständig tragender Constructionstheil verwendet, so soll sein Profil bei gleichem Flächeninhalt das möglichst grosse Widerstandsmoment, und den möglichst hohen

Centralkern darbieten; das letztere, damit es bei Abweichungen der ausserhalb eines Schnittes wirkenden Mittelkraft von der centralen Lage noch die möglichst grosse Sicherheit darbiete, weil bei den meisten solcher Constructionen die Mittelkraft nie aus dem Centralkern heraustreten soll. Das Widerstandsmoment ist laut Nr. 105 S. 419 gleich $\frac{k^2}{c} \cdot \varrho F$ bei gleichem Widerstandscoefficienten ϱ hat dieses Moment drei Dimensionen, und muss daher durch $\varrho F^{3/2}$ dividirt werden, wenn es mit der Fläche verglichen werden soll.

$$\frac{k^2}{c\sqrt{F}},$$

ist demnach eine Verhältnisszahl, welche bei Balken gleicher Querschnittfläche und gleichen Materiales, mit deren Widerstandsmoment ab und zunimmt, und sich daher zur Vergleichung der Form der Querschnitte eignet. Soll die Höhe des Centralkerns mit der Fläche verglichen werden, so ist sie mit $\sqrt{F}$ zu dividiren. Bezeichnen $c\,c'$ die Entfernungen der beiden äussersten Fasern vom Schwerpunkt, so ist die Höhe des Centralkerns gleich $\frac{k^2}{c} + \frac{k^2}{c'}$, und das gesuchte Verhältniss gleich:

$$\mu = \frac{k^2}{c\sqrt{F}} \left(1 + \frac{c}{c'}\right).$$

c ist bei symmetrischen Profilen gleich c', bei unsymmetrischen aber immer grösser; demnach ist diese Verhältnisszahl bei symmetrischen Profilen genau das doppelte von $\frac{k^2}{c\sqrt{F}}$, bei unsymmetrischen ist sie aber etwas grösser. Im Wesentlichen sind aber beide Verhältnisszahlen der Ausdruck für eine und dieselbe Sache, für die mehr oder weniger grosse Widerstandsfähigkeit des Profils.

Wir stellen jetzt diese Zahlen für die auf Taf. 12, 13 und 14 construirten Profile zusammen:

Taf.	Fig.	Prof.	F,	k,	$k^2 F$,	$k^2 F : c$,	$k^2 : c\sqrt{F}$,	μ.
12		Schiene	47,85	4,7	1057,0	162,14	0,490	,983
13		⌋	40,8	5,2	1103,2	95,10	0,365	1,053
14	1	I	10,07	4,42	196,73	33,28	1,041	2,082
„	2	⌠	9,77	3,05	90,85	23,15	0,758	1,516
„	3	⌶	13,28	3,10	127,63	24,49	0,506	1,280
„	4	⊥	15,70	2,57	103,69	15,25	0,245	0,946
„	5	⊏	8,70	2,73	64,84	18,26	0,712	1,424
„	6	⍾	4,70	1,55	11,29	5,32	0,522	1,083
„	7	⍞	10,40	0,66	4,53	2,86	0,085	0,186
„	8	+	6,10	0,97	5,74	2,28	0,151	0,303

Die Ziffern dieser Tabelle drücken in Zahlen aus, was im Allgemeinen jedermann weiss. Obenan steht als das anerkannt beste aller Profile das I; es vereinigt am meisten Material in den äussersten Fasern, und giebt deshalb bei gleicher Fläche den grössten Widerstand. Seine Verhältnisszahl ist 1,04. Vielleicht liesse sich diese Zahl noch erhöhen, wenn man den Kopf noch etwas verstärkte, was die Stärke der Mittelrippe wohl gestattet. Umgekehrt drückt eine Verstärkung der Mittelrippe diese Verhältnisszahl herunter, wie es die Profile des ⌠ und ⊏ Eisen's Taf. 14_2 und $_5$ mit den Zahlen 0,758 und 0,712 zeigen. An diese Profile reihen sich das Zoréseisen ⍾ Taf. 14_6, das wegen seiner geringen Höhe nur die Verhältnisszahl 0,522 besitzt. Nahezu ebenso stark ist das ⌶ Eisen Taf. 14_3 mit der Zahl 0,506, noch schwächer ist die Eisenbahnschiene Taf. 12, welche wegen ihrer starken Mittelrippe nur die Zahl 0,49 erreicht; dagegen viel schlechter das + Eisen, Taf. 14_8, das gar nur die Zahl 0,151 zeigt. Das schlechteste aller Profile ist aber die americanische Flachschiene ⍞ Taf. 14_7, welches nur die Zahl 0,085 aufweist. In dieser Form trägt also das Eisen 12mal weniger, als wie in der I Form. Und doch sind ähnliche Formen bei der Anlage deutscher Eisenbahnen nachgeäfft worden! Erkundigt man sich dann nach dem Grund der Annahme dieser schwachen Form, so erfährt man, dass der Hauptzweck dieser Schiene nicht der sei Fahrzeuge zu tragen, sondern „das Publicum möglichst wenig zu belästigen."

Auf eine Eigenthümlichkeit muss hier noch aufmerksam gemacht werden. Früher wurden bisweilen Zoréseisen mit einem Korn oben aufgewalzt, wie es Taf. 14_6 punktirt wurde. Unter-

sucht man die Widerstandsfähigkeit eines solchen Zorèseisen, so findet man, dass es mit Korn der Biegung weniger Widerstand entgegensetzt, als wie ohne Korn. Das Beifügen an Material an einen Querschnitt, der im übrigen unverändert geblieben ist, hat die Widerstandsfähigkeit des Querschnitts vermindert. Um diesen Widerspruch zu erklären, darf man nur auf die Formel des Biegungsmomentes $\frac{k^2}{c} \varrho F$ zurückkommen. Durch das Beifügen des Kornes wurde $k^2 F$ verhältnissmässig nur sehr wenig, dagegen c viel mehr vergrössert, so dass diese Form ein kleineres Moment bei gleichem ϱ giebt.

Es ist nicht schwer, die Aenderung des Widerstandsmomentes einer Querschnittsfläche F durch Beifügung einer kleinen Fläche ΔF auszudrücken. Bezeichnen wir mit l die Entfernung der Schwerpunkte beider Flächen, mit $y = \frac{F l}{F + \Delta F}$ die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche ΔF vom gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider, mit $c + \Delta c$ die Entfernung der äussersten Faser der Fläche $F + \Delta F$ von diesem Schwerpunkt, mit k und k_Δ die Höhe der Centralellipsen der Flächen F und ΔF, so ist laut Nr. 99 S. 398 das Widerstandsmoment der totalen Fläche gleich:

$$\frac{1}{c + \Delta c}\left(l y \, \Delta F + k^2 F + k^2_\Delta \, \Delta F \right);$$

Zieht man hiervon das ursprüngliche Widerstandsmoment $k^2 F : c$ ab, so erhält man den gesuchten Zuwachs gleich:

$$\frac{1}{c + \Delta c}\left[(l y + k^2_\Delta) \, \Delta F - \frac{\Delta c}{c} k^2 F \right]$$

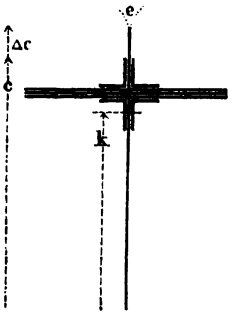
$$= \frac{k^2 F}{c + \Delta c}\left[\frac{l y + k^2_\Delta}{k^2} \cdot \frac{\Delta F}{F} - \frac{\Delta c}{c} \right].$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{l y + k_\Delta^2}{k^2}$ nie bedeutend von 1 abweichen kann, so geht aus der letzten Form hervor: dass wenn der Zuwachs der Fläche sich ungefähr zu dem der Entfernung der äussersten Faser verhält, wie die ursprüngliche Fläche zur ursprünglichen Entfernung, kein Zuwachs am Widerstandsmoment

stattfinde. Nimmt aber die Entfernung der äussersten Faser rascher zu, so findet Abnahme des Widerstandsmomentes statt.

Die obigen Formeln wollen wir auf ein Beispiel anwenden, und untersuchen, ob dadurch, dass man im symmetrischen Querschnitt von dem Fig. 185 nur die obere Hälfte darstellt, die obere Mittelplatte über die Winkeleisen vorstehen lässt, ein Zuwachs erzielt wird oder nicht.

Fig. 185.



Bei dieser Anordnung hat man, weil wegen der Symmetrie, der Schwerpunkt des Ganzen sich nicht ändert:

$$y = l = c + {}^1/_2 \Delta c$$

$$k^2_{\triangle} = {}^1/_{12} \Delta c^2$$

$$\Delta F = e \,.\, \Delta c.$$

Demnach der Zuwachs des Momentes gleich:

$$\frac{\Delta c}{c(c + \Delta c)} \cdot k^2 F \left[\frac{(c + {}^1/_2 \Delta c)^2 + {}^1/_{12} \Delta c^2}{k^2} \cdot \frac{ec}{F} - 1 \right].$$

ec ist die Querschnittsfläche einer Platte die so hoch wäre, als wie der ganze Träger. Ist also diese Querschnittsfläche nicht annähernd so gross, als wie der totale wirkliche Querschnitt, so wird das Anbringen der Mittelplatte das Widerstandsmoment vermindern. Wäre z. B. die halbe Höhe einer Rippe $c = 250$; $k = 235$; $\Delta c = 6$ Ctm. und $F = 600$ □Ctm. also $F : c = 2{,}4$ Ctm., so ergäbe sich ein Zuwachs von

$$\frac{\Delta c}{c + \Delta c} k^2 F \left(1{,}16 \,.\, \frac{e}{2{,}4} - 1 \right).$$

Es muss also die Mittelplatte mindestens $e = \frac{2{,}4}{1{,}16} = 2{,}07$ Ctm. dick sein, wenn das Anbringen der Mittelplatte keine Verminderung des Widerstandsmomentes erzeugen soll.

Zur Beruhigung der Herrn Constructeure, welche gern Zickelzackelförmig construiren, wollen wir hier noch, für den Fall, dass einer derselben einmal wirklich rechnen sollte, beifügen, dass die hinzugekommene Platte nie wirklich Verminderung des Wider-

standes hervorbringen kann. Denn giebt der kleinere Querschnitt ein grösseres Moment, als wie der grössere, so darf jederzeit auf das Moment des kleineren gerechnet werden; der kleinere Querschnitt ist ja auch dann noch vorhanden, wenn die äussersten exponirten Fasern durch das dem kleinern Querschnitt entsprechende grössere Moment zerstört würden. Also allgemein: Wenn durch Weglassung von Flächentheilen des Querschnittes das Widerstandsmoment von tragenden Balken vergrössert werden kann, so ist es gestattet, das grössere Moment in Rechnung zu bringen. Das wirkliche Widerstandsmoment ist also das Maximum aller derjenigen, das durch Combination der verschiedenen vorhandenen Flächenelemente gebildet werden kann.

In der Praxis wird man sich natürlich hüten, Material an solchen unwirksamen Stellen zu vergeuden. Die breitesten Platten sollen die äussersten Fasern bilden, damit sie dort voll tragen helfen, der einfache ⊤ und kastenförmige ⊓ Querschnitte sind daher die zweckmässigsten.

Fünftes Kapitel.

Trägheitsmomente, Centralellipsoide und Kerne einiger Körper.

118. Centralellipsoid und Kern eines Prismas und eines Cylinders.

In einem von parallelen Endflächen begrenzten Prisma oder Cylinder ist bezüglich des Schwerpunkts die Stellung dieser Endflächen der Richtung der Kanten oder Erzeugungslinien conjugirt.

Da alle Parallelen zu den Kanten gleich lang sind, so erscheint der zu den Endflächen parallele Querschnitt durch den Schwerpunkt in allen Theilen gleich stark belastet, und seine

Centralellipse und sein Kern sind daher auch die Schnitte des Centralellipsoids und Kerns.

Da alle Parallelschnitte gleichen Inhalts sind, so sind die Segmente, welche auf der zu den Kanten parallelen Linie durch den Schwerpunkt von den Endflächen des Prismas vom Centralellipsoid und vom Kern abgeschnitten werden, ebenso so gross als die Segmente welche von den Seiten, der Centralellipse und dem Kern eines gleich hohen Parallelogramms auf der Linie abgeschnitten werden, die die Mitte zweier gegenüberliegenden Seiten verbindet. Berücksichtigt man nun noch, dass dem Umfang der Endflächen laut Nr. 104 S. 416 eine Pyramide oder Kegelfläche entspricht, deren Spitze der Pol dieser Endfläche ist, so erscheinen das Centralellipsoid und der Kern vollständig bestimmt. Die Höhe des Centralellipsoids ist gleich $\sqrt{1/12}$ oder $= 0{,}289$ der Prismen- oder Cylinderhöhe, und die Höhe des Kerns, der aus einer Doppelpyramide oder einem Kegel zusammengesetzt ist, nimmt das innere Drittel des Prismas ein.

119. Die Trägheitsmomente eines Tetraeder.

Um im Allgemeinen die Trägheitsmomente von Körpern zu bestimmen, welche von ebenen Flächen begrenzt sind, kann man die Oberfläche derselben in ebene Dreiecke zerlegen, und sie aus irgend einem Punkte z. B. aus dem Ursprung der Coordinaten, aus dem unendlich fernen Punkte einer Axe oder auch aus einer Ecke des Körpers selbst, projiciren und so den Körper in eine Zahl einzelner Tetraeder oder dreiseitiger Prismen zerlegen, deren Momente man einzeln bestimmt und summirt. Um diese Operationen ausführen zu können, muss man vor allem die Momente von Tetraedern oder von schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismen für den Fall ermitteln, in welchem die Ecken dieser Körper durch ihre Coordinaten gegeben sind. Wir beginnen mit dem Centrifugalmoment $\Sigma xy\,\Delta\mathfrak{Z}$, eines schief abgeschnittenen Projectionsprismas, von dem wir dann alle übrigen Momente ableiten können.

Bei diesen Ableitungen lassen wir die Sinus des körperlichen Ecks und die Winkel, welche die Coordinatenaxen mit einander bilden, weg, d. h. wir setzen senkrecht aufeinander stehende Axen voraus. Nichts desto weniger gelten die Formeln die wir entwickeln werden, ganz allgemein auch für schiefwinkelige Axen, weil laut Nr. 58 S. 212, die Momente in Bezug auf feste Ebenen bei Aenderung der Axen sich nur um constante Factoren ändern. Sollen daher die Formeln auf schiefwinkelige Axen angewendet werden, so hat man überall nur statt der Determinanten des Inhalts, den Inhalt getheilt durch den Sinus des körperlichen Ecks, und statt der Flächendeterminanten die Flächen getheilt durch den Sinus des Winkels der treffenden Axen zu setzen.

Einstweilen bis zur Elimination der Constanten sei:

$$z = \alpha x + \beta y + c,$$

die Gleichung der Endfläche, dann ist zunächst das Integreal:

$$\int_{x_1}^{x_2} x\, d\, x \int_{o}^{y} (\alpha x + \beta y + c)\, y\, d\, y,$$

für den Fall zu bestimmen, in welchem y gleich ist:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x + \frac{x_2\, y_1 - y_1\, y_2}{x_2 - x_1}.$$

Mit Hülfe der allgemeinen Formeln Nr. 95 S. 377 erhält man für dieses Integral den Ausdruck:

$$\frac{\alpha}{60}(x_2 - x_1)\,[(6\,y_1^2 + 3\,y_1\,y_2 + y_2^2)\,x_1^2 + (3\,y_1^2 + 4\,y_1\,y_2 + 3\,y_2^2)\,x_1\,x_2 + (y_1^2 + 3\,y_1\,y_2 + 6\,y_2^2)\,x_2^2]$$

$$+ \frac{\beta}{60}(x_2 - x_1)\,[(4\,y_1^3 + 3\,y_1^2\,y_2 + 2\,y_1\,y_2^2 + y_2^3)\,x_1 + (y_1^3 + 2\,y_1^2\,y_2 + 3\,y_1\,y_2^2 + 4\,y_2^3)\,x_2]$$

$$+ \frac{c}{12}(x_2 - x_1)\,[y_1^3 + y_1^2\,y_2 + y_1\,y_2^2 + y_2^3].$$

Diese Summe stellt das Moment eines Prismas dar, dessen Endflächen die Projectionsebene xy und die schiefe Ebene $z = \alpha x + \ldots$ sind, und dessen Seitenflächen die Projectionsebene der xz, zwei Parallelebenen zu den der yz, durch die Punkte 1 und 2, und eine Parallelebene zur Axe der z durch dieselben Punkte sind. Wir erhalten nun das Moment für das Projectionsprisma der Punkte 1 2 3, indem wir ähnliche Ausdrücke für die Punkte 2 3 und 3 1 bilden, und alle drei summiren. Hierbei bestimmen wir die Zeichen der Abscissendifferenzen so, dass der doppelte Flächeninhalt der Projection des Dreiecks:

$$F_{1\,2\,3} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_3)\,y_1 + (x_3 - x_1)\,y_2 + (x_1 - x_2)\,y_3,$$

positiv ist, was voraussetzt, dass der Sinn 1 2 3 bei dem Umfahren des Dreiecks mit dem Drehungssinn von $+ x$ nach $+ y$ übereinstimmen. Man sieht hieraus, dass in die Momentensumme das Moment, das wir eben entwickelt haben, mit dem Zeichen — einzuführen ist; oder überhaupt, dass die immer positiven ähnlichen Ausdrücke in den Klammern, mit den Abscissendifferenzen $(x_1 - x_2)$, $(x_2 - x_3)$, $(x_3 - x_1)$ zu multipliciren sind.

Geschieht dies so wird die Summe durch $F_{1\,2\,3}$ theilbar, und man erhält das Centrifugalmoment $\mathfrak{C}_{1\,2\,3}$ des dreiseitigen Prismas:

$$\mathfrak{C}_{1\,2\,3} = \frac{\alpha\, F_{1\,2\,3}}{60}\begin{bmatrix} (3\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + x_2^2 + x_2\,x_3 + x_3^2)\,y_1 \\ (x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + 3\,x_2^2 + 2\,x_2\,x_3 + x_3^2)\,y_2 \\ (x_1^2 + x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + x_2^2 + 2\,x_2\,x_3 + 3\,x_3^2)\,y_3 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{\beta F_{123}}{60}\begin{bmatrix}(3y_1^2+2y_1y_2+2y_1y_3+y_2^2+2y_2y_3+y_3^2)\\(y_1^2+2y_1y_2+y_1y_3+3y_2^2+2y_2y_3+y_3^2)\\(y_1^2+y_1y_2+2y_1y_3+y_2^2+2y_2y_3+3y_3^2)\end{bmatrix}$$

$$+\frac{c F_{123}}{24}\begin{bmatrix}(2y_1+y_2+y_3)x_1\\(y_1+2y_2+y_3)x_2\\(y_1+y_2+2y_3)x_3\end{bmatrix}.$$

Zur Elimination von α, β und c setzen wir:

$$Q' = (6x_1+2x_2+2x_3)y_1+(2x_1+2x_2+x_3)y_2+(2x_1+x_2+2x_3)y_3,$$
$$Q'' = (2x_1+2x_2+x_3)y_1+(2x_1+6x_2+2x_3)y_2+(x_1+2x_2+2x_3)y_3,$$
$$Q''' = (2x_1+x_2+2x_3)y_1+(x_1+2x_2+2x_3)y_2+(2x_1+2x_2+6x_3)y_3$$
$$= (x_1+x_2+2x_3)(y_1+y_2+2y_3)+(x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3).$$

Dann kann $\mathfrak{C}_{123}$ auf die folgende Form gebracht werden:

$$\mathfrak{C}_{123} = \frac{F_{123}}{120}[(Q'x_1+Q''x_2+Q'''x_3)\alpha+(Q'y_1+Q''y_2+Q'''y_3)\beta + (Q'+Q''+Q''')c].$$

Für $i = 1, 2, 3$, ist aber:

$$z_i = \alpha x_i + \beta y_i + c,$$

demnach auch:

$$\mathfrak{C}_{123} = \frac{F_{123}}{120}(Q'z_1+Q''z_2+Q'''z_3).$$

Es ist dies der einfachste Ausdruck für das Centrifugalmoment des dreiseitigen Prismas in Bezug auf die Ebenen $z\,x\,y$, der keine $\alpha\,\beta\,c$ mehr enthält und in welchem Q_i Aggregate von der Form $x_g\,y_h$ sind.

Das entsprechende Moment eines Tetraeders erhalten wir durch Summation der vier dreiseitigen Prismen, welche seine Seiten projiciren; wir ziehen also noch einen vierten Punkt mit heran und setzen die Summen:

$$s_x = x_1+x_2+x_3+x_4,$$
$$S_{xy} = (2x_1+x_2+x_3+x_4)y_1+(x_1+2x_2+x_3+x_4)y_2+(x_1+x_2+2x_3+x_4)y_3$$
$$+(x_1+x_2+x_3+2x_4)y_4 = s_x s_y+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4,$$
$$S_{xx} = s_x^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$
$$= 2\begin{bmatrix}x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4\\x_2^2+x_2x_3+x_2x_4\\x_3^2+x_3x_4\\x_4^2\end{bmatrix}.$$

Mit Berücksichtigung der zweiten Form von Q_s lassen sich die Q_i durch die s, S und durch die Coordinaten $x_i\,x_4$ und $y_i\,y_4$ also ausdrücken:

$$Q^{(i)} = (s_x-x_4)(s_y-y_4)+(s_x-x_4)y_i+(s_y-y_4)x_i+x_1y_1+x_2y_2 + x_3y_3+2x_iy_i,$$
$$= S_{xy}+s_x(y_i-y_4)+s_y(x_i-x_4)+2x_iy_i-x_iy_4-x_4y_i.$$

Insbesondere ist:

$$Q'''' = S_{xy} + s_x (y_4 - y_3) + s_y (x_4 - x_3) + 2\, x_3 y_4 - x_4 y_4 - x_3 y_4 = S_{xy}.$$

Summirt man die mit z_i multiplicirten Q_i von $i = 1$ bis 4 und zieht dann für Q'''' z_4 die gleiche Grösse $S_{xy}\, z_4$ ab, so erhält man für $\mathfrak{C}_{123}$:

$$\mathfrak{C}_{123} = \frac{F_{123}}{120} (Q' z_1 + Q'' z_2 + Q''' z_3 + Q'''' z_4 + S_{xy} z_4)$$

$$= \frac{F_{123}}{120} [S_{yz} (s_x - x_4) + S_{zx} (s_y - y_4) + S_{xy} (s_z - z_4) + 2 (x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_3 + x_4 y_4 z_4) - 2\, s_x\, s_y\, s_z].$$

Wir nehmen an, die vier Eckpunkte des Tetraders seien im Raum so gelegen, dass die Determinante:

$$\Im = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

welche den sechsfachen Cubikinhalt des Tetraeders darstellt, positiv sei; dann muss der Punkt 4 unter der Ebene 1 2 3, d. h. auf der Seite von $-z\infty$ dieser Ebene liegen, denn wenn er in der Ebene 1 2 3 liegt, so ist $\Im$ gleich null und demnach $z_4 Z_4$ entgegengesetzt gleich $z_1 Z_2 + z_2 Z_2 + z_3 Z_3$. Da nun aber F_{123} positiv, also Z_4 negativ ist, so muss z_4 kleiner als die Ordinate des Punktes $(x_4\, y_4)$ auf der Ebene 1 2 3 sein. Es stimmt das mit dem allgemeinen Satze überein, dass in der unendlich fernen Ebene der Drehungssinn 4) 1 2 3 mit dem Sinn $+ x\infty + y\infty + z\infty$ identisch sein muss. Denken wir uns ferner, die Projection des Punktes 4 auf die Ebene $x\, y$ falle in das Dreieck 1 2 3, so muss offenbar das Moment des Prismas 1 2 3 positiv, dagegen die Momente der drei Prismen 1 2 4, 2 3 4, 3 1 4 negativ genommen werden. Nun ist aber, wenn Z_i den Coefficienten von z_i in $\Im$ bezeichnet, $F_{123} = -Z_4$, $F_{124} = +Z_3$, $F_{234} = +Z_1$, $F_{314} = +Z_2$; mithin muss in jedem $\mathfrak{C}_{ghi}$ für F_{ghi} das $-Z_k$ des fehlenden Indexes substituirt werden; geschieht dies und werden dann die vier $\mathfrak{C}$ addirt, so erhält man mit Berücksichtigung der folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned} x_1 Z_1 + x_2 Z_2 + x_3 Z_3 + x_4 Z_4 &= 0, \\ y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + y_3 Z_3 + y_4 Z_4 &= 0, \\ z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + z_3 Z_3 + z_4 Z_4 &= \Im, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 &= 0; \end{aligned}$$

das Centrifugalmoment des ganzen Tetraeders:

$$\mathfrak{C} = -\frac{1}{120} \Im\, S_{xy}.$$

Das Trägheitsmoment $\Sigma x^2 \Delta \Im$ erhält man, indem man $x = y$ setzt. Da die Ausdrücke von S in Bezug auf alle Coordinaten vollkommen symmetrisch sind,

so erhält man alle anderen Momente durch einfache Vertauschungen der Indexe $x\ y$ von S; es ist überflüssig, dieselben umzuschreiben.

Die Grössen $a\ b\ c$, $A\ B\ C$ Nr. 106 erhalten wir durch Division dieser Momente, mit $\frac{1}{6}\,\mathfrak{Z}$ dem Inhalt des Tetraeders, nämlich:

$$a^2 = \frac{1}{20} S_{x\,x}, \quad A = \frac{1}{20} S_{y\,z}, \quad x_s = \frac{1}{4} s_x,$$

$$b^2 = \frac{1}{20} S_{y\,y}, \quad B = \frac{1}{20} S_{z\,x}, \quad y_s = \frac{1}{4} s_y,$$

$$c^2 = \frac{1}{20} S_{z\,z}, \quad C = \frac{1}{20} S_{x\,y}, \quad z_s = \frac{1}{4} s_z.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichungen von Nr. 106 S. 427 giebt die Dimensionen aller Ellipsoide. Wir wollen dieselben nicht anschreiben, sondern uns damit begnügen, die Vereinfachungen von S_{xy} und S_{xx} für den Fall auszuführen, in welchem der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Schwerpunkte und mit der Ecke 4 zusammenfällt. Alle übrigen S sind symmetrisch gebaut und die Dimensionen der entsprechenden Ellipsoide denselben einfach proportional.

Wird der Ursprung nach der Ecke 4 verlegt, so ist:

$$x_4 = y_4 = z_4 = 0,$$

$$s_x = x_1 + x_2 + x_3 \text{ u. s. w.}$$

$$S_{xy} = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

$$S_{x\,x} = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2\,[x_1^2 + x_1 x_4 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2].$$

Wie man sieht, sind diese Functionen identisch mit den von Nr. 110 d; sie sind genau in gleicher Weise zusammengesetzt.

Lässt man die Axen mit den drei in der Ecke 4 sich schneidenden Kanten zusammenfallen, so sind alle Coordinaten, mit Ausnahme von $x_1\ y_2$ und z_3, gleich 0, und man hat:

$$a^2 = \frac{1}{10} x_1^2, \quad b^2 = \frac{1}{10} y_2^2, \quad c^2 = \frac{1}{10} z_3^2;$$

$$A = \frac{1}{20} y_2 z_3, \quad B = \frac{1}{20} x_1 z_3, \quad C = \frac{1}{20} x_1 y_2.$$

Wird der Coodinatenursprung nach dem Schwerpunkte verlegt, so sind, wie auch die Richtungen der Axen gewählt werden mögen, $s_x = s_y = s_z = 0$, und man erhält:

$$S_{x\,x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

$$S_{x\,y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Die Ausdrücke für die übrigen S sind ganz symmetrisch gebaut.

Laufen die Axen mit drei in einer Ecke sich schneidenden Kanten parallel, während der Ursprung der Coordinaten immer im Schwerpunkte bleibt, so sind die Coordinaten der 4 Eckpunkte, wenn die Längen dieser drei Kanten mit $d\ e\ f$ bezeichnet werden, für die Eckpunkte:

	x	y	z
1 gleich	$+\frac{3}{4}d,$	$-\frac{1}{4}e,$	$-\frac{1}{4}f,$
2 „	$-\frac{1}{4}d,$	$+\frac{3}{4}e,$	$-\frac{1}{4}f,$
3 „	$-\frac{1}{4}d,$	$-\frac{1}{4}e,$	$+\frac{3}{4}f,$
4 „	$-\frac{1}{4}d,$	$-\frac{1}{4}e,$	$-\frac{1}{4}f;$

woraus sich:

$$a^2 = \frac{3}{80}d^2, \quad b^2 = \frac{3}{80}e^2, \quad c^2 = \frac{3}{80}f^2,$$

$$A = -\frac{1}{80}ef, \quad B = -\frac{1}{80}fd, \quad C = -\frac{1}{80}de \text{ ergiebt.}$$

Wir machen auf die Uebereinstimmung dieser Dimensionen des Centralellipsoids mit denen des Trägheitsellipsoids für eine Ecke und den mit den Kanten zusammenfallenden Axen aufmerksam. Jene Dimensionen müssen sich aus den eben entwickelten ergeben, wenn die Producte der Schwerpunktscoordinaten zu $\frac{1}{16}d^2$ oder $\frac{1}{16}de$ addirt werden In der That ist:

$$\frac{3}{80}+\frac{1}{16}=\frac{1}{10} \text{ und } -\frac{1}{80}+\frac{1}{16}=\frac{1}{20}.$$

Die einfachsten Ausdrücke erhält man aber, wenn man die Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegender Kanten als eine der Axe z. B. als z Axe annimmt und die beiden andern Axen mit jenen Kanten parallel laufen lässt.

Ist die Länge der Verbindungslinie der Mitten $= h$ und die der beiden Kanten $= d$ und e, so erhält man die Coordinaten für 4 Eckpunkte:

	x	y	z
1 gleich	$+\frac{1}{2}d,$	$0,$	$+\frac{1}{2}h,$
2 „	$-\frac{1}{2}d,$	$0,$	$+\frac{1}{2}h,$
3 „	$0,$	$+\frac{1}{2}e,$	$-\frac{1}{2}h,$
4 „	$0,$	$-\frac{1}{2}e,$	$-\frac{1}{2}h.$

Woraus sich:

$$a^2 = \frac{1}{40} d^2, \quad b^2 = \frac{1}{40} e^2, \quad c^2 = \frac{1}{20} h^2,$$

und $$S_{zx} = S_{xy} = S_{yz} = 0 \text{ ergiebt.}$$

In diesem Falle also sind die drei durch den Schwerpunkt gehenden Axen conjugirt und wir erhalten die zur Construction des Centralellipsoids bequemsten Elemente. Die mit einer Kante parallelen Durchmesser haben eine Länge von $\frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}31623$ der Kante, und die mit der Verbindungslinie gegenüberliegender Kantenmitten parallelen Durchmesser haben zur Länge $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}44721$ der Verbindungslinie. Diese einfachen Verhältnisse liefern dreimal die Länge von drei conjugirten Durchmessern, dreimal mehr, als man zur Construction braucht. Die Antipolare der Kante d läuft parallel mit der conjugirten Richtung e; schneidet die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Kantenmitten, weil d sie schneidet, und zwar in der Entfernung von:

$$\frac{1}{20} h^2 : \frac{1}{2} h = \frac{1}{10} h.$$

Da dies nun auch von allen andern Kanten gilt, so folgt, dass im $\frac{1}{10}$ der Entfernung gegenüberliegender Mitten oder im $\frac{1}{5}$ der Entfernung einer jeden Kante vom Schwerpunkte eine zur Kante parallele Kante des Kerntetraeders liege. Der Kern eines Tetraeders ist also diesem ähnlich, besitzt denselben Schwerpunkt, und seine Dimensionen sind $\frac{1}{5}$ der des gegebenen Tetraeders.

120. Die Momente eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas.

Wir nehmen an, es laufe die Axe der z mit den drei parallelen Kanten des Prismas parallel. Das Moment in Bezug auf die Ebene z oder xy haben wir bereits am Anfang der vorigen Nummer ermittelt, um zu den Momenten des Tetraeders zu gelangen. Die übrigen Momente erhält man aber einfacher, indem man es in drei Prismen mit je einer der Parallelkanten zerlegt und ihre Momente summirt. Wir schreiben die Determinanten des Inhaltes dieser Tetraeder voll an, weil sie in dieser Form die Coordinatensummen der Eckpunkte sehr übersichtlich geben. Der Inhalt $\mathfrak{J}$ ergiebt sich aus:

$$6\,\mathfrak{J} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & & 1 \\ x_2 & y_2 & & 1 \\ x_3 & y_3 & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & & 1 \\ x_3 & y_3 & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_3 & y_3 & & 1 \end{vmatrix} = F s_z.$$

Wenn, wie früher, mit F der doppelte Inhalt der Projection und mit $s_x, s_y, s_z = z_1 + z_2 + z_3$ die Summen der drei Coordinaten bezeichnet wird.

Wir bilden nun die S des Prismas als Summe der drei Partialtetraeder, multipliciren sie mit dem treffenden Inhalt $z\,F$ und erhalten so das Totalmoment. Bei dem ersten Anschreiben wird jedem Tetraeder eine Zeile gewidmet und dann alles zusammengezogen; wir erhalten auf diese Weise:

$$\begin{aligned} 20\,s_z\,.\,C = 120\,\frac{\mathfrak{M}_{xy}}{F} = {} & [(2x_1 + x_2 + x_3)(2y_1 + y_2 + y_3) + 2x_1y_1 + x_2y_2 \\ & + x_3y_3]\,z_1 + \\ & + [(x_1 + 2x_2 + x_3)(y_1 + 2y_2 + y_3) + x_1y_1 + 2x_2y_2 \\ & + x_3y_3]\,z_2 + \\ & + [(x_1 + x_2 + 2x_3)(y_1 + y_2 + 2y_3) + x_1y_1 + x_2y_2 \\ & + 2x_3y_3]\,z_3 = \\ = {} & s_x s_y s_z + (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)\,s_x + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)\,s_y + (x_1y_1 \\ & + x_2y_2 + x_3y_3)\,s_z + 2(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist vollkommen symmetrisch, bezüglich der drei Coordinaten $x\,y\,z$; es treten also bei dieser Bildung des Centrifugalmomentes die Längen der parallelen Kanten, gerade so in die Gleichungen ein, als wie die Hebelsarmcoordinaten. Betrachtet man daher ein Dreieck im Raum als Endfläche der drei Projectionsprismen, und bildet die Centrifugalmomente mit den zwei, zu den Kanten nicht parallelen Axen, so verhalten sich diese Centrifugalmomente, wie die Inhalte der Projectionen der Endfläche, getheilt durch den Sinus des Winkels, den die Axen in der Projectionsebene mit einander bilden; denn die Verhältnisse $-\frac{\mathfrak{M}_{xy}}{F}$ bleiben constant bei einer Vertauschung der x, y, z. $\mathfrak{M}_{xx}$ und $\mathfrak{M}_{yy}$ ergeben sich aus dem obigen Moment dadurch, dass man $x = y$ setzt; wir schreiben nur das eine der beiden Momente an:

$$\begin{aligned} 20\,s_z\,a^2 = 120\,\frac{\mathfrak{M}_{xx}}{F} = {} & s^2_x\,s_z + 2(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)\,s_x + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,s_z \\ & + 2(x_1^2z_1 + x_2^2z_2 + x_3^2z_3). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält kein y, man erhält $\mathfrak{M}_{yy}$ indem man y statt x setzt. Ferner ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 20\,s_z\,B = 120\,\frac{\mathfrak{M}_{xz}}{F} = {} & [(2x_1 + x_2 + x_3)\,z_1 \quad + x_1z_1 \quad]\,z_1 + \\ & [(x_1 + 2x_2 + x_3)(z_1 + z_2) \quad + x_1z_1 + x_2z_2 \quad]\,z_2 + \\ & [(x_1 + x_2 + 2x_3)(z_1 + z_2 + z_3) + x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3]\,z_3 = \\ = {} & s_x s_z^2 + 2(x_1z_1^2 + x_2z_2^2 + x_3z_3^2) - x_1z_2z_3 - z_1x_2z_3 - z_1z_2x_3. \end{aligned}$$

Das Moment $\mathfrak{M}_{yz}$ erhält man dadurch, dass man y statt x setzt. Das letzte Moment ist gleich:

$$20\ s_z\ c^2 = 120\ \frac{\mathfrak{M}_{zz}}{F} = [2\ z_1^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\ z_1 +$$
$$[(z_1 + z_2)^2 + z_1^2 + z_2^2 \qquad\qquad]\ z_2 +$$
$$[(z_1 + z_2 + z_3)^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2]\ z_3 +$$
$$= 2\ [(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\ s_z + z_1\ z_2\ z_3]$$
$$= 2\ [s_z^2 - 2\ (z_1\ z_2 + z_2\ z_3 + z_3\ z_1)\ s_z + z_1\ z_2\ z_3].$$

Aus diesen Momenten lassen sich nun auch leicht die Dimensionen der Centralellipse ableiten; da jedoch die Substitution dieser Ausdrücke in die allgemeinen Formeln von Nr. 108 S. 424 zu keinen Vereinfachungen führt, so dürfen wir uns diese Substitutionen wohl ersparen.

121. Die Momente von Pyramiden und Kegeln.

Die Momente einer Pyramide oder eines Kegels lassen sich auf die Momente der Basis zurückführen. Wir nehmen den Coordinatenanfang in der Spitze des Kegels, und die yz Ebene parallel zur Grundfläche an. Es seien ferner l die Abscisse der Grundfläche und $F y'_s z'_s h' k' A'$ der Inhalt, die Coordinaten des Schwerpunktes und die Dimensionen der Centralellipse derselben. Theilen wir die Pyramide oder den Kegel parallel zur Basis in Elemente, so sind die entsprechenden Dimensionen für eines dieser Flächenelemente:

$$\frac{x^2}{l^2} F,\ \frac{x}{l} y'_s,\ \frac{x}{l} z'_s,\ \frac{x}{l} h',\ \frac{x}{l} k',\ \frac{x^2}{l^2} A'.$$

Bilden wir mit diesen die Momente der Flächen $\frac{x^2}{l^2} F\ dx$ und summiren, so erhalten wir die Momente des Kegels:

$$\mathfrak{M}_{xx} = \int_0^l x^2 \cdot \frac{x^2}{l^2} F\ dx = \frac{1}{5} l^3 F = \frac{3}{5} l^2 \mathfrak{Z},$$

$$\mathfrak{M}_{xy} = \int_0^l x \cdot \frac{x}{l} y'_s \cdot \frac{x^2}{l^2} F\ dx = \frac{1}{5} l^2 y'_s F = \frac{3}{5} l y'_s \mathfrak{Z},$$

$$\mathfrak{M}_{xz} = \int_0^l x \cdot \frac{x}{l} z'_s \cdot \frac{x^2}{l^2} F\ dx = \frac{1}{5} l^2 z'_s F = \frac{3}{5} l z'_s \mathfrak{Z},$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = \int_0^l \frac{x^2}{l^2} \left(y'^2_s + h'^2 \right) \cdot \frac{x^2}{l^2} F\ dx = \frac{1}{5} l \left(y'^2_s + h'^2 \right) F$$
$$= \frac{3}{5} \left(y'^2_s + h'^2 \right) \mathfrak{Z},$$

$$\mathfrak{M}_{yz} = \int_0^l \frac{x^2}{l^2}\left(y'_s z'_s + A'\right) \cdot \frac{x^2}{l^2} F dx = \frac{1}{5} l \left(y'_s z'_s + A'\right) F$$

$$= \frac{3}{5}\left(y'_s z'_s + A'\right) \mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = \int_0^l \frac{x^2}{l^2}\left(z'^2_s + k'^2\right) \cdot \frac{x^2}{l^2} F dx = \frac{1}{5} l \left(z'^2_s + k'^2\right) F$$

$$= \frac{3}{5}\left(z'^2_s + k'^2\right) \mathfrak{J}.$$

Laut Nr. 97 a, sind die Coordinaten des Schwerpunktes des Kegels $\frac{3}{4} l, \frac{3}{4} y'_s, \frac{3}{4} z'_s$. Dividirt man die obigen Momente durch $\mathfrak{J}$, so erhält man die Dimensionen des Trägheitsellipsoids in Bezug auf den Coordinatenursprung, und zieht man dann von diesen die Quadrate und die Producte der Schwerpunktcoordinaten, welche also immer den Zahlencoefficienten $\frac{9}{16}$ haben, der von $\frac{3}{5}$ abgezogen $\frac{3}{80}$ giebt, so erhält man die Dimensionen des Centralellipsoids, nämlich:

$$a^2 = \frac{3}{80} l^2, \quad b^2 = \frac{3}{80} y'^2_s + \frac{3}{5} k'^2,$$

$$C = \frac{3}{80} l y_s, \quad A = \frac{3}{80} y'_s z'_s + \frac{3}{5} A',$$

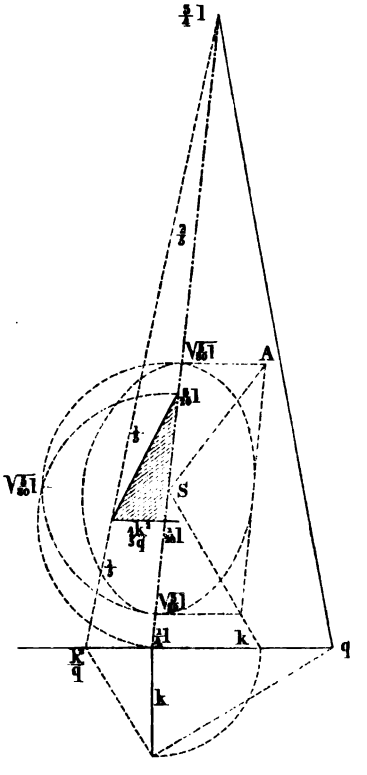
$$B = \frac{3}{80} l z_s, \quad c^2 = \frac{3}{80} z'^2_s + \frac{3}{5} k'^2.$$

Führt man die Axe der z durch den Schwerpunkt, so werden y_s und z_s, damit auch B und $C = 0$; es sind demnach die Verbindungslinien des Schwerpunktes der Basis mit der Spitze des Kegels und die Basisebene conjugirt. Die Ellipse des Parallelschnittes zur Basis durch den Schwerpunkt mit dem Centralellipsoid ist der Centralellipse der Basis ähnlich, und ihre Dimensionen sind $\sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}77460$ derselben. Die Entfernung der zur Basis parallelen Tangential-

ebene an das Centralellipsoid vom Schwerpunkt, d.h. die halbe Höhe des Centralellipsoids ist gleich $\sqrt{\frac{3}{80}}$ = 0,19365 der Höhe des Kegels.

Hinsichtlich der Dimensionen des Kernes lässt sich allgemein das folgende sagen: Der Antipol der Basis liegt auf dem ihr conjugirten Durchmesser des Centralellipsoids also auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt, seine Entfernung von letzterem ist $= \frac{3}{80} : \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$ der Höhe des Kegels. Die Antipolarebene der Spitze läuft parallel zur Basis, und ihre Entfernung vom Schwerpunkt ist gleich $\frac{3}{80} : \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$ der Höhe des Kegels, mithin ist die Höhe des ganzen Kernes $\frac{1}{5}$ des ganzen Kegel; da ferner jedem Punkt der Basis des Kegels eine Ebene entspricht, die durch den Antipol der Basis geht, der in $\frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$ der Höhe liegt, so umhüllen alle diese Ebenen einen Kegel, wenn der Punkt den Umfang der Basis beschreibt. Der Kern ist also ebenfalls ein Kegel, der das zweite Fünftel des gegebenen Kegels einnimmt, und dessen Spitze und Basis vom Schwerpunkt aus in gleicher Richtung als wie die des gegebenen liegen. Um die Beziehung zwischen den Basen der beiden Kegel zu ermitteln, führen wir einen Schnitt durch die Spitze und den Schwerpunkt des Kegels. Es sei Fig. 186 dieser Schnitt; vom Schwerpunkt aus tragen wir in den durch die Fig.

Fig. 186.



angedeuteten Richtungen die Längen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$ und $\frac{3}{4}\,l$ auf, und erhalten so die Lagen der Basen und Spitzen beider Kegel. Die Ordinate eines Halbkreises über $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{20}\right)l$ giebt die halbe Höhe $\sqrt{\frac{3}{80}}\,l$ des Centralellipsoids. Projicirt man vom Punkt S aus die Centralellipse der Basis, so schneiden die Projectionsstrahlen auf einer Parallelebene durch $\sqrt{\frac{3}{80}}\,l$ die Basis des das Centralellipsoid umhüllenden Cylinders aus. Denn, wenn k ein Punkt der Centralellipse der Basis ist, so hat man:

$$k:\frac{1}{4}\,l=\sqrt{\frac{3}{5}}\,k:\sqrt{\frac{3}{80}}\,l.$$

Wir wollen jetzt die dem Punkt k entsprechende Antipolarebene bestimmen, welche die Schnittebene Fig. 186 in der Antipolaren von k schneidet. Sie geht durch den Punkt $\frac{3}{20}\,l$ und läuft mit der Diagonale SA des der Ellipse umschriebenen Parallelogrammes parallel, denn Sk und SA sind als Diagonalen conjugirt. Auf der Basis des Kernes schneidet sie die Länge $\frac{4}{5}\,k$ aus, denn es ist:

$$\frac{4}{5}\,k:\frac{1}{5}\,l=\sqrt{\frac{3}{5}}\,k:\sqrt{\frac{3}{80}}\,l.$$

Die Punkte in einem Schnitt der Basis und der Strahlenbüschel ihrer Antipolaren durch $\frac{3}{20}\,l$ liegen involutorisch, und dem unendlich fernen Punkt der Basis entspricht der Strahl durch den Schwerpunkt S, demnach müssen die Producte der Entfernungen entsprechender Basispunkte constant, und zwar $\frac{4}{5}\,k^2$ sein, weil k und $\frac{4}{5}\,k$ zwei in dieser Weise sich entsprechende Entfernungen sind. Ist also q die Entfernung irgend eines Punktes der Basis vom Fusspunkt des Strahles durch den Schwerpunkt, so wird die

Antipolarebene dieses Punktes im Schnitt Fig. 186 die Basis des Kernes in der Entfernung $\frac{4\,k^2}{5\,q}$ schneiden. Die Antipolare desselben Punktes in Bezug auf die Centralellipse der Basis, schneidet den Schnitt in der Entfernung $\frac{k^2}{q}$; hieraus folgt: Der Kern eines Kegels ist wieder ein Kegel mit gleichgelegener Spitze und Basis, und nimmt das zweite Fünftel der Höhe desselben ein, die Basis des Kernes ist dem Kerne der Basis ähnlich, und ähnlich gelegen. Die Mittelpunkte der Aehnlichkeit sind die Schnittpunkte des Strahles durch S, und die Dimensionen der Kernbasis sind $\frac{4}{5}$ der des Kernes der Kegelbasis.

Bei der dreiseitigen Pyramide, dem Tetraeder, ist laut Nr. 110 b S. 441 der Kern der Basis dieser ähnlich und seine Dimension gleich $\frac{1}{4}$ der Dimensionen jener. Die der Basis des Kernes sind demnach gleich $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ der Basis. Da die Höhe des Kernes ebenfalls $\frac{1}{5}$ der Höhe der Pyramide ist, so folgt: der Kern eines Tetraeders ist diesem ähnlich, bezüglich des Schwerpunkts ähnlich gelegen, und nimmt das innere $\frac{1}{5}$ des Tetraeders ein.

122. Die Momente schief abgeschnittener Pyramiden und Kegel.

Nachdem wir in der vorigen Nummer die Momente der Pyramiden und Kegel auf die Momente ihrer Basen zurückgeführt haben, können wir die Momente schief abgeschnittener Pyramiden und Kegel dadurch bestimmen, dass wir die Momente der perspectivischen Basen auf einander beziehen. Dadurch erhalten wir die Momente dieser Körper als Momentendifferenz der beiden Kegel oder Pyramiden.

Als Coordinatenanfang behalten wir die Spitze des Kegels bei, nehmen die Ebene der $x\,z$ parallel zur einen und die der $y\,z$ parallel zur andern Endfläche an. Ueber die Ebene der $x\,y$ können wir dann zu Gunsten der Einfachheit frei verfügen. Die Beziehungen zwischen den Coordinaten perspectivisch gelegener Punkte in den mit den Coordinatenebenen parallel laufenden Ebenen $x' = a$ und $y'' = b$ sind dann durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\frac{x''}{a} = \frac{b}{y'} = \frac{z''}{z'},$$

wo a und b die, nicht zusammengehörigen, Coordinaten der beiden Endflächen sind. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$z'' = \frac{b\,z'}{y'}, \quad x'' = \frac{a\,b}{y'}, \quad dx'' = -\frac{a\,b}{y'^2}\,dy'.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Ausdrücke der Fläche und der Momente, giebt die Momente der Endfläche O $(x''\ z'')$ als Function der Coordinaten y' und z', so dass dann alle Momente durch die Coordinaten der einen Endfläche bestimmt sind. Die Substitution giebt:

$$F'' = \int z''\,d\,x'' = -\,a\,b^2 \int \frac{z'\,d\,y'}{y'^3},$$

$$\mathrm{M}''_x = \int z''\,x''\,d\,x'' = -\,a^2\,b^3 \int \frac{z'\,d\,y'}{y'^4},$$

$$\mathrm{M}''_z = \frac{1}{2}\int z''^2\,d\,x'' = -\,\frac{1}{2}\,a\,b^3 \int \frac{z'^2\,d\,y'}{y'^4},$$

$$\mathfrak{M}''_{xx} = \int z''\,x''^2\,d\,x'' = -\,a^3\,b^4 \int \frac{z'\,d\,y'}{y'^5},$$

$$\mathfrak{M}''_{xz} = \frac{1}{2}\int z''^2\,x''\,d\,x'' = -\,\frac{1}{2}\,a^2\,b^4 \int \frac{z'^2\,d\,y'}{y'^5},$$

$$\mathfrak{M}''_{zz} = \frac{1}{3}\int z''^3\,d\,x'' = -\,\frac{1}{3}\,a\,b^4 \int \frac{z'^3\,d\,y'}{y'^5}.$$

Die negativen Vorzeichen sind nur scheinbar, denn wegen der Reciprocität $x''\,y' = a\,b$, kommt bei der Grenzenbestimmung,

die kleinere Grenze über die grössere unten hin; vertauscht man dann die beiden Grenzen, so erhält man wieder das positive Vorzeichen. In der Praxis werden diese Formeln übrigens nur selten zur Verwendung kommen. Sind die Endflächen Polygone, so wird man die Werthe von x'' und z'' direct in die Momentengleichungen der drei- oder mehrseitigen Basen einsetzen, d. h. die schon für diese Flächen ausgeführten Integrationen benützen; ebenso wird man auch noch Flächen, die von Curven zweiter Ordnung begrenzt sind, direct verwandeln, wie wir das sub *b* dieser Nr. zeigen werden. Begrenzungscurven höheren Grades als wie zweiten, wird man nur graphisch behandeln.

Sind die Flächenmomente in irgend einer Weise bestimmt, so hat man sie laut S. 498 mit $\frac{1}{5}$ der Höhe zu multipliciren, um die entsprechenden Kegelmomente zu erhalten. Da nun das Verhältniss dieser Höhen alle möglichen Werthe zwischen 0 und ∞ annehmen kann, so sind die allgemeinen Ausdrücke der Momentendifferenzen für den schief abgeschnittenen Kegel, keiner weitern Vereinfachung mehr fähig, wir glauben uns daher des Anschreibens derselben enthalten zu dürfen.

Wir schliessen mit einigen Anwendungen.

a) Momente der schief abgeschnittenen dreiseitigen Pyramide.

Wenn nur das Moment dieser einzigen Pyramide zu bestimmen ist, und diese also nicht als Theil einer mehrseitigen Pyramide betrachtet wird, so gelangt man am einfachsten zu den Momenten, indem man die drei in der abgeschnittenen Ecke sich schneidenden Kanten als Coordinatenaxen annimmt; bezeichnet man dann die Coordinaten der Ecken mit $x_1\ y_2\ z_3$ und die der Ecken der abgeschnittenen Pyramide mit λx_1, μy_2, νz_3, so erhält man unmittelbar, weil die Inhalte der zwei Pyramiden sich wie $1 : \lambda\mu\nu$ verhalten:

$$a^2 = \frac{1-\lambda^3\mu\nu}{10(1-\lambda\mu\nu)}x_1^2,\ b^2 = \frac{1-\lambda\mu^3\nu}{10(1-\lambda\mu\nu)}y_2^2,\ c^2 = \frac{1-\lambda\mu\nu^3}{10(1-\lambda\mu\nu)}z_3^2;$$

$$A = \frac{1-\lambda\mu^2\nu^2}{20(1-\lambda\mu\nu)}y_2 z_3,\ B = \frac{1-\lambda^2\mu\nu^2}{20(1-\lambda\mu\nu)}x_1 z_3,\ C = \frac{1-\lambda^2\mu^2\nu}{20(1-\lambda\mu\nu)}x_1 y_2.$$

Wird aber die schief abgestutzte dreiseitige Pyramide als Theil einer mehrseitigen betrachtet, so wird man die Formeln der vorigen Nummer zur Coordinatenbestimmung der einen Grundfläche, aus denen der andern benützen, die angedeuteten Integrationen nicht ausführen, sondern die Momente der beiden Pyramiden

direct durch Substitution bestimmen, und von einander abziehen, um das Moment der abgestutzten zu erhalten.

Je nachdem nun die abgestutzte Pyramide durch die Coordinaten der einen, oder der andern Endfläche gegeben sind, wird man alle s und S durch diese Coordinaten ausdrücken.

Aus der oben schon aufgestellten Beziehung:

$$\frac{a}{x''} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{z''},$$

und:

$$s'_x = 3\,a,\ s'_y = y'_1 + y'_2 + y'_3 = a\,b\left(\frac{1}{x''_1} + \frac{1}{x''_2} + \frac{1}{x''_3}\right),$$

$$s'_z = z'_1 + z'_2 + z'_3 = a\left(\frac{z''_1}{x''_1} + \frac{z''_2}{x''_2} + \frac{z''_3}{x''_3}\right),$$

folgt:

$$S'_{xx} = 1\,2\,a^2,\ S'_{xy} = 4\,a\,s'_y,\ S'_{xz} = 4\,a\,s'_z,$$

$$S'_{yy} = s'^2_y + y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3 = s'^2_y + a^2\,b^2\left(\frac{1}{x''^2_1} + \frac{1}{x''^2_2} + \frac{1}{x''^2_3}\right),$$

$$S'_{yz} = s'_y\,s'_z + y'_1 z'_1 + y'_2 z'_2 + y'_3 z'_3 = s'_y\,s'_z + a^2 b\left(\frac{z''_1}{x''^2_1} + \frac{z''_2}{x''^2_2} + \frac{z''_3}{x''^2_3}\right),$$

$$S'_{zz} = s'^2_z + z'^2_1 + z'^2_2 + z'^2_3 = s'^2_z + a^2\left(\frac{z''^2_1}{x''^2_1} + \frac{z''^2_2}{x''^2_2} + \frac{z''^2_3}{x''^2_3}\right).$$

Ferner für die Momente in der zweiten Endfläche:

$$s''_x = x''_1 + x''_2 + x''_3 = a\,b\left(\frac{1}{y'_1} + \frac{1}{y'_2} + \frac{1}{y'_3}\right),\quad s''_y = 3\,b,$$

$$s''_z = z''_1 + z''_2 + z''_3 = b\left(\frac{z'_1}{y'_1} + \frac{z'_2}{y'_2} + \frac{z'_3}{y'_3}\right),$$

$$S''_{xy} = 4\,b\,s''_x,\ S''_{yy} = 1\,2\,b^2,\ S''_{yz} = 4\,b\,s''_z,$$

$$S''_{xx} = s''^2_x + x''^2_1 + x''^2_2 + x''^2_3 = s''^2_x + a^2\,b^2\left(\frac{1}{y'^2_1} + \frac{1}{y'^2_2} + \frac{1}{y'^2_3}\right),$$

$$S''_{xz} = s''_x s''_z + x''_1 z''_1 + x''_2 z''_2 + x''_3 z''_3 = s''_x s''_z + a\,b^2\left(\frac{z'_1}{y'^2_1} + \frac{z'_2}{y'^2_2} + \frac{z'_3}{y'^2_3}\right),$$

$$S''_{zz} = s''^2_z + z''^2_1 + z''^2_2 + z''^2_3 = s''^2_z + b^2\left(\frac{z'^2_1}{y'^2_1} + \frac{z'^2_2}{y'^2_2} + \frac{z'^2_3}{y'^2_3}\right).$$

Da sich die Inhalte $\mathfrak{I}'$ und $\mathfrak{I}''$ der ganzen und der abgeschnittenen Pyramide, wie das Product der Kantenlänge verhalten, so hat man zunächst:

$$\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}''} = \frac{a^3}{x''_1 x''_2 x''_3} = \frac{y'_1 y'_2 y'_3}{b^3} = \frac{1}{\lambda},$$

ein Verhältniss, welches den Inhalt der abgestutzten Pyramide

$$\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}'' = (1 - \lambda)\,\mathfrak{Z}' = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\mathfrak{Z}'',$$

durch jeden der beiden Inhalte allein auszudrücken gestattet.

Indem man nun die Momente jeder Pyramide einzeln bildet, von einander abzieht, und durch den Inhalt der abgestutzten dividirt, wobei sich die $\mathfrak{Z}$ heben, erhält man die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$4\,x_s = \frac{3\,a - \lambda\,s''_x}{1-\lambda},\quad 4\,y_s = \frac{s'_y - 3\,\lambda\,b}{1-\lambda},\quad 4\,z_s = \frac{s'_z - \lambda\,s''_z}{1-\lambda}.$$

Und die Dimensionen der Trägheitsellipse:

$$20\,a_1^2 = \frac{S'_{xx} - \lambda\,S''_{xx}}{1-\lambda},\quad 20\,b_1^2 = \frac{S'_{yy} - \lambda\,S''_{yy}}{1-\lambda},\quad 20\,c_1^2 = \frac{S'_{zz} - \lambda\,S''_{zz}}{1-\lambda},$$

$$20\,A = \frac{S'_{yz} - \lambda\,S''_{yz}}{1-\lambda},\quad 20\,B = \frac{S'_{xz} - \lambda\,S''_{xz}}{1-\lambda},\quad 20\,C = \frac{S'_{xy} - \lambda\,S''_{xy}}{1-\lambda}.$$

Die S' und S'' sind wegen des überall dazwischen steckenden Factors λ keiner weitern Zusammenziehung oder Vereinfachung mehr fähig, und man sieht, dass überhaupt alle Momente als Differenz der der beiden Pyramiden bestimmt werden mussten. Dies wird immer der Fall sein, wenn keine ganz speciellen Coordinatenverhältnisse angenommen werden.

b) Momente schief abgeschnittener Kegel zweiter Ordnung.

Aus dem S. 503 angeführten Grunde beschränken wir uns zu zeigen, wie bei Kegeln zweiter Ordnung vorgegangen werden muss, um die Momente der beiden Endflächen zu erhalten. Mittelst dieser kann man dann nach Nr. 121 S. 498 die Momente der ganzen Kegel berechnen, und von einander abziehen. Nach S. 502 können wir über die Stellung der Ebene xy frei verfügen, wir nehmen daher als solche die Polarebene des unendlich fernen Punktes der z Axe an. Geschieht dies, so müssen sich die Gleichungen der Kegelschnitte in den Ebenen $x' = a$ und $y'' = b$, auf die Formen:

$$z'^2 = a'_{11} + 2\,a'_{12}\,y' + a'_{22}\,y'^2 = a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{12}}{a'_{22}}\right)^2 + \frac{A'_{33}}{a'_{22}},$$

und

$$z''^2 = a''_{11}\,x''^2 + 2\,a''_{12}\,x'' + a''_{22} = a''_{11}\left(x'' + \frac{a''_{12}}{a''_{22}}\right)^2 + \frac{A''_{33}}{a''_{11}},$$

reduciren lassen. Ist die eine dieser beiden Gleichungen gegeben, so lässt sich leicht die andere durch Substitution der oben angegebenen Werthe für die Varia-

beln finden. Ist z. B. die erste der Gleichungen gegeben, und substituirt man in dieselbe:

$$z' = \frac{a\,z''}{x''} \text{ und } y' = \frac{a\,b}{x''}, \text{ so erhält man:}$$

$$a^2 z''^2 = a'_{11} x''^2 + 2\,a'_{12}\,a\,b\,x'' + a'_{22}\,a^2 b^2 = a'_{11}\left(x + \frac{a'_{12}}{a'_{11}}\,a\,b\right)^2 + \frac{A'_{33}}{a'_{11}}\,a^2 b^2.$$

Vergleicht man die Coefficienten dieser letzten Gleichung mit den der ersten, so findet man, dass die a' mit den a'' durch die folgenden Gleichungen verbunden sind:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a^2\,a''_{11}, \\ a'_{12}\,b &= a\;a''_{12}, \\ a'_{22}\,b^2 &= \quad a''_{22}, \\ A'_{33}\,b^2 &= A''_{33}\,a^2. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen kann man jetzt nach Nr. 111 d die Momente jeder einzelnen Endfläche, und dann nach Nr. 497 mittelst dieser die der einzelnen Kegel berechnen, abziehen und schliesslich die Dimensionen des Trägheitsellipsoids bestimmen.

Wir glauben uns enthalten zu dürfen, solche Rechnungen, die nur selten vorkommen, hier weiter zu entwickeln.

123. Die Momente einiger Ellipsoide.

Sehr selten sind die Momente von Körpern zu bestimmen, deren Oberfläche nach allen Richtungen hin sich in das Unendliche erstreckt; häufiger dagegen solche, welche von allen Ebenen einer gewissen Stellung in ähnlichen Ellipsen geschnitten werden. Beschränken wir unsere Untersuchung auf den Fall, in welchem die Mittelpunkte aller Ellipsen in einer geraden Linie liegen, so kann man im Allgemeinen die Oberfläche solcher Körper durch die Gleichung:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = u,$$

ausdrücken, worin u eine dimensionslose Function von x bezeichnet.

Die Axen und die Querschnittsfläche der Ellipse, deren Abscisse gleich x ist, sind:

$$b_x^2 = b^2\,u,\; c_x^2 = c^2\,u,\; F = b_x\,c_x\,\pi = b\,c\,u\,\pi.$$

Der Inhalt eines Körpers, der von dieser Fläche und zwei ebenen Endflächen begrenzt ist, ist gleich:

$$\mathfrak{J} = \int F\,dx = b\,c\,\pi \int u\,dx,$$

wo das $\int$ innerhalb der Abscissen der Endfläche zu nehmen ist.

Der Schwerpunkt des Ellipsoids liegt in der x Axe, seine Abscisse ergiebt sich aus:

$$M_x = \int F x\,dx = b\,c\,\pi \int u\,x\,dx.$$

Von den ferneren Momenten sind, A gleich 0, weil die Axe bc conjugirt, und demnach das A jedes einzelnen Flächenelements gleich 0 ist; B und C sind gleich 0, weil der Schwerpunkt eines jeden Elements in der x Axe liegt; die übrigen Momente ergeben sich aus:

$$\mathfrak{M}_{xx} = \int F\,x^2\,dx = b\,c\,\pi \int u\,x^2\,dx,$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = \int \frac{1}{4}\,b_x^2\,F\,dx = \frac{1}{4}\,b^3\,c\,\pi \int u^2\,dx,$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = \int \frac{1}{4}\,c_x^2\,F\,dx = \frac{1}{4}\,b\,c^3\,\pi \int u^2\,dx.$$

Für das gewöhnliche Ellipsoid ist:

$$u = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\mathfrak{J} = b\,c\,\pi \int u\,dx = a\,b\,c\,\pi \left(\frac{x}{a} - \frac{x^3}{3\,a^3}\right),$$

$$M_x = b\,c\,\pi \int u\,x\,dx = a^2 b\,c\,\pi \left(\frac{x^2}{2\,a^2} - \frac{x^4}{4\,a^4}\right),$$

$$\mathfrak{M}_{xx} = b\,c\,\pi \int u\,x^2\,dx = a^3\,b\,c\,\pi \left(\frac{x^3}{3\,a^3} - \frac{x^5}{5\,a^5}\right),$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = \frac{1}{4}\,b^3\,c\,\pi \int u^2 dx = \frac{1}{4}\,a\,b^3 c\,\pi \left(\frac{x}{a} - \frac{2\,x^3}{3\,a^3} + \frac{x^5}{5\,a^5}\right),$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = \frac{1}{4}\,b\,c^3\,\pi \int u^2\,dx = \frac{1}{4}\,a\,b\,c^3\,\pi \left(\frac{x}{a} - \frac{2\,x^3}{3\,a^3} + \frac{x^5}{5\,a^5}\right).$$

Werden die $\int$ Grenzen innerhalb $x = -a, +a$ genommen, so erhält man:

$$\mathfrak{Z} = \frac{4}{3} a\,b\,c\,\pi,\ M_x = 0,$$

$$\mathfrak{M}_{xx} = \frac{4}{15} a^3\,b\,c\,\pi,\ \mathfrak{M}_{yy} = \frac{4}{15} a\,b^3 c\,\pi,\ \mathfrak{M}_{zz} = \frac{4}{15} a\,b\,c^3\,\pi,$$

$$a_1^2 = \frac{1}{5} a^2,\ b_1^2 = \frac{1}{5} b^2,\ c_1^2 = \frac{1}{5} c^2,$$

wenn mit $a_1\ b_1\ c_1$ die Durchmesser des Trägheitsellipsoids, welches in diesem Fall mit dem Centralellipsoid zusammenfällt, bezeichnet werden. Dieses ist also dem ursprünglichen Ellipsoid ähnlich und seine Dimensionen sind $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}44721$ desselben.

Die Antipolarebene des Punktes, dessen Abscisse gleich a ist, schneidet die a Axe in der Entfernung

$$\frac{1}{5} a^2 : a = \frac{1}{5} a.$$

Das Kernellipsoid ist also auch dem ursprünglichen Ellipsoid ähnlich, und nimmt dessen inneres $\frac{1}{5}$ ein.

Vergleicht man diese Verhältnisse mit den entsprechenden eines Tetraeders, so findet man eine auffallende Uebereinstimmung siehe Nr. 122 S. 501. Diese Uebereinstimmung ist aber nicht etwa blos Zufall, sondern Folge des Umstandes auf den wir schon Nr. 97 a S. 389 aufmerksam gemacht haben, dass nämlich die Inhalte der Schnitte eines Ellipsoids, von dem die Endpunkte dreier conjugirter Durchmesser mit den Mitten der gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders zusammenfallen, zu den Inhalten der Tetraederschnitte im constanten Verhältniss von π stehen; woraus unmittelbar folgt, dass die Strecken, welche das Trägheitsellipsoid und der Kern auf einem dieser Durchmesser in beiden Körpern ausschneiden, gleich seien.

Die obigen Formeln gehen in die für das einschalige Hyperboloid (die Regelfläche) über, wenn man statt $+ a^2$, $- a^2$ setzt; es verwandeln sich dann alle negative Glieder der obigen Gleichungen in positive, und wir dürfen uns das anschreiben der-

selben ersparen. In der x Axe liegt kein besonderer Punkt, denn sie schneidet die Fläche in den imaginären Punkten $\pm a\,i$, es hat demnach die Substitution von $x = a$ keinen Zweck und führt zu nichts.

Für das zweischalige Hyperboloid ist:

$$u = \frac{x^2}{a^2} - 1.$$

Es schneidet die x Axe in den Punkten $x = \pm a$; y und z nehmen nur für $x < -a$ und $+a < x$, reelle Werthe an. Man muss daher die Integrationen auf eine der beiden Schalen beschränken. Wir beziehen sie auf die der Seite $+x$, indem wir die Integrationsconstanten so bestimmen, dass die Integrale für $x = +a$, gleich 0 werden.

Wir erhalten dann für dieses Hyperboloid:

$$\mathfrak{V} = b\,c\,\pi \int u\,dx = a\,b\,c\,\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3\,a^3}\right),$$

$$M_x = b\,c\,\pi \int u\,x\,dx = \frac{1}{4}\,a^2\,b\,c\,\pi \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^2,$$

$$\mathfrak{M}_{xx} = b\,c\,\pi \int u\,x^2\,dx = a^3\,b\,c\,\pi \left(\frac{2}{15} - \frac{x^3}{3\,a^3} + \frac{x^5}{5\,a^5}\right),$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = \frac{1}{4}\,b^3\,c\,\pi \int u^2\,dx = \frac{1}{4}\,a\,b^3\,c\,\pi \left(-\frac{8}{15} + \frac{x}{a} - \frac{2\,x^3}{3\,a^3} + \frac{x^5}{5\,a^5}\right),$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = \frac{1}{4}\,b\,c^3\,\pi \int u^2\,dx = \frac{1}{4}\,a\,b\,c^3\,\pi \left(-\frac{8}{15} + \frac{x}{a} - \frac{2\,x^3}{3\,a^3} + \frac{x^5}{5\,a^5}\right),$$

Indem man in diesen Gleichungen für x als obere Integrationsgrenze einen Werth annimmt, der $< a$ ist, erhält man also den Inhalt und die Momente des Körpers zwischen dem Scheitel $+a$ und der Endfläche, deren Abscisse gleich x ist.

Für das elliptische Paraboloid ist:

$$u = \frac{2\,x}{p}$$

$$\mathfrak{V} = b\,c\,\pi \int u\,dx = b\,c\,p\,\pi \,.\, \frac{x^2}{p^2},$$

$$M_x = b\,c\,\pi \int u\,x\,dx = \frac{2}{3}\,b\,c\,p^2\,\pi\,.\,\frac{x^3}{p^3},$$

$$\mathfrak{M}_{xx} = b\,c\,\pi \int u\,x^2\,dx = \frac{1}{2}\,b\,c\,p^3\,\pi\,.\,\frac{x^4}{p^4},$$

$$\mathfrak{M}_{yy} = \frac{1}{4}\,b^3\,c\,\pi \int u^2\,d\,x = \frac{1}{3}\,b^3\,c\,p\,\pi\,.\,\frac{x^3}{p^3},$$

$$\mathfrak{M}_{zz} = \frac{1}{4}\,b\,c^3\,\pi \int u^2\,d\,x = \frac{1}{3}\,b\,c^3\,p\,\pi\,.\,\frac{x^3}{p^3}.$$

Durch Division der Momente durch $\mathfrak{Z}$ erhält man die Lage des Schwerpunktes, und die Dimensionen des Centralellipsoids für ein Stück des Parabeloids, zwischen dem Scheitel und der Endfläche bei der Abscisse x wie folgt:

$$x_s = \frac{2}{3}\,x,\; a_1^2 = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)x^2 = \frac{1}{18}\,x^2,\; a_1 = 0{,}2357\,x,$$

$$b_1^2 = \frac{b^2\,x^2}{3\,p^2};\; b_1 = 0{,}5773\,\frac{b\,x}{p};\; c_1 = 0{,}5773\,\frac{c\,x}{p}$$

Der Kern dieses Parabeloids besteht aus einem Kegel, dessen Spitze der Grundfläche entspricht, und deren Entfernung von dem Schwerpunkt gleich $\frac{1}{18}\,x^2 : \frac{1}{3}\,x = \frac{1}{6}\,x$ ist; und aus einem dem Paraboloid entsprechenden Ellipsoid, das diesem Kegel einbeschrieben ist, und das die Abscissenaxe im Schwerpunkt und in der Entfernung $\frac{1}{18}\,x^2 : \frac{2}{3}\,x = \frac{1}{12}\,x$ von diesen schneidet.

VIERTER ABSCHNITT.

ELEMENTE DER ELASTICITAETS-THEORIE.

Erstes Kapitel.

Kräfte, welche Linien und Flächen proportional sind.

---

124. Kräfte, welche Linien proportional sind.

Solche Kräfte sind diejenigen, durch welche die Inanspruchnahme der Elemente eines Körpers ausgedrückt wird, der beliebigen Kräften ausgesetzt ist.

Wenn diese Inanspruchnahmen auch von Punkt zu Punkt in endlicher Entfernung variiren, so können sie doch innerhalb unendlich kleiner Raumelemente als constant angenommen werden, und für solche sind daher die folgenden Ableitungen allgemein gültig.

Zunächst setzen wir voraus, dass die Inanspruchnahme des Materials sich gar nicht ändere, wenn in einer gewissen Richtung fortgeschritten wird. Schneidet man einen solchen Körper durch Parallelebenen, die normal auf dieser Richtung stehen, so dürfen die ausserhalb derselben wirkenden Kräfte von einem Schnitt zum andern sich nicht ändern. In vielen Fällen der Praxis, z. B. in allen Fällen, in welchen die Biegung eines Balkens in einer Ebene stattfindet, sind diese Kräfte gleich 0.

Indem wir dies ebenfalls noch voraussetzen, können wir unsere Untersuchung zunächst auf ein Körperelement beschränken, das von zwei Parallelebenen begrenzt ist, deren Entfernung gleich 1 ist.

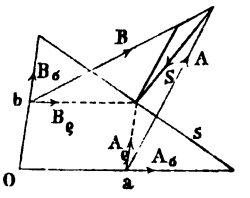
Schneidet man einen solchen Körper durch Ebenen, die jene Richtung enthalten, die also normal auf den Parallelebenen stehen, so werden alle ausserhalb solcher Schnitte wirkende Kräfte in eine

dritte Parallelebene fallen, die mitten zwischen den beiden schon vorhandenen liegt, und die Kräfte werden den Längen der Schnitte proportional sein.

Alle Zusammensetzungen von Kräften können jetzt in dieser Mittelebene ausgeführt werden, und eine solche Mittelebene haben wir vor uns, wenn wir von nun an von Kräften sprechen, die den Linien in einer Ebene proportional sind.

Wenn Kräfte den Längen von Linien proportional sind, auf welche sie wirken, so gehen sie immer durch die Mitte der Linie. In Folge dessen ist die Richtungslinie der auf ein beliebig gerichtetes Element s wirkenden Kraft S bestimmt, wenn die Richtungslinien der auf zwei gegebene Richtungen a und b wirkenden Kräfte A und B gegeben sind. Denn bildet man ein Elementardreieck in Fig. 187, dessen 3 Seiten mit den gegebenen Richtungen parallel laufen, und zieht man durch die Mitten der zwei Seiten a und b die Richtungslinien der gegebenen Kräfte A und B, so ist die Richtung der 3. Kraft S, welche durch den Schnitt AB und die Mitte von S geht, vollständig bestimmt. Dadurch ist auch das Verhältniss der 3 Kräfte ABS gegeben, sie verhalten sich wie die Seiten des in die Figur stark eingezeichneten Kräftedreiecks; es kann also die Grösse nur einer der drei Kräfte willkührlich angenommen werden; ist dies geschehen, so ist auch dadurch die der beiden andern bestimmt.

Fig. 187.



So einfach auch die Construction der Fig. 187 ist, so ist es doch für die Anwendung häufig bequemer, die Abhängigkeit der Kräfte A und B auf die folgende Weise auszudrücken. Zerlegt man die Kräfte A und B in ihren Schnitten mit den Seiten a und b in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen a und b, so gehen die zwei Kräfte A_ϱ und B_ϱ, welche auf die Seiten a und b wirken, durch die Mitte von s; soll nun die Mittelkraft der 4 Kräfte A_ϱ A_σ B_ϱ B_σ durch diesen Punkt gehen, so muss auch die Mittelkraft der zwei Kräfte A_σ und B_σ, welche in den Seiten wirken, durch diesen Punkt gehen. Damit dies aber der Fall sei, müssen sie sich verhalten wie die Seiten des kleinen in die Figur ein-

gezeichneten Parallelogramms, dessen Seiten den Längen a und b proportional sind; es muss demnach $\frac{A\sigma}{a} = \frac{B\sigma}{b}$ sein.

Bezeichnen wir den Werth dieser Brüche mit σ, so ist σ nichts anderes, als die Grösse der in den Seiten a und b pro Flächeneinheit wirkenden Kräfte. Das Abhängigkeitsgesetz zweier Kräfte A und B, welche auf die Schnitte a und b wirken, lautet also:

Zerlegt man die, auf die gleichgrossen Flächen (die Flächeneinheit) zweier Schnitte a und b wirkenden Kräfte in Seitenkräfte nach den Richtungen von a und b, so müssen die in den Schnitten a und b wirkenden Seitenkräfte gleich gross sein.

Diese Bedingung genügt und muss erfüllt sein, um die Kräfte AB als die Inanspruchnahme der Materie in einem gegebenen Punkte nach zwei Richtungen a und b hin betrachten zu können.

Es versteht sich jetzt ganz von selbst, dass, wenn wir mittelst der auf die Richtungen a und b wirkenden Kräfte A B (Fig. 188) die auf die Richtungen c und d wirkenden C und D bestimmen und dann Kräfte C und D benützen, um eine 5. auf s wirkende Kraft S zu bestimmen, wir dasselbe Resultat erhalten, als wenn wir S direct aus A und B bestimmen. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so würden ja die Resultate unserer Constructionen nicht einen Gleichgewichtszustand darstellen.

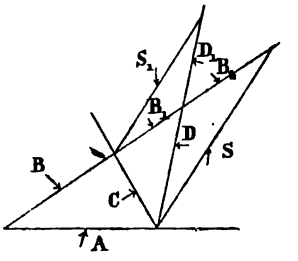


Fig. 188.

In der Folge wird dieser Satz uns in den Stand setzen, die Richtungen a b im Interesse der Einfachheit auszuwählen; seiner Wichtigkeit wegen bringen wir hier noch einen Beweis desselben, trotzdem, dass der Selbstverständlichkeit wegen der Beweis nur eine Juxtaposition von Identitäten sein kann.

Drückt man im Sinne von Nr. 43 S. 171 das Gleichgewicht der Kräfte A, $B + B_1 + B_2$, S durch die Gleichung

$$A + B + B_1 + B_2 + S = 0,$$

und durch

$$C = A + B$$

aus, dass C die Mittelkraft von A und B ist, dann soll nachgewiesen werden, dass das aus obiger Gleichung bestimmte S gleich $-\frac{B_2}{B_1} S_1$ sei, wenn das mit S parallele S_1 aus der Gleichung:

$$C + D + D_1 + S_1 = 0 \text{ bestimmt wird.}$$

Denn die Länge der Linien, auf welche S und S_1 wirken, verhalten sich wie die, auf welche B_1 und B_2 wirken, wenn die Richtungen der S parallel laufen. Zieht man die Gleichung:

$$A + B + B_1 + D = 0,$$

welche sagt, dass D aus AB und B_1 zu bestimmen ist, von der ersten Gleichung, die S bestimmt ab, so erhält man:

$$S = D - B_2.$$

Zieht man ferner:

$$C + B_1 + D = 0$$

von der Gleichung S_1 ab, so erhält man weiter:

$$S_1 = B_1 - D_1.$$

Nun ist aber:

$$D_1 = \frac{B_1}{B_2} D,$$

mithin:

$$S_1 = \frac{B_1}{B_2}(B_2 - D) = -\frac{B_1}{B_2} S.$$

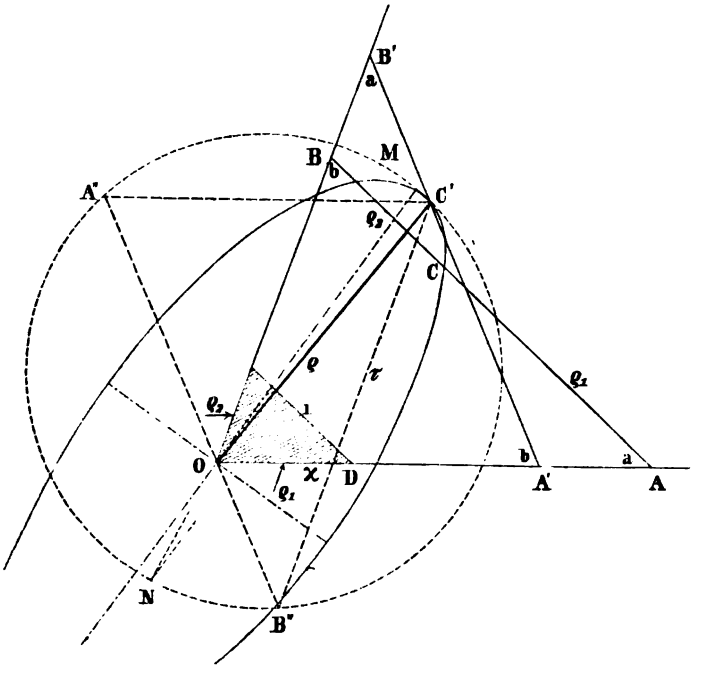
Ist A die Kraft, welche auf den Schnitt a (Fig. 189) wirkt, so wird die Kraft B, welche auf einen zu A parallelen Schnitt wirkt, mit A parallel laufen. Zwei solche zusammengehörige Richtungen, von denen jede die Richtung der Kraft ist, die auf einen Schnitt parallel zur andern wirkt, nennen wir conjugirte Richtungen. Denn zerlegt man A nach der Richtung von a und b, so wird die Seitenkraft in $a = 0$ sein, weil b parallel zu A läuft; demnach muss auch die Seitenkraft von B nach der Richtung von $b = 0$ sein, S. 515, d. h. B muss parallel zu a sein. Später werden wir sehen, dass alle auf diese Weise conjugirten Richtungen einen involutorischen Strahlenbüschel bilden, wodurch die Bezeichnung conjugirt gerechtfertigt wird.

125. Grösse und Richtung der in den verschiedenen Schnitten wirkenden Kräfte.

In der vorigen Nr. haben wir bewiesen, dass es einerlei ist, von welchen zweier beliebigen Schnitten man ausgeht, um die in irgend einem Schnitt wirkenden Kräfte zu erhalten; wir wollen daher nur die auf zwei conjugirte Richtungen wirkenden Kräfte willkürlich annehmen und gelangen so auf die einfachste Weise zu den Beziehungen zwischen den verschiedenen Richtungen und Kräften.

Es seien Fig. 189 und 190 zwei conjugirte Richtungen, ϱ_1 und ϱ_2 die Kräfte, welche pro Längen- (Flächen-) einheit auf diese Richtungslinien a und b wirken. Wir reihen beide auf einer geraden Linie ACB so aneinander, dass $AB = \varrho_1 + \varrho_2$ gleich der Summe

Fig. 189.

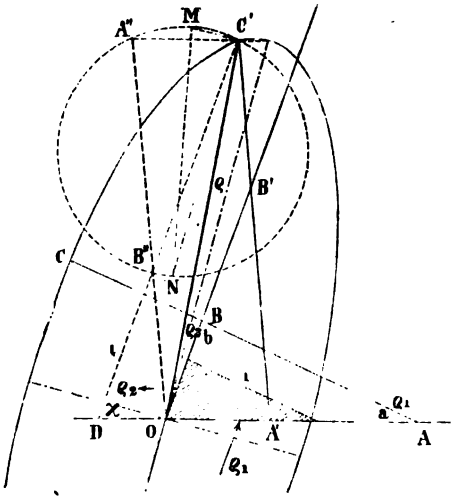


(Fig. 189) dieser beiden Kräfte ist, wenn beide das Material, die schraffirte Fläche, in gleicher Weise in Anspruch nehmen, dagegen $AB = \varrho_1 - \varrho_2$ gleich der Differenz (Fig. 190) ist, wenn ϱ_2 das Material in entgegengesetzter Weise in Anspruch nimmt. Wir bestimmen auf a und b die beiden Punkte A und B so, dass ihre Entfernung gleich $\varrho_1 \pm \varrho_2$ und die Richtung AB gleich mit der des Schnittes übereinstimmt, für die man die Kraft bestimmen will. Dann vertauschen wir die Strecken OA und OB so, dass $OA' = OB = b$ und $OB' = OA = a$ ist: und nun wird der Trennungspunkt C der beiden ϱ in der neuen Lage der Endpunkt der von O aus in Richtung und Grösse aufgetragenen Kraft $\varrho = OC$ sein, welche auf AB pro Flächeneinheit wirkt.

Denn bezeichnet man die Seitenkräfte OD, DC von OC nach den Richtungen von a und b mit $\varkappa$ und ι, so hat man:

$$\frac{OD}{OA'} = \frac{\varkappa}{b} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} = \frac{B'C}{B'A'},$$
$$\frac{DC}{OB'} = \frac{\iota}{a} = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2} = \frac{A'C}{A'B'}.$$

Fig. 190.



Nun sind aber $b\,\varrho_2$ und $a\,\varrho_1$ die ganzen auf b und a wirkenden mit a und b parallelen Kräfte B und A also:

$$\varkappa = \frac{B}{\varrho_1 + \varrho_2}, \quad \iota = \frac{A}{\varrho_1 + \varrho_2}.$$

Bezeichnet man die Mittelkraft von A und B, d. h. die auf $AB = \varrho_1 + \varrho_2$ wirkende Kraft mit R, so giebt die Zusammensetzung der beiden Mittelkräfte $\varkappa$ ι:

$$OB' = \frac{R}{\varrho_1 + \varrho_2} = \varrho,$$

gleich der auf die Richtung AB wirkenden Kraft pro Flächeneinheit.

Genau dasselbe Resultat erhält man in dem Falle, in welchem die beiden Schnitte auf verschiedene Weise in Anspruch genommen

sind, man hat dann (siehe Fig. 190) $-\varrho_2$ statt $+\varrho_2$ zu setzen und dem entsprechend zu construiren.

Diese Constructionen sind identisch mit der allgemein bekannten Ellipsenconstruction, wo die Ellipse von einem Punkte eines Papierstreifens beschrieben wird, von dem zwei andere Punkte auf festen Linien gleiten. Also: Trägt man von einem Punkte aus alle Kräfte auf, welche auf die verschiedenen Schnittrichtungen pro Längeneinheit wirken, so liegen die Endpunkte aller dieser Kräfte auf einer Ellipse, der Ellipse der Kräfte.

Zieht man durch C Parallelen zu a und b, so schneiden diese auf einer Parallelen zu $A'B'$ durch O Punkte $A''B''$ so aus, dass $A''OB''$ congruent mit ACB ist. Wird demnach durch $A''CB''$ ein Kreis gelegt, so behält dieser gleichen Radius für alle Lagen von C, denn die Strecke $A''B''$ und der Winkel $A''CB''$ bleiben constant. Der Punkt C durchläuft also diesen mit $A''OB''$ fest verbundenen Kreis, während er die Ellipse beschreibt. Demnach sind die Entfernungen OM und ON der Endpunkte des durch O gehenden Durchmessers MON die beiden Halbaxen der Ellipse. CM und CN sind die Richtungen dieser Halbaxen; denn bringt man den Durchmesser des Kreises in diese Richtungen, so fällt der Punkt C mit dem entferntesten und den nächsten Punkten M und N zusammen.

Aus dem Bisherigen geht hervor, dass diese Construction der Kräfteellipse identisch mit der allgemein üblichen Ellipsenconstruction ist, wo mit den Halbaxen OM und ON als Radien Kreise vom Mittelpunkte O aus beschrieben, beliebige Radien, parallel zu $A'B'$ gezogen und durch die Schnittpunkte der Radien mit den Kreisen Parallele zu den Axen gezogen werden, die sich in Ellipsenpunkten schneiden. Bei dieser Construction sind die Punkte, welche von senkrecht aufeinander stehenden Radien herrühren, die Endpunkte conjugirter Durchmesser. Dreht man also AB (Fig. 189 und 190) um 90°, so dreht sich auch in entgegengesetztem Sinne $A'B'$ und $A''B''$ um einen rechten Winkel; mithin entsprechen senkrecht aufeinander stehenden Schnitten durch das Material als darauf wirkende Kräfte conjugirte Durchmesser der Kräfteellipse.

126. Die Involution der conjugirten Kräfte- und Schnittrichtungen.

Bezeichnet man mit $\tau_1 = -\frac{b}{a}$ das Coordinatenverhältniss der Schnittlinie und mit $\tau_2 = \frac{\iota}{\varkappa}$ das der auf sie wirkenden Kraftrichtung, so erhält man durch Division der in der vorigen Nummer erhaltenen Werthe von ι und $\varkappa$:

$$\frac{\iota\, b}{\varkappa\, a} = -\tau_1\, \tau_2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,.$$

Alle conjugirten Strahlen liegen also involutorisch.

Offenbar fällt diese Involution nicht mit der der conjugirten Durchmesser der in der vorigen Nr. construirten Kräfteellipse zusammen; denn dem Durchmesser a ist nicht die Richtung b, sondern derjenige Ellipsendurchmesser conjugirt, welcher durch den Punkt C geht, wenn AB senkrecht auf a steht; dasselbe gilt auch von b. Zwei Involutionen können nur ein Paar conjugirter Strahlen entsprechend gemein haben; dieses gemeinsame Paar sind hier die in beiden Involutionen senkrecht auf einander stehenden Axen. Denkt man sich nämlich die Axen der conjugirten Richtungen und Kräfte vorerst construirt, und führt dann von diesen ausgehend, eine der Constructionen Fig. 189 oder 190 aus, so werden der Winkel $a\,O\,b$ ein rechter, und $O\,a$ und $O\,b$, die Axen der Ellipse. Die Axen der Kräfteellipse sind in den involutorischen Büscheln der Kräfte und Richtungen conjugirt. Auf einen Schnitt nach der Richtung einer Axe wirkt eine normale Kraft, die unter allen auf Schnitte wirkenden Kräften entweder ein Maximum oder ein Minimum ist. Die scheerenden Kräfte in der Richtung der Axen sind gleich 0; nach diesen Richtungen findet also im Material die directe Uebertragung der Spannungen und Pressungen statt.

Die Involution $\tau_1 \tau_2$ setzt uns in den Stand, die Constructionen der vorigen Nr. einfacher auszuführen. Wir machen Fig. 191 und 192 auf der Richtungslinie a, $OC = \varrho_2$, und tragen von C aus $CA = \varrho_1$ und $CB = \varrho_2$ in gleicher Richtung wie in Fig. 191, wenn sie verschiedenen Zeichens, und in verschiedener Richtung wie in Fig. 192, wenn

Fig. 191.

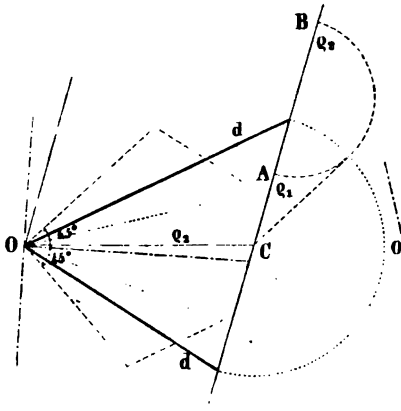
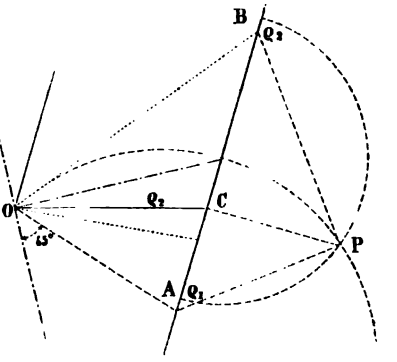


Fig. 192.



sie gleichen Zeichens sind, auf, so dass A und B die zwei Punkte sind, die auf a und b gleiten müssen, wenn C die Kräfteellipse beschreiben soll. OA und OB sind nun ein zweites Strahlenpaar der Involution, denn das Coordinatenverhältniss des Strahles OB, der den Winkel $\overset{\frown}{ab}$ halbirt, ist gleich $\tau_1 = \frac{\varrho_2}{\varrho_2} = 1$, und das des Strahles OA gleich $\tau_2 = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, mithin $\tau_1 \tau_2 = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 verschiedenen Zeichens, so trennen OA und OB die Strahlen nicht, Fig. 191 und die Involution hat Doppelstrahlen. Wir construiren sie, indem wir über AB einen Halbkreis beschreiben, von C dem Mittelpunkt der Involution, welche die conjugirten Richtungen auf CA ausschneiden, eine Tangente an diesen Halbkreis ziehen, und die Tangentenlänge mittelst des punktirten Kreises nach beiden Seiten herunterschlagen, wodurch wir Punkte der Doppelstrahlen dd erhalten. Die Endpunkte eines jeden Halbkreises, dessen Mittelpunkt in der Linie AC liegt, und der den punktirten Kreis unter einem rechten Winkel schneidet,

liegen in conjugirten Strahlen. Diese Methode ist jedoch sehr unbequem, um conjugirte Strahlen zu bestimmen. Wenn die Doppelstrahlen einmal bekannt sind, so ist es viel bequemer, durch einen Punkt des einen Doppelstrahles eine Parallele zum andern zu führen, alle conjugirte Strahlen schneiden dann zu beiden Seiten des Doppelpunktes gleich lange Segmente der Parallelen aus. Diese Methode wurde dazu benützt, um in Fig. 191 die Strahlen zu ermitteln, welche den Halbirungslinien des Axenwinkels conjugirt sind. Da diese Halbirungslinien zunächst senkrecht aufeinander stehen, und dann den gleichen Winkel von 45° mit jeder Axe bilden, so gelangt man durch sie zu denjenigen conjugirten Ellipsendurchmessern, welche gleiche Winkel mit den Axen bilden, und daher durch die Eckpunkte desjenigen der Ellipse umschriebenen Rechtecks gehen, dessen Seiten parallel mit den Axen laufen. Die Längen dieser beiden Durchmesser sind gleich gross, und die Längen der Axen verhalten sich wie die Perpendikel von einem Punkte dieser Durchmesser auf die Axen. In den Figuren 191 und 192 wurden diese gleichen Durchmesser punktirt. Man erhält jetzt gar leicht mittelst irgend eines Punktes der Kräfteellipse, C z. B., die wahren Axenlängen; zieht man nämlich die Coordinaten parallel zu den Axen durch C, und vermindert die Abscisse im Verhältniss der grossen zur kleinen, und vergrössert die Ordinaten im Verhältniss der kleinen zur grossen Axe, so sind die Entfernungen der so erhaltenen zwei neuen Punkte von O gleich den Axenlängen. Die strichpunktirten Axen halbiren den Winkel der Doppelstrahlen.

In Schnitten nach der Richtung der Doppelstrahlen d, fällt die Richtung der Kraft mit der des Schnittes zusammen. In diesen Schnitten ist also das Material nur scheerend in Anspruch genommen. Da die Doppelstrahlen gleiche Winkel mit den Axen bilden, so sind diese scheerenden Kräfte in beiden gleich gross. Alle conjugirten Richtungen der Kräfte und Schnitte sind von den Doppelstrahlen harmonisch getrennt. In solchen conjugirten, von den Doppelstrahlen getrennten Richtungen wird das Material in entgegengesetzter Richtung in Anspruch genommen. Die Doppelstrahlen trennen daher die Schnitte, in welchen das Material von den ausserhalb wirkenden Kräften rückwirkend, von denjenigen, in welchen es absolut in Anspruch genommen ist.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 gleichen Zeichens, Fig. 192, so liegt der Punkt

C im Halbkreis über AB, der auf einer senkrechten zu AB, die Potenz CP abschneidet. Ein Kreis durch O und P, dessen Mittelpunkt auf AB liegt, schneidet auf dieser Linie Punkte der Axen aus, deren Länge gerade so, wie in Fig. 191 construirt werden können. Die Schenkel eines jeden rechten Winkels in P schneiden auf AB Punkte conjugirter Richtungen aus. Doppelstrahlen, in denen das Material nur scheerend in Anspruch genommen wäre, kommen nicht vor. Demnach ist das Material in allen Schnitten in gleicher Weise in Anspruch genommen.

In Fig. 192 wurden noch die gleich langen Durchmesser der Kräfte construirt, welche den Halbirungslinien der Axen entsprechen.

Wären endlich die ausserhalb zweier verschiedener Schnitte wirkenden Kräfte parallel, so würde allen möglichen Schnitten immer die gleiche Richtung der Kräfte entsprechen. Einem Schnitt in dieser Richtung der Kräfte entspricht dann eine Kraft 0, deren Richtung unbestimmt ist, so dass auch allen Richtungen der Kräfte, nur eine Richtung des Schnittes entspricht. Es ist also dieser Fall, der der zusammenfallenden Doppelstrahlen; er tritt ein, wenn die Endflächen prismatischer Körper gleichmässig belastet sind. Fallen zufälliger Weise im Holz z. B. die Richtungen in die der Fasern, nach welchen der Widerstand gegen das Abscheeren sehr klein ist, so spaltet sich ein solcher Körper nach der Richtung dieser Fasern, bevor jede einzelne geknickt wird.

Das bisher Entwickelte fassen wir nochmals kurz zusammen:

Wenn die ausserhalb von Schnitten wirkenden Kräfte den Längen dieser Schnitte proportional sind, und man für jeden Schnitt eines Strahlenbüschels, die auf diesen Schnitt pro Längeneinheit wirkenden Kräfte bestimmt, so werden die von dem Centrum des Büschels in Richtung und Grösse aufgetragenen Kräfte mit den Schnitten einen involutorischen Büschel conjugirter Richtungen bilden.

Die Endpunkte aller Kräfte werden auf einer Ellipse liegen, deren Axen mit denen der Involution zusammenfallen.

Senkrechten Schnitten entsprechen als darauf wirkende Kräfte, conjugirte Durchmesser der

Ellipse; insbesondere den Axenhalbirungslinien die gleich langen conjugirten Ellipsendurchmesser.

Hat die Involution zwei Doppelstrahlen, welche also alle conjugirten Richtungen harmonisch trennen, und mit den Axen gleiche Winkel bilden, so wirken in Schnitten nach deren Richtung gleich grosse Kräfte, die das Material nur scheerend in Anspruch nehmen. Diese Doppelstrahlen trennen die Schnitte, in welchen das Material rückwirkend, von denjenigen in welchen es absolut in Anspruch genommen ist. Jeder der beiden Winkel der beiden Doppelstrahlen enthält eine Axe, nach deren Richtung das Material am stärksten oder schwächsten, und zwar nur normal gar nicht scheerend in Anspruch genommen ist.

Hat die Involution keine Doppelstrahlen, so giebt es keine Schnitte, nach deren Richtung das Material nur scheerend in Anspruch genommen wäre. Es wird in allen Schnitten in gleicher Weise angegriffen. Am stärksten nach der Richtung der grossen, am schwächsten nach der der kleinen Axe. In der Richtung der Axen wirken keine scheerenden Kräfte.

Fallen die Doppelstrahlen, und mit ihnen auch eine Axe zusammen, so entspricht allen Schnitten nur diese einzige Richtung. Die Ellipse der Kräfte klappt zu der geraden Linie der Doppelstrahlen zusammen, in der Richtung dieser Geraden, ist das Material gleichzeitig scheerend absolut oder rückwirkend, senkrecht darauf nur rückwirkend absolut oder gar nicht in Anspruch genommen.

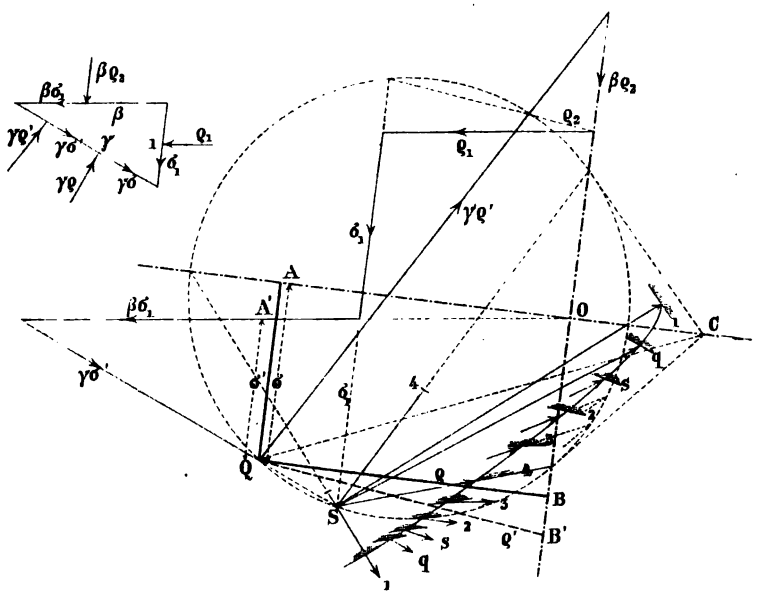
127. Allgemeine Construction der in jedem Schnitt wirkenden Kraft.

Um die allgemeinen Beziehungen zwischen den Schnitten zu entwickeln, war es zweckmässig und einfach, von zwei conjugirten Richtungen auszugehen; allein in der Praxis sind diese in der Regel nicht von vorn herein gegeben, sondern die auf zwei belie-

bige Schnitte wirkende Kräfte, mittelst deren dann alles Uebrige zu construiren ist. Wir haben hier noch zu zeigen, wie das geschehen kann.

Es sei Fig. 193 ein Elementardreieck, dessen Seiten sich wie 1 β und γ verhalten; die auf die Seiten 1 und β wirkenden Kräfte seien pro Flächeneinheit gegeben, wir zerlegen sie in zwei Seitenkräfte nach der Richtung 1 und β, die auf und in der Seite 1 wirkenden sind gleich ϱ_1 und σ_1; dann muss die in der Seite β wirkende Kraft pro Flächeneinheit ebenfalls gleich σ_1, also auf die ganze Fläche gleich $\beta\,\sigma_1$, und die auf diese Seite wirkende gleich $\beta\varrho_2$ sein, wenn sie pro Einheit gleich ϱ_2 gesetzt wird. Die auf die 3te Seite γ wirkende, gesuchte Kraft zerlegen wir zuerst in zwei Seitenkräfte $\gamma\varrho'$ und $\gamma\sigma'$, welche denselben Winkel als wie ϱ_1 und σ_1 mit einander bilden, und dann in zwei senkrecht aufeinander-

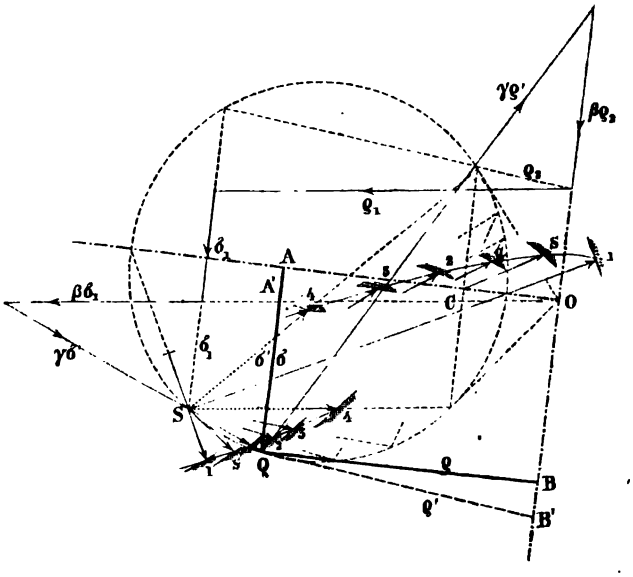
Fig. 193. Fig. 194.



stehende $\gamma\varrho$ und $\gamma\sigma$. In Fig. 193 sind beide Zerlegungen angedeutet, allein es kann nur eine derselben, nicht beide, gleichzeitig stattfinden. Zweck der Construction ist, für jede Richtung von γ die in und auf einen Schnitt in dieser Richtung pro Flächeneinheit wirkende Kraft σ und ϱ zu bestimmen.

Bei Aenderung der Richtung γ wird die Seite 1 festgehalten, während nicht die Richtung aber die Länge β, mit der Richtung und Länge γ sich ändert. Es bleiben also ϱ_1 und σ_1 constant, während sich die übrigen Kräfte ändern. Da laut Nr. 124 S. 514 alle 6 jetzt aufgezählten Kräfte durch die Mitte von γ, also durch einen Punkt gehen, so brauchen wir nur die 4 bekannten Kräfte im Kräftepolygon aneinander zu reihen, und durch die Endpunkte des Zuges parallele zu den Richtungen der auf und in γ wirkenden Kräfte zu ziehen, um diese zu erhalten. Die Mitte des Zuges bilden die beiden constanten Kräfte σ_1 und ϱ_1, siehe Fig. 194 und 195. Vor σ_1 tragen wir dann $\beta\sigma_1$, und nach ϱ_1, $\beta\varrho_2$ auf. Um $\beta\sigma_1$ in Richtung und Grösse zu erhalten, verlängern wir σ_1 nach unten um die gleiche Länge bis S, und construiren über dem punktirten σ_1 ein Fig. 193 ähnliches Dreieck, dessen an σ_1 Fig. 194 und 195 stossende Seite offenbar gleich $\beta\sigma_1$ ist. In gleicher Weise con-

Fig. 195.



struiren wir am Endpunkt ϱ_1 die Länge $\beta\varrho_2$. Wir tragen dort ϱ_2 so auf, dass es mit σ_1 also auch mit $\beta\varrho_2$ derselben Winkel als wie ϱ_1 bildet; construirt man dann über diesem ϱ_2 ein zweites der Fig. 193 ähnliches Dreieck, so ist die zu σ_1 parallele Seite die gesuchte Länge $\beta\varrho_2$. Verlängert man die dritten, γ entsprechenden Seiten

der beiden eben construirten Dreiecke bis zu ihrem Schnitt in Q, so schliessen sie den Zug des Kräftepolygons $\beta\sigma_1$, σ_1, ϱ_1, $\beta\varrho_2$, und sie sind demnach gleich $\gamma\sigma'$ und $\gamma\varrho'$; denn $\gamma\sigma'$ geht durch den Anfangspunkt des Kräftezuges, und läuft mit γ parallel, und $\gamma\varrho'$ bildet mit $\gamma\sigma'$, wie alle entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke, denselben Winkel, als wie ϱ_1 mit σ_1 mit einander. Zieht man schliesslich durch Q Parallele zu σ_1 und ϱ_2 bis $\beta\sigma_1$ und $\beta\varrho_2$ so erhält man, wie aus der Aehnlichkeit der so gebildeten Dreiecke $1\beta\gamma$ hervorgeht, σ' und ϱ'.

Aendert man die Richtung von γ, so bilden doch immer $\gamma\sigma'$ und $\gamma\varrho'$ den constanten Winkel von $\varrho_1\overset{\wedge}{\sigma}_1$ mit einander, da ferner diese beiden Linien durch die festen Endpunkte von σ_1 und ϱ_2 gehen, so beschreibt Q die in Fig. 194 und 195 punktirten Kreise. Sie gehen auch durch den Schnitt von σ_1 und ϱ_2, weil diese Richtungen dem Werth $\gamma = 0$ entsprechen. Jeder der Mittelpunkte liegt in dem Perpendikel vom Durchschnitt O der beiden Linien $\beta\sigma_1$ und $\beta\varrho_2$ auf σ_1, denn die ganze Länge der Sehne σ_1 ist gleich $2\sigma_1$ + 2mal die Projection von ϱ_1 auf σ_1, und die Entfernung von S bis zum Perpendikel ist gleich σ_1 + 1mal die Projection, er halbirt also die Sehne, und ist Durchmesser. Man kann daher sagen; ϱ' und σ' sind die Coordinaten des eben construirten Kreises in Bezug auf die Axen $\beta\sigma_1$ und $\beta\varrho_2$, parallel gemessen zu σ_1 und ϱ_2.

Der constante Winkel, den die Coordinaten ϱ' und σ' mit einander bilden, ist gleich dem von $\varrho_1\overset{\wedge}{\sigma}_1$, also auch gleich dem der Kräfte $\varrho'\sigma'$ selbst. Die Linie $A'B'$, die sie unterspannt, stellt also auch in Grösse die ausserhalb von γ wirkende Mittelkraft dar; verlängert man σ' bis A auf dem Durchmesser durch O, und fällt man von Q eine Senkrechte auf $\beta\varrho_2$, so ist $AB = A'B'$, denn es ist $A'A = B'B$, weil ϱ_1 und ϱ_2 gleiche Winkel mit σ_1 bilden. Die rechtwinkeligen Coordinaten $\varrho\sigma$ des Kreispunktes Q, in Bezug auf die Axen OA und OB, sind daher die normal auf und in einem Schnitt, nach der Richtung SQ wirkenden Kräfte pro Flächeneinheit, und die Entfernung Q vom Ursprung der Coordinaten ist gleich der ganzen auf γ wirkenden Kraft. Denn es ist $OQ = AB$. Um diese Kraft AB in ihrer richtigen Lage zu erhalten, muss man den rechten Winkel AQB so drehen, dass der

Schenkel AQ in die Richtung γ fällt. Man gelangt aber auf einfachere Weise zu dieser Richtung, wenn man sich erinnert, dass die Richtungen der Schnitte und Kräfte eine Involution bilden, für deren Doppelstrahlen ϱ gleich 0 ist. Die Doppelstrahlen sind daher Fig. 194 diejenigen Strahlen 4, welche von S nach den Schnittpunkten des Kreises mit OB gezogen werden. Das Involutionscentrum ist der Pol C der Linie OB. Je zwei Strahlen, welche nach den Schnittpunkten des Kreises mit einer Secante durch C gezogen werden, sind conjugirte Richtungen; insbesondere sind die Strahlen 11, nach den Schnittpunkten des durch C und O gehenden Durchmessers, die Axen sowohl der Involution, als auch der Ellipse der Kräfte. Diese letztere erhält man, wenn auf jedem Strahl von S aus, die Entfernung des Kreispunktes des andern Strahles von O, aufgetragen wird. Für einen Quadranten wurde Fig. 194 diese Ellipse gezeichnet, und am Endpunkt jeder Kraft die conjugirte Richtung, welche in der Figur gleiches Zeichen trägt, aufgetragen, und als Schnitt schraffirt. Dieser Ellipsenquadrant giebt daher eine vollständige Uebersicht der Inanspruchnahme des Materiales. Indem man die Schnitte, weil Fig. 194 Doppelstrahlen vorausgesetzt werden, in entgegengesetztem Sinn als wie die Kräfte dreht, sieht man, dass in den Schnitten $1\,q\,s\,2\,3\,4$, das Material in entgegengesetztem Sinn, als wie in den Schnitten $4\,3\,2\,s\,q\,1$ in Anspruch genommen ist, und dass es im Doppelstrahl 4 nur scheerend in Anspruch genommen ist.

Schneidet der Kreis die Linie $\beta\varrho_2$ nicht s. Fig. 195, so fällt der Anfangspunkt der Coordinaten über den Kreis hinaus, und das Involutionscentrum als Pol der Linie OA fällt in den Kreis. Die Involution der Kräfte und Schnittrichtungen, hat keine Doppelstrahlen, je zwei conjugirte Richtungen trennen sich, die Richtungen der Schnitte und Kräfte drehen sich im gleichen Sinn, und das Material ist überall in gleicher Weise in Anspruch genommen. Da die Axen conjugirte Richtungen sind, so trennen auch sie alle andern Richtungen; in Fig. 195 liegen daher die conjugirten Kräfte und Schnitte, in zwei verschiedenen Quadranten, nicht in demselben Quadranten, wie in Fig. 194.

Die Strahlen, welche von S nach dem Schnitt der Polaren, von O mit den Kreis gezogen werden, sind die gleichlangen conjugirten Durchmesser der Kräfteellipse, siehe Nr. 126 S. 522, sie haben mit den Doppelstrahlen die Eigenschaft gemein, dass das

Quadrat der Tangente des Winkels, den sie mit der Axe bilden, dem Product der Tangenten der Winkel gleich ist, die irgend zwei conjugirte Richtungen mit derselben bilden. Durch sie allein ist also auch die Involution bestimmt, indem die sie halbirenden Axen ebenfalls conjugirt sind, und deshalb haben wir sie punktirt. Man könnte sie die imaginären Doppelstrahlen der Involution der Kräfte und Schnitte nennen.

Wird das Centrum S der Kräfteellipse an einen andern Punkt des Kreises verlegt, so ändert sich jene nicht, denn die Winkel, welche die Strahlen nach festen Punkten des Kreises mit einander bilden, ändern sich nicht; die Entfernungen von O nach denselben Punkten, d. h. die Längen der Strahlen von S ebenfalls nicht: demnach dreht sich nur die Ellipse um S, ohne ihre Form zu verändern, wenn S den Kreis beschreibt. Die Ellipse ist daher vollständig durch die Lage der beiden, in Bezug auf den Kreis conjugirten Punkte, O und C eines Durchmessers bestimmt.

Wird von der absoluten Grösse der Kräfte abstrahirt, und nur die proportionale Aenderung derselben in den verschiedenen Schnitten in's Auge gefasst, so genügt es zur vollständigen Darstellung der Inanspruchnahme des Materials, in einem Punkt die Lage der beiden reellen Fig. 194 oder imaginären Fig. 195 Doppelstrahlen anzugeben; denn zieht man dann einen beliebigen Kreis durch ihren Schnitt, so ist der Pol der Sehne, welche die Schnitte des Kreises mit den beiden Schenkeln verbindet, entweder der Punkt O, oder der Punkt C, je nachdem die Doppelstrahlen reel oder imaginär sind, wodurch alles bestimmt ist. Nur muss jetzt noch angegeben werden, wie das Material in Anspruch genommen ist, was einfach mittelst eines $+$ oder $-$, oder einem a oder r, für absolut und rückwirkend geschehen kann.

Soll auch noch die Grösse der Inanspruchnahme angedeutet werden, so kann man die Längen der Doppelstrahlen begrenzen, als die Kräfte, die in ihnen wirken. Nimmt man auf jedem der Doppelstrahlen einen Punkt so an, dass die Entfernung beider Punkte gleich der doppelten Kraft in einem der Doppelstrahlen ist, so ist der durch den Scheitel und die zwei Punkte gehende Kreis der der Fig. 194 und 195.

Auch durch die Lage und Grösse der beiden Axen der Kräfteellipse, kann die ganze Inanspruchnahme des Materials für einen Punkt angedeutet werden; denn trägt man a und b von O aus in

entgegengesetzter Richtung, wenn die Doppelstrahlen reell sind, in gleicher wenn sie imaginär sind auf, so sind die Endpunkte auch die Endpunkte des Durchmessers der Kreise Fig. 194 und 195, so dass also auf diese Weise alles vollständig bestimmt ist.

Der Winkel den die Doppelstrahlen mit den Axen bilden, lässt sich auch sehr einfach durch die Axen ausdrücken. Sind α und β die Axenlängen, also auch Fig. 194 die Segmente des Durchmessers durch O, so ist die auf diesem Durchmeser senkrecht stehende halbe Sehne gleich $\sqrt{\alpha\,\beta}$, und die Tangente des Winkels den ein Doppelstrahl mit α bildet, gleich:

$$tg\,\frac{1}{2}\,\Theta = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Denselben Ausdruck erhält man auch für imaginäre Doppelstrahlen Fig. 195. Die von Θ aus gemessenen Entfernungen, Schnitte des Durchmessers mit dem Kreis, sind gleich α und β. Die durch C getrennte Segmente desselben gleich:

$$\frac{\alpha\,(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta} \text{ und } \frac{\beta\,(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta},$$

denn da die C und O conjugirt sind, so müssen sich diese Segmente ebenfalls wie α zu β verhalten, und ihre Summe muss gleich $\alpha-\beta$ sein, woraus sich die obigen Werthe ergeben. Die Tangente des Winkels, den ein imaginärer punktirter Doppelstrahl mit der Axe α bildet, ist also gleich:

$$tg\,\frac{1}{2}\,\Theta = \frac{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha\,\beta}}{\alpha+\beta} : \frac{\alpha\,(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

wie oben. Die beiden Fälle für die reelle und die imaginäre Tangente, lassen sich demnach in eine Formel vereinigen, wenn man schreibt:

$$tg\,\frac{1}{2}\,\Theta = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}},$$

wo α und β entgegengesetzte Zeichen zu geben sind, wenn sie das Material in verschiedener Weise angreifen, gleiche aber, wenn sie in gleicher Weise es angreifen. Im ersten Fall ist die Tangente reell, im zweiten imaginär. Sucht man diesen Ausdruck zu construiren, so gelangt man ebenfalls zur Construction Fig. 194.

Aus den bisherigen Entwickelungen geht hervor, dass wenn von der Grösse der Kräfte abstrahirt wird, in einem Punkt, das Material auf einfach unendlich verschiedene Weise, in Anspruch genommen werden kann. Für jede dieser Arten der Inanspruchnahmen, giebt es aber unendlich viele nur durch ihre Stärke sich unterscheidende, also zu ähnlichen Ellipsen führende Inanspruchnahmen. Im ganzen kann also ein Punkt auf doppelt unendlich viele Weisen beansprucht werden. Ja, man könnte sagen, auf dreimal unendlich viele Weisen, wenn die Drehung der Kräfteellipse, also die Richtungen, in welchen die grössten und kleinsten Inanspruchnahmen stattfinden, als besondere Arten betrachtet werden wollten.

Sind für einen Punkt die beiden Axen, die Richtungen des grössten Zuges und Druckes bestimmt, und geht man in der Richtung des Zuges zu einem unendlich nahen Punkt über, für den man wieder die Richtung des Zuges bestimmt, u. s. f., so erhält man eine Spannungstrajectorie, nach der hin das Material nur gespannt ist, und längs der keine scheerenden Kräfte wirken. In der gleichen Weise vom ersten Punkt in der Richtung des Druckes fortgehend, erhält man eine Trajectorie des Druckes, welche die erste im Ausgangspunkt unter einem rechten Winkel schneidet. Einen andern vom ersten endlich entfernten Punkt kann man wiederum als Ausgangspunkt zweier Trajectorien betrachten, u. s. f. So kann man den ganzen Körper mit zwei Systemen von Trajectorien überdecken, die sich alle unter einem rechten Winkel schneiden, und welche die Richtungen angeben, nach welchen sich der Zug und der Druck fortpflanzen, weshalb wir sie die Zug- und Druckcurven nennen wollen. Denkt man sich das Material zwischen diesen Curven in ihnen vereinigt, so wird es nur auf Zug oder Druck zu widerstehen haben, und dieselben Reactionen als wie der Körper selbst ausüben können. Diese Zug- und Druckcurven sind überall, wo die Natur construirt, in den Fibern des Holzes, in dem Gewebe der Spongiosa in den Knochen der Thiere, auf das deutlichste zu erkennen, so dass also die wirkliche Uebertragung der Kräfte nach diesen Richtungen keinem Zweifel unterliegt. Im nächsten Abschnitt werden wir diese Curven für verschiedene Balken construiren.

128. Formeln für die in Schnitten wirkenden Kräfte.

Wir nehmen Fig. 193 als Coordinatenaxen die Richtungen beider Schnitte an, für welche die Kräfte ϱ_1 ϱ_2 σ_1 gegeben sind. Es seien dann die Längen der Schnitte in den Richtungen der x und y Axe gleich a und b, und die auf und in a und b wirkenden Kräfte gleich ϱ_2 und σ_1 und ϱ_1 und σ_1. Wir erhalten die Länge e der die Endpunkte von a und b mit einander verbindenden Seiten aus:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\omega,$$

wenn mit ω und ω' die cos und sin des Winkels der Axen bezeichnet werden, dann sind die Seitenkräfte X und Y der auf e wirkenden Kräfte:

$$X = a\,\sigma_1 + b\,\varrho_1,$$
$$Y = a\,\varrho_2 + b\,\sigma_1,$$

Bezeichnet man mit $\varkappa$ und ι die Seitenkräfte der auf die Einheit von e wirkenden Kraft ϱ, so ist $X = e\,\varkappa$, und $Y = e\,\iota$. Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, und sucht aus denselben $\frac{a}{e}$ und $\frac{b}{e}$ so erhält man:

$$\vartheta^2 = \sigma_1^2 - \varrho_1\,\varrho_2,$$

$$\vartheta^2\,\frac{a}{e} = \sigma_1\,\varkappa - \varrho_1\,\iota,$$

$$\vartheta^2\,\frac{b}{e} = -\varrho_2\,\varkappa + \sigma_1\,\iota.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\frac{\vartheta^2}{e}$, und setzt dann für $-\frac{b}{a}$ und $\frac{\iota}{\varkappa}$, die Coordinatenverhältnisse der conjugirten Richtungen von Kräften und Schnitten r_1 und r_2, so erhält man:

$$\varrho_1\,r_1\,r_2 - \sigma_1\,(r_1 + r_2) + \varrho_2 = 0,$$

die Gleichung der Involution, welche diese conjugirten Richtungen mit einander bilden.

Das Coordinatenverhältniss der Doppelstrahlen bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\varrho_1\,r^2 - 2\,\sigma_1\,r + \varrho_2 = 0,$$

und sie sind reell, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem die Discriminante $\sigma_1^2 - \varrho_1\,\varrho_2$ positiv, 0, oder negativ ist.

Setzt man in dieser Gleichung $r = \frac{y}{x}$, so erhält man die Gleichung, und durch Auflösung die Gleichungen der beiden Doppelstrahlen:

$$\varrho_2\,x^2 - 2\,\sigma_1\,x\,y + \varrho_1\,y^2 = 0,$$
$$[(-\sigma_1 + \delta)\,x + \varrho_1\,y]\,[(-\sigma_1 - \delta)\,x + \varrho_1\,y] = 0.$$

Setzt man $\lambda = \varrho_1 + 2\,\sigma_1\,\omega + \varrho_2$,
so sind die Factoren ε' und ε'', durch welche diese Gleichungen auf die Normalform gebracht werden

$$\varepsilon'^2 = (-\sigma_1 + \delta)^2 - 2\,\varrho_1\,(-\sigma_1 + \delta)\,\omega + \varrho_1^2$$
$$= \varrho_1\,(\varrho_1 - \varrho_2) + 2\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,(\sigma_1 - \delta) = \varrho_1\,\lambda + 2\,\delta^2 - 2\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,\delta,$$
$$\varepsilon''^2 = \varrho_1\,(\varrho_1 - \varrho_2) + 2\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,(\sigma_1 + \delta) = \varrho_1\,\lambda + 2\,\delta^2 + 2\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,\delta.$$

Setzt man ferner:

$$\mu^2 = (\varrho_1 - \varrho_2)^2 + 4\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,(\sigma_1 + \varrho_2\,\omega) = \lambda^2 + 4\,\delta^2\,\omega'^2;$$

so wird:

$$\varepsilon'\,\varepsilon'' = \varrho_1\,\mu,$$

und man erhält den Winkel, den die beiden Doppelstrahlen mit einander bilden, aus:

$$\mu \sin \Theta = 2\,\delta\,\omega',$$
$$\mu \cos \Theta = \lambda;$$

worin Θ denjenigen Winkel der Doppelstrahlen bezeichnet, welcher auf einer Ordinate eine endliche Strecke ausschneidet.

Die Gleichung derjenigen Involutionsaxe, welche diese endliche Strecke schneidet, ist:

$$-(\mu + \varrho_2 - \varrho_1)\,x + 2\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,y = 0.$$

Der Coefficient, durch welchen die Gleichung dieser Axe auf die Normalform gebracht wird, ist:

$$\varepsilon_1^2 = 2\,\mu\,(\mu + \lambda - 2\,\varrho_1\,\omega'^2),$$

und der Winkel, den sie mit den Doppelstrahlen einschliesst, ergiebt sich aus:

$$2\,\mu \sin^2 \frac{1}{2}\,\Theta = \mu - \lambda,$$

$$2\,\mu \cos^2 \frac{1}{2}\,\Theta = \mu + \lambda.$$

Die Gleichung derjenigen Axe, welche die endliche Strecke einer Ordinate zwischen den Doppelstrahlen nicht schneidet, ist:

$$(\mu - \varrho_2 + \varrho_1)\,x + 2\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,y = 0$$

Ist $\sigma_1 + \varrho_1\,\omega$ positiv, so liegt diese Involutionsaxe zwischen der negativen y Axe und der Linie ε', ist aber $\sigma_1 + \varrho_1\,\omega$ negativ, so liegt sie zwischen ε'' und der positiven y Axe.

Der Normalfactor derselben ist:

$$\varepsilon_2^2 = 2\,\mu\,(\mu - \lambda + 2\,\varrho_1\,\omega'^2).$$

Der Winkel den sie mit Doppelstrahlen bildet, ist gleich $90 - \frac{1}{2}\,\Theta$.

Die Axen sind immer reell; sind dagegen die Doppelstrahlen nicht reell, so

wird $2\mu \sin^2 \frac{1}{2} \Theta$ negativ. Die Winkel mit den Doppelstrahlen werden also gleichzeitig mit diesen imaginär.

Um die Gleichung der Kräfteellipse d. h. eine Beziehung zwischen den Seitenkräften x ι von ϱ zu erhalten, substituiren wir die oben S. 532 gefundenen Werthe von $\delta^2 \frac{a}{e}$, $\delta^2 \frac{b}{e}$ in die Identität:

$$\delta^4 = \delta^4 \left(\frac{a^2 - 2\,a\,b\,\omega + b^2}{e^2} \right),$$

und erhalten, wenn man:

$$a_{11} = \varrho_2^2 + 2\,\varrho_2\,\sigma_1\,\omega + \sigma_1^2,$$
$$a_{12} = \varrho_1\,\sigma_1 + \varrho_2\,\sigma_1 + \varrho_1\,\varrho_2\,\omega + \sigma_1^2\,\omega,$$
$$a_{22} = \varrho_1^2 + 2\,\varrho_1\,\sigma_1\,\omega + \sigma_1^2,$$

setzt, die Gleichung der Kraftellipse:

$$a_{11}\,x^2 - 2\,a_{12}\,\iota\,x + a_{22}\,\iota^2 = \delta^4.$$

Da diese Gleichung durch die Substitution der linearen Werthe von $\delta^2 \frac{a}{e}$ und $\delta^2 \frac{b}{e}$ in eine quadratische Gleichung von $\delta^2 \frac{a}{e}$ und $\delta^2 \frac{b}{e}$ entstanden ist, so müssen sich ihre Invarianten in einfacher Weise durch die Invarianten dieser ausdrücken lassen. Zunächst muss ihre Discriminante A_{33}, gleich der der ursprünglichen Gleichung, multiplicirt mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante δ^4 sein, in der That findet sich leicht durch anschreiben:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varrho_2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \varrho_1 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} 1 & \omega \\ \omega & 1 \end{vmatrix} = \delta^4\,\omega'^2$$

Ferner:

$$a_{22} - a_{11} = (\varrho_1 - \varrho_2)\,\lambda,$$
$$a_{12} + a_{22}\,\omega = (\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,\lambda,$$
$$a_{12} + a_{11}\,\omega = (\sigma_1 + \varrho_2\,\omega)\,\lambda;$$

$$l = a_{11} + 2\,a_{12}\,\omega + a_{22} = \lambda^2 + 2\,\delta^2\,\omega'^2,$$

$$m = + \sqrt{l^2 - 4\,A_{33}\,\omega'^2} = + \sqrt{\lambda^4 + 4\,\lambda^2\,\delta^2\,\omega'^2} = + \mu\,.\,\lambda.$$

Die Gleichung der einen Axe der Ellipse ist:

$$-(m + a_{11} - a_{22})\,x + 2\,(a_{12} + a_{22}\,\omega)\,y = 0.$$

Wir haben hier wieder statt x und ι, x und y gesetzt, um anzudeuten, dass es sich nicht mehr um die Seitenkräfte von ϱ, deren Endpunkte immer auf der Kräfteellipse liegen, sondern um die allgemeine Gleichung einer Axe handelt. Substituirt man in diese Gleichung die eben gefundenen Werthe für a_{11} a_{12} a_{22} und m, so erhält man:

$$-(\mu + \varrho_2 - \varrho_1)\,x + 2\,(\sigma_1 + \varrho_1\,\omega)\,y = 0.$$

Die Gleichung dieser Axe ist identisch mit der Involutionsaxe, welche die endliche Strecke einer Ordinate zwischen den Doppelstrahlen schneidet.

Das Quadrat ihrer Länge ist gleich:

$$\alpha^2 = \frac{(m+l)\,\delta^4}{2\,A_{33}} = \frac{1}{2\,\omega'^2}\,(\mu\,\lambda + \lambda^2 + 2\,\delta^2\omega'^2) = \frac{1}{2\,\omega'^2}\,(\mu\,\lambda + \frac{1}{2}\,\lambda^2 + \frac{1}{2}\,\mu^2).$$

Die Grösse unter der Klammer ist ein vollständiges Quadrat, also ist die Axenlänge gleich:

$$\alpha = \pm\frac{1}{2\,\omega'}\,(\mu + \lambda).$$

Die Grösse der zweiten Axe, welche die endliche Strecke einer Ordinate zwischen den zwei Doppelstrahlen nicht schneidet, und deren Gleichung oben schon angegeben worden ist, ist gleich:

$$\beta = \pm\frac{1}{2\,\omega'}\,(\mu - \lambda).$$

δ^2 ist positiv oder negativ, je nachdem die Ordnungsstrahlen reell oder imaginär sind.

δ_{33}^4 und mit ihm A_{33} ist aber immer positiv; demnach können die Endpunkte der ϱ nur auf einer Ellipse, nie auf einem anderen Kegelschnitt liegen. Es kann höchstens gleich 0 werden; dann fallen die Doppelstrahlen zusammen und die Richtung der Kräfte ist constant. Nr. 126 S. 523.

Wird λ gleich 0 bei positivem δ^2, so ist der Winkel Θ der Doppelstrahlen ein rechter, die Axen α und β der Kräfteellipse einander gleich, diese also ein Kreis.

Ist λ positiv, so ist der Winkel der Doppelstrahlen ein spitzer, und α, d. h. die in ihm liegende Axe die grössere.

Ist λ negativ, so ist der Winkel der Doppelstrahlen ein stumpfer und β die grössere Axe. Die grössere Axe der Kräfteellipse liegt also immer im spitzen Winkel der Doppelstrahlen.

In den eben aufgezählten drei Fällen ist $\mu > \lambda$, es gilt daher bei α und β das obere Zeichen; ist dagegen δ^2 negativ, d. h. sind die Doppelstrahlen imaginär, so ist $\mu < \lambda$, und es sind die Zeichen von α und β so zu wählen, dass diese Grössen immer positiv sind.

Die Division von $\sin^2\frac{1}{2}\,\Theta$ durch $\cos^2\frac{1}{2}\,\Theta$ giebt:

$$tg^2\frac{1}{2}\,\Theta = \frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda} = \frac{\beta}{\alpha},$$

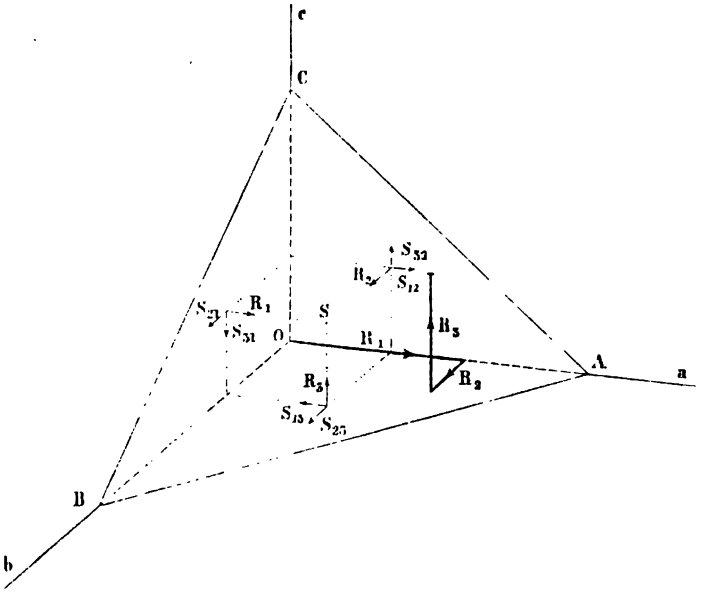
was mit S. 530 vollkommen im Einklange steht.

129. Kräfte, welche Flächen proportional sind.

Wir wollen jetzt nicht mehr annehmen, dass die Inanspruchnahme des Materials unverändert bleibe, wenn man in einer be-

stimmten Richtung fortschreitet, sondern dass sie sich nach allen Richtungen hin ändere. Um die Kräfte zu bestimmen, welche in diesem Falle pro Flächeneinheit auf irgend eine Schnittebene wirken, nehmen wir ganz wie in Nr. 124 S. 514 an, es seien die Kräfte bekannt, welche auf drei durch den Punkt O gehende, gegebene Schnitte BOC, COA, AOB (Fig. 196) pro Flächeneinheit wirken. Dann schneiden wir diese drei Flächen durch eine Ebene ABC, die parallel zum gewünschten Schnitt läuft, und erhalten, indem wir die auf die drei gegebenen Schnitte wirkenden Kräfte zusammensetzen, die auf ABC wirkende Kraft.

Fig. 196.



Die Kräfte, welche auf die Seitenflächen des Tetraeders wirken, greifen im Schwerpunkte derselben an, weil sie die Mittelkraft gleichmässig über dieselben vertheilter Kräfte sind; zerlegt man sie dort, wie es in der Figur angedeutet ist, in drei Seitenkräfte R_g, S_{ig}, S_{kg}, wo R_g diejenige Kraft bezeichnet, welche auf die Fläche g parallel zur Kante g oder Coordinatenaxe g wirkt, und S_{ig} diejenige, welche parallel zur Axe i in der Fläche g wirkt, so lässt sich das Gleichgewicht der so erhaltenen 9 Kräfte mit einer

10ten, die in beliebiger Richtung auf ABC wirkt und durch den Schwerpunkt von ABC geht, allgemein nicht anders denken, als indem man annimmt, dass diejenigen S, welche in zwei verschiedenen Flächen liegen und die Schnittlinie dieser Flächen in einem und demselben Punkte schneiden, so gross seien, dass ihre Mittelkraft durch den Schwerpunkt S von ABC gehe.

Solche S haben gleiche, aber vertauschte Indexe, z. B. S_{12} und S_{21}, die Ebene derselben enthält den Schwerpunkt S, denn ihre Ordinate ist $= \frac{1}{3} c$, wenn mit $a\ b\ c$ die drei Seitenlängen $0)ABC$ bezeichnet werden. Soll nun die Mittelkraft S_{12} und S_{21} durch S gehen, so müssen sich diese Kräfte wie die Seiten des Parallelogramms, das sie mit S bilden, d. h. wie $\frac{1}{3} a : \frac{1}{3} b$ verhalten. Um dies auszudrücken, setzen wir die auf die Einheit jeder der beiden Flächen wirkende Kraft $= \frac{\sigma_{12}}{\omega'_2}$ und $\frac{\sigma_{21}}{\omega'_1}$, worin $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ sein muss, denn man hat in diesem Falle $S_{12} = \frac{1}{2} . a\ c\ \omega'_2 . \frac{\sigma_{12}}{\omega'_2} = \frac{1}{2} a c \sigma_{12}$, ebenso $S_{21} = \frac{1}{2} b c \sigma_{21}$, die sich wie a zu b verhalten, wie es sein soll. Ebenso müssen $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ und $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ sein, wenn $\frac{\sigma_{13}}{\omega'_3}$, $\frac{\sigma_{31}}{\omega'_1}$, $\frac{\sigma_{23}}{\omega'_3}$ und $\frac{\sigma_{32}}{\omega'_2}$ die auf die Einheit der Flächen 3, 1 und 2 wirkenden Kräfte sind.

Es ist klar, dass auf diese Weise das Gleichgewicht bestehen kann, welches auch die Stellung der Ebene ABC sein mag; denn wenn die drei Kräfte R und die drei Mittelkräfte je zweier S durch den Schwerpunkt von ABC gehen, so lassen sich dort diese sechs Kräfte zu einer einzigen Mittelkraft zusammensetzen.

Andere Arten des Gleichgewichtes lassen sich wohl für specielle Stellungen von ABC und gewisse Richtungen der Kräfte, nicht aber allgemein für alle möglichen Stellungen und Kräfte denken. Nimmt man z. B. an, die zwei Kräfte σ_{12} und σ_{21} genügen der obigen Bedingung nicht, dann wird ihre Mittelkraft nicht durch den Schwerpunkt S gehen, während die Mittelkraft der 7 übrigen Kräfte durch ihn geht. Sollen sich daher alle Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen lassen, so muss die Richtungslinie der 7 Kräfte $S_{13}\ S_{31}\ S_{23}\ S_{32}\ R_1\ R_2\ R_3$ in der Ebene von $\sigma_{12}\ \sigma_{21}$ liegen, also mit der Ebene 3 parallel laufen müssen. Dieses Verhältniss kann

bei einer bestimmten Stellung von ABC zutreffen, wird aber nicht mehr zutreffen, sobald man diese Stellung ändert. Nimmt man an, zwei Paar Kräfte $\sigma_{12}\ \sigma_{21}$, $\sigma_{13}\ \sigma_{31}$ genügen der Bedingung nicht, so wird der Fall auf den vorigen zurückgeführt, wenn sich die Mittelkraft der zwei Paaren entsprechenden S schneiden. Schneiden sie sich aber nicht und liegt auch die Mittelkraft von $S_{23}\ S_{32}\ R_1\ R_2\ R_3$ in keiner ihrer Ebenen, so erhält man drei Kräfte, welche sich nicht schneiden. Die Mittelkraft derselben kann daher, selbst wenn sie eine haben, unmöglich durch S gehen, weil dieser Punkt auf einer derselben liegt und die Mittelkraft dreier Kräfte im Raume laut Nr. 61 S. 221 keine derselben schneiden darf. Noch mehr Bedingungen müssten erfüllt werden, wenn auch die Mittelkraft des 3. Paares $S_{32}\ S_{23}$ nicht durch S ginge. Es kann daher allgemein behauptet werden: Zerlegt man die auf 3 Ebenen durch einen Punkt O beanspruchten Materials wirkenden Kräfte, nach den Richtungen der Schnitte dieser drei Ebenen, so verhalten sich je zwei der in verschiedenen Ebenen wirkenden Kräfte, welche mit der Schnittlinie dieser zwei Ebenen nicht parallel laufen, umgekehrt wie die Sinus der in diesen Ebenen liegenden Axenwinkel.

Der Symmetrie wegen setzen wir auch die auf die Einheit einer Fläche wirkende Kraft $= \frac{\varrho_1}{\omega'_1}$, so dass alle ϱ und σ mit dem halben Producte der die Fläche begrenzenden Axenabschnitte zu multipliciren sind, um die ganzen auf die Fläche wirkenden Kräfte R und S zu erhalten.

Ist die auf eine Ebene $A\ O\ B$ (Fig. 196) wirkende Kraft $\frac{\varrho_3}{\omega'_3}$ pro Flächeneinheit in Richtung und Grösse gegeben und nimmt man zwei weitere Ebenen durch O so an, dass ihr Schnitt $O\ C$ mit $\frac{\varrho_3}{\omega'_3}$ parallel läuft, so wird, wenn man die Zerlegung der Kräfte nach der Richtung der drei Schnitte $O)\ ABC$ vornimmt, sowohl $\frac{\sigma_{31}}{\omega'_1}$ und $\frac{\sigma_{32}}{\omega'_2}$, als auch $\frac{\sigma_{13}}{\omega'_3}$ und $\frac{\sigma_{23}}{\omega'_3}$ gleich 0, weil $\frac{\varrho_3}{\omega'_3}$ bereits schon die Richtung $O\ C$ hat. Die auf $B\ O\ C$ und $C\ O\ A$ wirkenden Kräfte $\frac{\varrho_1}{\omega'_1}$, $\frac{\sigma_{21}}{\omega'_1}$ und $\frac{\varrho_2}{\omega'_2}$, $\frac{\sigma_{12}}{\omega'_2}$ laufen daher mit $A\ O\ B$ parallel;

sie würden in $A\,O\,B$ hineinfallen, wenn man sie von O als von dem Mittelpunkte eines Strahlenbündels aus auftrüge. Man darf daher die Stellung einer Ebene und die Richtung der auf sie wirkenden Kraft conjugirt nennen. Geht eine Ebene A durch die Richtung einer Kraft b, so liegt auch die Richtung der auf A wirkenden Kraft a in der b conjugirten Ebene B und die Ebene $ab = C$ ist dem Schnitt $AB = c$ conjugirt. In einem solchen Dreikant ist also jede Ebene der gegenüberliegenden Kante und jede Kante der gegenüberliegenden Ebene conjugirt; sie bilden ein Tripel conjugirter Elemente.

Um die Beziehungen zwischen conjugirten Ebenen und den auf sie wirkenden Kräften zu studiren, gehen wir von einem solchen Tripel conjugirter Elemente aus. Wir setzen alle S_{ik} (Fig. 196) gleich 0 und tragen, von O ausgehend, die nunmehr allein vorhandenen Kräfte $R_1\ R_2\ R_3$ als Zug auf und projiciren das ganze Tetraeder sammt dem Kräftezug aus dem unendlich fernen Punkte von $B\,C$ auf eine Ebene, die auf dieser Linie senkrecht steht. Die Projection wird identisch mit Fig. 193 S. 525, und wenn man die Ebene $A\,B\,C$ um die Linie $B\,C$ dreht, so wird der Kräftezug identisch mit den Figuren 194 und 195, wenn dort $\sigma_1 = 0$ gesetzt wird. Denn R_1 bleibt constant, wie dort ϱ_1, weil die Fläche $A\,B\,C$ bei der Drehung sich nicht ändert, die Richtung der Mittelkraft von $R_2\ R_3$ bleibt unverändert, weil das Verhältniss der Flächen $A\,O\,B$ und $A\,O\,C$ es bleibt, und ihre Grösse ändert sich proportional der Kantenlänge $O\,A$, weil beide Flächen dieser allein sich ändernden Länge proportional sind. Endlich ist, wie dort, die Fläche $A\,B\,C$, auf welche sich die Mittelkraft $R_1\ R_2\ R_3$ vertheilt, der Länge des Schnittes, der Höhe des Dreiecks $A\,B\,C$ proportional. Wir dürfen daher alle in Nr. 125 und 126 gefundenen Sätze auf die Projection auf eine Normalebene zur Drehungskante $B\,C$ anwenden. Dreht sich also eine Schnittebene um eine feste Axe, so bewegt sich die auf dieselbe wirkende Kraft in der Ebene, welche vom Ursprung O aus die Mittelkraft von $R_2\ R_3$ projicirt und die der Richtung $B\,C$ conjugirt ist. Die Projection der Kraft auf die Normalebene, mithin auch die Kraft selbst beschreibt mit der Schnittebene einen involutorischen Strahlenbüschel. Der Endpunkt der Kraft liegt auf einem elliptischen Projectionscylinder,

ist mithin selbst eine Ellipse; senkrecht aufeinander stehenden Schnittebenen entsprechen conjugirte Halbdurchmesser dieser Ellipse als Kräfte. Hat die Involution der Schnittebene und der Kräfte Doppelelemente, so bilden diese wohl noch im senkrechten Schnitte gleiche Winkel mit den Axen der projicirten Ellipse, allein nicht mehr mit den Axen der Kräfteellipse: weil die Projectionen gleicher Winkel auf sich schneidende Ebenen sich nicht mehr gleich bleiben und die Axen der beiden Ellipsen nicht mehr in der gleichen Projectionsebene liegen, diese scheerenden Kräfte sind eben deshalb auch nicht mehr gleich gross; dieses Verhältniss allein kann also vom senkrechten Schnitt nicht auf den schiefen übertragen werden.

Ueber die Richtung der Kante BC sind keine besondern Voraussetzungen gemacht worden, das Gesagte gilt daher allgemein von allen Richtungen im Raume. Lässt man insbesondere diese Drehaxen eine Ebene durchlaufen, so erhält man unendlich viele Kräfteellipsen, welche alle die der Ebene conjugirte Kraft, d. h. deren Durchmesserlänge gemein haben; da nun alle Ellipsen auch die Ebenen der Drehungsaxen in einer Ellipse schneiden, so folgt, dass alle Ellipsen auf einem Ellipsoid dem der Kräfte liegen.

Genau wie hier die Kräfteellipse zum Ellipsoid erweitert wurde, kann auch die Involution der conjugirten Elemente zum Polarsysteme im Strahlenbündel erweitert werden, nur ist die Operation nicht mehr so anschaulich, weil die greifbare Ellipse fehlt. Wir drehen eine Ebene um eine Drehaxe, dann erhalten wir in jeder derselben eine Involution, und es liegen alle Strahlen, welche der Drehungsaxe conjugirt sind, in der ihr conjugirten Ebene; wir drehen noch um zwei weitere beliebige Axen und erhalten wieder Reihen von Involutionen. Sollen nun je drei Ebenen dieser drei Strahlenbüschel, welche durch einen Strahl gehen, drei Strahlen conjugirt sein, welche in einer Ebene liegen, und noch dazu die 6 Elemente involutorisch liegen, wie auch die Drehaxen gewählt werden mögen: so kann das gleichzeitig nur dann stattfinden, wenn alle Involutionen einem involutorischen Systeme angehören, d. h. ein Polarsystem im Strahlenbündel bilden.

Dieses Polarsystem ist nicht identisch mit dem der conjugirten Durchmesser und Diametralebenen des Kräfteellipsoids; allein beide Polarsysteme haben gemeinschaftliche Hauptebenen und Systemsaxen. Denn sucht man im Strahlenbündel das Tripel con-

jugirter Ebenen, welche senkrecht aufeinander stehen und deren Schnitte die Axen des Systems sind, so sind auch diese in dem Kräfteellipsoid conjugirt, weil die Ebenen senkrecht aufeinanderstehen; sie sind also auch die Axen des Kräfteellipsoids, weil sie conjugirt und die Kanten eines rechtwinkeligen Dreikants sind.

Hat das Polarsystem einen Ordnungskegel, so sind die Winkel, welche Doppelstrahlen in irgend einer Ebene durch eine der drei Axen mit diesen bilden, gleich gross.

Wir werden in einer der nächsten Nummern nachweisen, dass die Projectionscylinder der Durchdringungscurve des Ordnungskegels mit dem Kräfteellipsoid parallel zu einer der drei Axen, Cylinder zweiter Ordnung sind.

Das bis jetzt Entwickelte fassen wir nochmals zusammen und ergänzen es mit einigen selbstverständlichen Sätzen aus den früheren Nummern.

Ist das Material in einem Punkte so in Anspruch genommen, dass sich die Inanspruchnahme ändert, wenn man in irgend einer Richtung fortschreitet, so bilden die Richtungslinien der Kräfte, welche auf ebene Schnitte durch den Punkt wirken, mit diesen Ebenen ein Polarsystem im Strahlenbündel.

Hat das Polarsystem keinen Ordnungskegel, so ist das Material nach allen Richtungen hin in gleicher Weise beansprucht, gedrückt oder gespannt.

Hat das Polarsystem einen Ordnungskegel, so ist es im Innern des Kegel in entgegengesetzter Weise, als wie ausserhalb desselben in Anspruch genommen. Für Schnitte, welche den Kegel berühren, fällt die Richtung der Kraft in die Schnittebene, d. h. das Material ist in solchen Schnitten nur scheerend in Anspruch genommen.

Trägt man von dem gegebenen Punkte aus die auf die verschiedenen Schnitte wirkenden Kräfte in Richtung und Grösse auf, so liegen die Endpunkte aller dieser Kräfte auf einem Ellipsoid, dessen Axen mit dem des Polarsystems zusammenfallen. Die grösste der drei Axen stellt die Maximalinanspruchnahme des Materials dar.

aufträgt. Letztere Länge erhält man ebenfalls durch Umklappung. Auf Taf. 15 sind die von ihrem Fuss- und Durchstosspunkte aus zu messenden Perpendikel p_a p_b p_c von (O) und O auf die Dreikantsseiten (O) A B C eingetragen. Man hätte diese Längen nur auf ihre Projectionen herunterzuschlagen, um die umgeklappten Ebenen der Dreikante zu erhalten.

Es seien ϱ_a ϱ_b ϱ_c die etwas stark ausgezogenen Projectionen der von O aus aufgetragenen Kräfte pro Flächeneinheit, welche in den Kanten (O) A B C auf die gegenüberliegenden Seiten wirken. Zur Construction der auf die Parallelebene zur Bildfläche wirkenden Kraft R denken wir uns die Bildebene parallel mit sich selbst so verschoben, dass der Flächeninhalt ihrer Basis A B C gleich 1 wird; oder mit andern Worten, wir nehmen A B C als Flächeneinheit an. Bestimmen wir nun die auf die Seitenflächen (O) A B C wirkenden Seitenkräfte R_a R_b R_c und setzen sie mittelst eines Kräftezuges zusammen, so erhalten wir die Mittelkraft R der auf A B C, die Einheit, wirkenden Kraft.

Die Flächen (O) B C und A B C verhalten sich wie die Perpendikel von den Punkten (O) und A auf die gemeinschaftliche Basis B C. Den Perpendikel p_a von (O) auf B C haben wir bereits construirt. Den Perpendikel p'_a von A auf B C greift man direct auf dem Blatt ab. Um daher die Projection der auf die Fläche (O) B C wirkenden Kraft R_a zu erhalten, hat man ϱ_a mit dem Verhältniss $p_a : p'_a$ dieser beiden Höhen zu multipliciren; diese Operation ist in dem rechten Winkel der umgeklappten Fläche ausgeführt, allein nicht ausgezogen worden, wir begnügen uns damit, zu sagen, dass R_a, ebenso R_b und R_c die Resultate dieser Verwandlungen sind. Taf. 15 wurden die Projectionen dieser Kräfte in der Reihenfolge R_c R_a R_b zur Projection der ganzen auf A B C wirkenden Kraft zusammengesetzt. Durch die Projection des Endpunktes dieses Linienzuges allein ist dieser Punkt noch nicht vollständig gegeben, wir müssen noch die Spur des Strahles bestimmen, der ihn aus O projicirt; wir schneiden, um sie zu erhalten, den Strahl durch die Spur der Ebene, welche aus (O) die letzte Kraft R_b des Kräftezuges projicirt. Diese Spur geht durch B, denn R_b läuft mit (O) B parallel. Ferner geht sie durch die Spur M_b des Strahles (O) $(R_a$ $R_b)$, diese letztere aber liegt auf der Linie A C, weil sowohl R_a als auch R_c in der Ebene (O) A C liegen; verbindet man daher M_b mit B, so schneidet sie auf dem Strahl durch den End-

punkt des Zuges dessen Spur M aus. Durch diese Spur ist die Lage des Endpunktes des Zuges vollständig bestimmt und damit auch die Kraft, welche auf die Bildebene wirkt. Hiermit ist der erste Theil der Aufgabe gelöst.

In dem Polarsystem, welches der Ordnungskegel auf der Bildebene ausschneidet, ist M der Schnittlinie einer Parallelebene zur Bildebene, d. h. der unendlich fernen Geraden conjugirt. M ist also der Mittelpunkt dieses Polarsystems, das mit dem Polardreieck ABC nun vollständig bestimmt ist. In der Linie AC ist dem Schnitt M_b, als Schnitt von MB, der unendlich ferne Punkt von AC conjugirt, er ist also der Mittelpunkt der Involution des Polarsystems in AC. Da der Punkt M_b ausserhalb AC liegt, so hat die Involution Doppelpunkte, das Polarsystem eine Ordnungscurve und der Ordnungskegel in (O) ist reell. Man erhält die Ordnungspunkte, indem man die Tangentenlängen von M_b an einen durch AC gehenden Kreis auf AC herunterschlägt; sie bestimmen die zwei Schnittpunkte der Ordnungscurve s mit AC. Die Verbindungslinien dieser Doppelpunkte mit B berühren s in diesen Doppelpunkten. Zieht man durch den einen dieser beiden Punkte eine Parallele zur Tangente an den andern, so schneiden alle Strahlen, welche von B aus Punkte der Parallelen zur Tangente projiciren, die vom Doppelpunkte gleich weit entfernt sind, conjugirte Punkte auf AC aus. Dieselben Operationen sind auch auf B auszuführen, allein der Punkt M_a fällt nicht mehr auf das Blatt; bei der Construction lag er noch auf dem Brett, so dass mittelst desselben der Schnittpunkt von s mit AB und die durch A gehende Tangente von s in diesem Punkte erhalten werden konnten; der andere Doppelpunkt lag weit ausserhalb des Brettes. M_c fällt zwischen A und B, die Involution auf AB hat demnach keine Ordnungspunkte und ist die Seite des Polardreiecks, welche ausserhalb der Curve s liegt. Ein Halbkreis über AB schneidet die Ordinate von M_c in dem auf dem Blatt mit J_c bezeichneten Punkte, von dem aus conjugirte Punkte von AB durch die Schenkel eines rechten Winkels projicirt werden. Die Durchmesserinvolution von M ist auch gegeben, jedem Strahl oder Durchmesser der unendlich fernen Punkte der Dreiecksseiten ABC sind die Strahlen nach den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks conjugirt. Mittelst dieser 3 Paare Strahlen lassen sich die Asymptoten von s direct construiren. Wir haben jetzt viel mehr Daten als wir brauchen, um s zu zeichnen.

Jeder Schnittebene des Bündels (O), welche eine Linie der Bildebene projicirt, entspricht der Strahl, welcher den Pol dieser Linie projicirt, als Richtungslinie der auf die Schnittebene wirkenden Kraft. Die so conjugirten Elemente können entweder mittelst der Curve s, oder mittelst der drei Involutionen in ABC construirt werden. Letzteres muss immer geschehen, wenn keine Ordnungscurve s vorhanden ist.

Zur Bestimmung der Axen dieses Polarsystems, wird genau so verfahren, wie es in Prof. *Fiedler's* darstellender Geometrie, Nr. 97 S. 354 „Die Axenscheitel etc. der Flächen 2. Ordnung" beschrieben, und an einem Beispiel erläutert ist. Man bestimmt zu jedem Strahl der Ebene $(O)AB$ denjenigen conjugirten Strahl, der auf jenem Strahle senkrecht steht; der Ort aller dieser Durchmesser, der ein Kegel zweiter Ordnung ist, muss die drei Axen enthalten, sie sind die rechtwinkelig conjugirten Strahlen der Strahlen der Ebene $(O)AB$, in welchen diese von den Hauptschnitten geschnitten wird. In gleicher Weise geben die Strahlen der Ebene $(O)AC$ einen Kegel, der ebenfalls die Axen enthält. Die beiden Kegelflächen schneiden sich in dem Strahl, der dem gemeinschaftlichen Strahl $(O)A$ conjugirt ist, also jedenfalls in mindestens noch einem Strahl, im vorliegenden Fall aber in noch drei Strahlen, welche die gesuchten Axen sind. Diese hier angedeuteten Operationen wurden wie folgt in der Bildebene ausgeführt.

Es seien zuerst die den beiden conjugirten Strahlen $(O)A$ und B senkrecht conjugirten zu bestimmen. Dem Strahl $(O)B$ ist die Ebene $(O)AC$ conjugirt, demnach liegt die Spur des gesuchten Strahles auf AC, und dann auf der Spur einer Normalebene zu $(O)B$ durch (O), diese Normalebene enthält immer den Perpendikel durch (O) auf $(O)AB$, und die Spur geht daher auch durch dessen Spur V, die man dadurch erhalten hat, dass man die auf dem Bild und auf AB normale Ebene durch (O) OV, die den Perpendikel p_c enthält, in die Bildebene niedergeklappt hat, und im Endpunkt von p_c einen Perpendikel errichtete, der die Projection von p_c in V schnitt; da die Spur ferner auf OB senkrecht stehen muss, so ist sie vollständig bestimmt, sie schneidet auf AC den Punkt v_b der zu construirenden Curve v aus. Ebenso erhält man die Spur uv, des $(O)A$ entsprechenden Strahles als Schnitt von CB mit dem auf OA senkrechten Strahl von UV. Zwei weitere conjugirte Punkte sind der unendlich ferne von AB, und der Mittel-

punkt der Involution M_c. Der Parallelstrahl zu AB durch C und der auf OM_c senkrechte Strahl durch V, schneiden sich im Punkt v_∞; ebenso der Strahl CM_cM und der Perpendikel VO im Punkt v_m. Die Curve v der so bestimmten Punkte ist ein Kegelschnitt, weil die Strahlen von V senkrecht auf denen von O stehen, und die Strahlen von O und C projectivisch sind, indem sie conjugirte Punkte auf AB projiciren, also V und C auch projectivisch sind. Die Punkte V und C liegen daher auch auf der Curve. Jedes Paar conjugirter Punkte von AB giebt zwei weitere Punkte von v; in Fällen aber wie in vorliegenden, wo O sehr nahe bei AB liegt, und daher die bisweilen langen Strahlen von U nicht genau gezogen werden können, ist es vortheilhafter, die bisher bestimmten Punkte, welche meistens auf Linien liegen, die durch die Aufgabe selbst in grosser Länge gegeben sind, dazu zu benützen, um den Kegelschnitt mittelst projectivischen Punktreihen zu ergänzen.

Die den conjugirten Punkten der Linie AC entsprechende Curve u, geht durch die in gleicher Weise construirten Punkte $BU\,u_c\,(u\,v)\,u_m\,u_\infty$ von denen der Punkt $u\,v$ auch der Curve v angehört. Die beiden Curven u und v schneiden sich ausser diesem Punkte noch in XYZ, welche die Spuren der Axen sind. Von denselben bezeichnen wir die Spur, welche in die Ordnungshyperbel fällt mit Z, es werden daher XZ und YZ von der Hyperbel geschnitten, XY dagegen nicht. O muss der Schnittpunkt der Höhenperpendikel des Dreiecks XYZ sein.

Die Ordnungscurve der Schnitte und Kräfte erzeugt in jeder Seite des Dreiecks XYZ eine Involution. In der Involution in XY sind zunächst diese zwei Punkte selbst conjugirt, und der Schnitt der Verbindungslinie eines jeden der ausser XYZ noch vorhandenen Pole $ABCM$ und dem Pol Z mit XY ist dem Schnitt einer jeden Polare mit XY conjugirt. Insbesondere schneidet MZ den Mittelpunkt der Involution auf XY aus. Senkrecht über diesem Mittelpunkt in J_3 schneiden sich alle Halbkreise, welche über zwei conjugirten Punkten beschrieben werden, so dass von J_3 je zwei solcher Punkte unter einem rechten Winkel projicirt werden.

In gleicher Weise können die Involutionen mit Doppelpunkten in den beiden übrigen Seiten XZ und YZ construirt werden; noch einfacher erhält man diese vier Doppelpunkte direct als

Schnitte der Ordnungshyperbel mit den Seiten. Die Tangenten an die Schnittpunkte gehen durch die gegenüberliegenden Pole.

Um die Hauptschnitte des Kräfteellipsoids zu erhalten, klappen wir ihre Ebenen $X(O)\,Y$, $Y(O)\,Z$, $Z(O)\,X$ in die Bildebene nieder, wobei der Punkt (O) nach $O_x\,O_y\,O_z$ fällt. Die Verbindungen dieser Punkte mit $X\,Y\,Z$ sind die Hauptaxen der Schnittellipsen; die Verbindungslinien mit den Ordnungspunkten der Involutionen sind die Ordnungsstrahlen der Involution der Kräfte und Schnitte. Einer der beiden imaginären Ordnungsstrahlen in der Ebene $X(O)\,Y$ wurde nach Nr. 126 S. 522 als conjugirter Strahl O_z (45^0) des Axenhalbirungswinkels O_z 45^0, erhalten, 45^0 und (45^0) wurden auf $X\,Y$ markirt; vom Punkt J_3 werden sie durch zwei senkrecht auf einanderstehende Strahlen projicirt.

Zur Bestimmung der Axenlängen haben wir die eine der drei in den Axen wirkenden Kräfte ϱ'_z willkürlich angenommen und von O_x und O_y gegen Z hin aufgetragen, an den Endpunkten der ϱ'_z zwei Perpendikel bis zu den Schnitten mit den Ordnungsstrahlen errichtet, und durch diese Schnitte und die Punkte O_x und O_y Kreise gelegt. Vergleicht man diese Kreise mit Fig. 194, so sieht man sofort, dass sie mit den Kreisen dieser Figur übereinstimmen, wenn der Punkt S am Endpunkt des Durchmessers $C\,O$ angenommen wird. ϱ'_z und die Senkrechte an dessen Endpunkt Taf. 15, sind die Coordinatenaxen für die auf und in Schnitten wirkenden Kräfte. Die Ergänzungsstücke von ϱ'_z zu den Durchmessern sind demnach die Axenlängen ϱ'_x und ϱ'_y, wie das auch in der Zeichnung bemerkt ist. Mittelst dieser Axenlängen kann jetzt auch die Ellipse in der umgeklappten Ebene $X\,O_z\,Y$ construirt werden. Die Diagonalen des dieser Ellipse umschriebenen Axenrechtecks, müssen mit den schon oben construirten imaginären Doppelstrahlen zusammenfallen, was in der Zeichnung für einen derselben O_z (45^0) angedeutet ist. Auch hier wurde der Fig. 195 analoge Kreis eingezeichnet. Dieser über der Differenz $\varrho'_x - \varrho'_y$ beschriebene Kreis ist jedoch so klein ausgefallen, dass er nur zur Uebersicht der Verhältnisse, und nicht zum Construiren dienen kann. Auf der Zeichnung Taf. 15 sind der Endpunkt von ϱ'_y und dessen Ellipsentangenten die Coordinatenaxen für Kräfte in und auf Schnitte. Die Entfernung dieses Endpunktes vom entfernten Kreisdurchmesserende ist gleich ϱ'_y. Der Pol J des Ursprungs, die Zeichnung enthält dessen Construction, ist das Involutions-

centrum der Schnitte und Kräfte, er entspricht dem Punkt C der Figur 195 S. 526. Auf der Zeichnung Taf. 15 wurde noch gezeigt, dass die Punkte, welche die imaginären Doppelstrahlen und die Halbirungslinien des Axenwinkels ausschneiden, mit J auf einer geraden Linie liegen; die Halbirungslinien gehen durch die Endpunkte des auf ϱ'_y senkrechten Kreisdurchmessers.

Mittelst der Axenlängen können wir die Länge irgend eines Strahles von O bestimmen. Wir führen diese Bestimmung vor allen für die drei Strahlen $\varrho_a\ \varrho_b\ \varrho_c$, aus. Die Ebene $B(O)Z$, welche ϱ_b aus der Axe z projicirt, klappen wir in die Bildebene um; B_z ist der Fusspunkt des Perpendikels von (O) auf den Schnitt BZ. Wird auf der Senkrechten von O auf diese Linie $B_z\ O_{bz}$ gleich der Entfernung $(O)B_z$ gemacht, so ist O_{bz} der Punkt, auf welchen (O) nach dem Umklappen fällt. Die Axen des umgeklappten Ellipsoidenschnittes sind gegen Z und Z_b den Schnitt von BZ mit XY gerichtet; die Länge der ersteren ist gleich ϱ'_z und die der zweiten gleich ϱ'_{bz}, gleich dem halben Ellipsendurchmesser von $O_z\ Z_b$, welcher in der Ebene XO_zY leicht mittelst der Axen ϱ'_x und ϱ'_y ohne vorerst die Ellipse selbst zu zeichnen, bestimmt werden konnte. Von O_{bz} aus wurde nun mittelst zweier Kreise, die mit diesen ϱ'_z und ϱ_{bz} als Radien beschrieben wurden, die Länge des gegen B gerichteten Strahles ϱ'_b construirt. In gleicher Weise wurde die Ebene $A\ (O)\ Y$ um $A\ Y_a\ A_y\ Y$ gedreht und ϱ'_a bei O_{ay}, endlich die Ebene $C\ (O)\ Y$ um $C\ Y_c\ C_y\ Y$ gedreht und ϱ'_c bei O_{cy} construirt.

Wurde genau und richtig gearbeitet, so werden, wegen willkürlicher Annahme von ϱ'_z die so erhaltenen $\varrho'_a\ \varrho'_b\ \varrho'_c$ nicht gleich, wohl aber proportional den ursprünglichen, durch ihre Projection gegebenen $\varrho'_a\ \varrho'_b\ \varrho'_c$ sein. D. h. projicirt man parallel zu $O)\ O_{ay}\ O_{bz}\ O_{cy}$ die erhaltenen Axenendpunkte $\varrho'_a\ \varrho'_b\ \varrho'_c$ auf ihre Projectionen $(O)\ABC$ und verbindet ihre Endpunkte durch Linien, so müssen diese Linien parallel laufen mit den Verbindungslinien der ursprünglich gegebenen $\varrho_a\ \varrho_b\ \varrho_c$. Trifft das zu, so kann man auch die angenommenen $\varrho'_x\ \varrho'_y\ \varrho'_z$ auf $(O)\ X\ Y\ Z$ projiciren, und durch Parallellinien die wahren Längen von $\varrho_x\ \varrho_y\ \varrho_z$ bestimmen. Mit diesen werden die Ellipsen der Hauptschnitte gezeichnet. Diese Art Regula falsa wurde auf der Zeichnung nicht ausgeführt, sondern die $\varrho'_a\ \varrho'_b\ \varrho'_c$ mit den wahren Axenlängen construirt.

Die Endpunkte der Axen wurden in die Bildebene nach

$\varrho_x\ \varrho_y\ \varrho_z$ projicirt, dann mit den drei Axenlängen in den drei umgelegten Hauptschnitten die Ellipsen derselben gezeichnet, und damit ist der Zweck der Aufgabe erfüllt; man sieht: in der Richtung $(O)\ X$ findet die grösste Inanspruchnahme des Materials ausserhalb des Ordnungskegels mit ϱ_x statt, im Ordnungskegel, nach der Richtung $(O)\ Z$ mit ϱ_z. Die Richtung der auf eine beliebige Ebene wirkenden Kraft erhält man durch den Pol ihres Schnittes mit der Bildebene in Bezug auf die Ordnungshyperbel, und ihre Grösse durch Umklappung, genau wie ϱ_{abc} erhalten wurden. Um jedoch alle diese Verhältnisse klarer darzustellen, wurden noch das Ellipsoid, dessen Schnitte mit den der Ebenen der beiden Dreikante $A\ B\ C$, $X\ Y\ Z$ und dem Ordnungskegel construirt, endlich wurde noch die auf der Bildfläche normale Ebene durch X und durch den Pol der Bildebene umgeklappt.

Der das Ellipsoid projicirende Cylinder berührt es in der dem Durchmesser $O\ (O)$ conjugirten Diametralebene. Den drei Diametralebenen $(O)\ O)\ X\ Y\ Z$, welche je durch eine Axe gehen und den Strahl $(O)\ O$ enthalten, entsprechen die drei Strahlen $e'_x\ e'_y\ e'_z$ welche in einem Hauptschnitt liegen, den Durchmessern $(O)\ O_x\ O_y O_z$ conjugirt sind, und die Bildebene in $E_x\ E_y\ E_z$ durchstossen, in der $O\ (O)$ conjugirten Ebene liegen, und deren Schnitt mit der Bildebene demnach die Verbindungslinie E dieser Punkte ist. Man erhält die Projectionen der Endpunkte von $e'_x\ e'_y\ e'_z$ in $e_x\ e_y\ e_z$ auf den Strahlen $O)\ E_x\ E_y\ E_z$. In diesen Endpunkten wird das Ellipsoid von Parallelebenen zu $(O)\ O)\ X\ Y\ Z$ berührt, demnach laufen auch die Tangenten der Projectionsellipse in $e_x\ e_y\ e_z$ parallel mit $O)\ X\ Y\ Z$. Wir haben jetzt 6 auf drei Durchmessern liegende Punkte der Projectionsellipse mit ihren Tangenten, was mehr als hinreicht, um sie zu zeichnen.

Die Projection eines jeden Diametralschnittes berührt die Projection des Ellipsoids in dem Strahl oder Durchmesser von O, welcher durch den Schnitt der Spur der Diametralebene mit E geht; es werden daher alle Parallellinien zu den gemeinschaftlichen Tangenten an den Enden dieser Durchmesser in proportionale Theile durch die beiden Ellipsen getheilt. Diese Eigenschaft haben wir benützt um die 6 Ellipsen in den Schnitten $(O)\ X\ Y\ Z$ und $(O)\ A\ B\ C$ zu zeichnen. Jede der drei Ellipsen in $(O)\ X\ Y\ Z$ geht durch zwei der drei Punkte $\varrho_x\ \varrho_y\ \varrho_z$ und berührt die Projection des Ellipsoids in den Endpunkten der Durchmesser $e_x\ e_y\ e_z$.

Da die Tangenten an den Endpunkten parallel zu O) $X\ Y\ Z$ laufen, so wurden zunächst zwei Parallele zu dieser Linie durch die beiden der Punkte $\varrho_x\ \varrho_y\ \varrho_z$, durch welche die Ellipse gehen soll, gezogen, dann das Reductionsverhältniss der Abschnitte zwischen den beiden Ellipsen und dem Durchmesser ermittelt und endlich eine Reihe weiterer Ordinaten nach demselben Verhältniss reducirt. Bei der Construction der drei Ellipsen in den Schnitten (O) $A\ B\ C$ wurde gerade so verfahren, nur mussten die gemeinschaftlichen Tangenten an den Berührungspunkten erst gezeichnet werden, weil sie von vorn herein noch nicht vorhanden waren.

Um beliebige Ebenen durch $(O)\ O$ leicht umlegen zu können, sollte man die Länge des in dieser Linie liegenden Ellipsoidenstrahles ϱ'_o kennen, wir erhalten ihn durch Umklappen der Ebene $(O)\ O\ Z$ genau wie weiter oben $\varrho'_a\ \varrho'_b\ \varrho'_c$ erhalten wurden. ϱ'_{oz} wurde in dem Hauptschnitt $O_z\ Y\ X$ construirt, dann $(O)\ O\ Z$ umgeklappt, wobei wie sich von selbst versteht O_o auf den Distanzkreis r fällt, und dort wurde mit Hülfe von ϱ_z und ϱ_{oz}, die gesuchte Länge ϱ_o bestimmt. In allen Schnitten durch $(O)\ O$ ist dieser Halbdurchmesser dem Durchmesser in der Ebene E conjugirt, weil diese Ebene dem Strahl $(O)\ O$ conjugirt ist.

Mittelst dieser beiden conjugirten Durchmesser kann man alle durch $(O)\ O$ gehenden Ellipsen zeichnen, ohne auf die Hauptschnitte zurückzugreifen. Wir wollen nach dieser kürzern Methode die Ebene umklappen, welche den der Bildebene conjugirten Durchmesser, also den höchsten und tiefsten Punkt des Ellipsoids bezüglich der Bildebene enthält.

Dieser Durchmesser geht durch den Pol ∞ der unendlichfernen Geraden der Bildebene, bezüglich des Polarsystem das durch das Ellipsoid erzeugt wird. Er liegt in dem Durchschnitt der drei Linien, welche X, Y, Z mit den Mittelpunkten $M_x\ M_y\ M_z$ der Involutionen in den gegenüberliegenden Seiten verbinden. (O) fällt bei dem Umklappen nach O_∞ auf den Schnitt einer Senkrechten zu $O\infty$ mit dem Distanzkreis, auf derselben Senkrechten wurde abwärts gegen O, ϱ_o aufgetragen. Die Verbindungslinie von O_∞ mit dem Schnitt der Spur $O\ \infty$ und E_∞ ist der ϱ_o conjugirte Durchmesser, die Endpunkte desselben liegen vertical über den Endpunkten des Durchmessers $O\ \infty$ der Projection des Ellipsoids. Mittelst dieser beiden conjugirten Durchmesser kann die Ellipse gezeichnet werden. Der höchste und der tiefste Punkt liegt auf

der Linie $O_\infty \infty$ und ist dem Durchmesser parallel zur Bildebene oder parallel zu $O\infty$ conjugirt. Dieser letzte Durchmesser ist als Theil des Parallelschnittes zur Bildebene dem zu E parallelen Durchmesser der Projection des Ellipsoids conjugirt. Wir mochten diese Ellipse nicht einzeichnen, weil wir deren schon zu viele auf dem Ellipsoid haben. Wenn die Hauptschnitte die Form des Ellipsoids am klarsten zur Anschauung bringen, so macht die zuletzt gezeichnete Ellipse dessen Stellung zur Bildebene am deutlichsten.

Sehr viel zur Deutlichkeit trägt auch der eingezeichnete Ellipsenschnitt der Bildebene mit dem Ellipsoid bei. Von demselben sind der Mittelpunkt ∞ und ausserdem je zwei Schnittpunkte mit den Ebenen (O) AB, BC, XY, XZ, $O\infty$ im Ganzen also 10 Punkte oder mit Hülfe des Mittelpunktes 20 Punkte bekannt, so dass er sehr scharf gezeichnet werden kann.

Ausser dieser Ellipse wurde auch noch der Schnitt der Dreikantseiten und des Ordnungskegels mit der Bildebene eingezeichnet. Denkt man sich die Bildebene horizontal, und den unter ihr liegenden Theil des Ellipsoids mit Wasser angefüllt, so entstehen zwei kleine Seen, welche von der Ellipse und einerseits von der Hyperbel, andrerseits von den Dreikantschnitten begrenzt sind. Die vorhin gezeichnete Ellipse durch die Verticalebene $O\infty$ stellt einen Querschnitt durch den tiefsten Punkt des Sackes dar; dieser tiefste Punkt wurde durch einen stärkeren Punkt markirt.

Es bleibt uns jetzt noch die Durchdringungscurve des Ordnungskegels und des Ellipsoids zu zeichnen. Beide Flächen zerfallen innerhalb der acht durch die Hauptschnitte gebildeten Dreikante in ebenso viele vollkommen gleiche, congruente oder symmetrische Theile, daher wird auch die Durchdringungscurve aus acht solchen Stücken bestehen müssen; und wegen dieser Symmetrie und Congruenz wird auch die Curve aus dem unendlich fernen Punkt jeder Axe so auf den conjugirten Hauptschnitt projicirt, dass auf jedem Projectionsstrahl zwei Punkte liegen. Da nun die Durchdringungscurve eine Curve vierter Ordnung ist, und jeder Kegel der eine solche Curve so projicirt, dass je zwei Punkte der Curve auf jedem seiner Strahlen liegen, ein Kegel zweiter Ordnung ist, so sind die Projectionen auf die Hauptschnitte Kegelschnitte. Wegen der eben hervorgehobenen Symmetrie

müssen auch die Axen $\varrho'_x \varrho'_y \varrho'_z$ in den Hauptschnitten die Axen dieser Kegelschnitte sein. Da die Spitze des Ordnungskegels im Innern des Ellipsoids liegt, so muss die Curve in zwei vollkommen getrennt geschlossene, gewundene Ringe zerfallen, durch deren Mitte die Axe $O\,Z$ geht. Die beiden Ringe projiciren sich auf die Ebene $X\,O_z\,Y$ als ganze Ellipse. Die Axenlängen $O_z\,1 = O_z\,5$ ergeben sich als die Ordinaten der Schnitte der beiden Ordnungsstrahlen mit der Projectionsellipse in $X\,O_y\,Z$ wo sie direct abgegriffen werden können; in $Y\,O_x\,Z$ fallen die Projectionen auf die Axe $O_z\,Z$. Die Axenlängen $O_z\,3 = O_z\,7$ ergeben sich in gleicher Weise als die Ordinaten y der Schnitte der beiden Ordnungsstrahlen mit der Projectionsellipse in $Y\,O_x\,Z$; in $X\,O_y\,Z$ fallen die Projectionen auf die Axe $O_y\,Z$. Von der Ellipse O_z sind jetzt die zwei Axen, von der Hyperbel O_y eine Axe O_y (3 7) und die beiden Punkte 1 und 5, von der Ellipse O_x ebenfalls die Axe O_x (1 5) und die zwei Punkte 3 7, die drei Kegelschnitte können daher gezeichnet werden.

Zusammengehörige Projectionen desselben Punktes können leicht gefunden werden; nimmt man z. B. in $X\,O_z\,Y$ den Punkt 2 beliebig an, so bestimmt das x_2 desselben in $X\,O_y\,Z$ und das y_2 in $Y\,O_x\,Z$ einen Punkt auf jedem der beiden Ringe, welche gleiche z_2 haben, wodurch auch die beiden andern Projectionen der zwei Punkte bestimmt sind, welche über 2 in $X\,O_z\,Y$ liegen. Wird von den Zeichen abstrahirt und irgend eine Ordinate angenommen, so findet sich in jedem der acht Coordinatendreikante ein Punkt dieser Ordinate; wegen der oben erwähnten Congruenz und Symmetrie der Curvenstöcke in jedem der Dreikante, bilden die Projectionen dieser zwei mal vier Punkte 2 4 6 8, Rechtecke in jedem Hauptschnitt, die eingezeichnet sind so weit sie auf das Blatt fallen; im Raum bilden sie das rechteckige Parallelepipedon 2 4 6 8 2′ 4′ 6′ 8′.

Die Projectionen der Curvenpunkte auf die Bildebene ergeben sich sehr genau aus dem Schnitt der drei Projectionslinien parallel zu $O)\,X\,Y\,Z$ aus jedem Hauptschnitt. Die Projectionslinien der geraden Punkte wurden als Seiten des Parallelepipedons gestricht. Ausserdem liegen noch die Punkte 1 5 auf einem Projectionsstrahl parallel zu $O\,X$, und die Punkte 3 7 auf einem solchen parallel zu $O\,Y$. Besondere Punkte, die für das Zeichnen der Curve sich sehr nützlich zeigen, sind die zwölf Punkte auf den sechs Projections-

strahlen, von denen je zwei eine Projection der Curve auf die Hauptschnitte berühren; im Bild projicirt die Curve dieselben Strahlen, so dass wir nicht allein diese Punkte, sondern auch ihre Tangenten erhalten. Einige dieser Punkte sind eingezeichnet, ihre Construction weicht nicht von der allgemeinen ab.

Zu den besondern Punkten gehören auch die vier Punkte, in welchen die Curve die Projection des Ellipsoids berührt, sie liegen auf den zwei Strahlen von O nach den Schnitten der Ordnungshyperbel mit der Linie E. Ferner die vier Punkte auf den Tangenten von O an die Ordnungshyperbel, indem diese Tangenten in diesen Punkten auch Tangenten der Durchdringungscurve sind, von diesen konnte nur der zwischen 3 und 4 angedeutet werden, weil der zwischen 7 und 8 mit dem Strahl des Kegels in der Ebene (O) A C zusammenfällt. Um im Allgemeinen den Punkt der Durchdringungscurve auf einen Strahl des Ordnungskegels zu erhalten, der durch seine Spur auf der Hyperbel s gegeben ist, hat man die gegebene Spur aus X, Y, Z auf die gegenüberliegenden Seiten von X Y Z zu projiciren, und diese Punkte mit O_{xy_s} zu verbinden, dann sind diese Verbindungslinien die Projectionen des gegebenen Strahles auf die Hauptschnitte, und schneiden daher auf den Projectionen der Durchdringungscurve den gesuchten Punkt aus. In der Zeichnung wurde diese Construction nicht angegeben, weil die eine der Spuren der Tangenten weit über die Grenzen des Blattes fällt, und die andere zwischen den Punkten 1 8, wegen der Nähe dieser Punkte nicht mehr deutlich gezeichnet werden konnte. Ist einmal die Curve gezeichnet, so ist die Strecke eines jeden Strahles durch O die Projection der Strecke des entsprechenden Strahles durch (O) zwischen der Bildebene und dem Ellipsoid. Projicirt man insbesondere die acht Punkte 2 4 6 8 2′ 4′ 6′ 8′ des Parallelepipedons aus (O) auf die Hyperbel, so liegen je zwei gegenüberliegende Punkte 2′6′, 4′8′, 6′2′, 8′4′ auf einem Strahl von (O), so dass nur 4 Hyperbelpunkte 2″ 4″ 6″ 8″ ausgeschnitten werden. Die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender dieser Punkte gehen durch einen der Punkte X Y Z; denn diese Verbindungslinien können als Schnitte von Ebenen durch zwei gegenüberliegende parallele Kanten des Parallelepipedons betrachtet werden, welche auch die Axe mit der die Kanten parallel laufen, enthalten. Von diesen vier Punkten fallen nur 2″ und 8″ auf das Blatt, ihre Verbindungslinie geht durch Y.

Da das eben Gesagte auch umgekehrt werden kann so folgt, dass jedes der Hyperbel einbeschriebene Viereck, dessen Poldreieck mit $X\ Y\ Z$ zusammenfällt, als die Projectionen von acht symmetrisch gelegenen Punkten der Durchdringungscurve betrachtet werden kann.

131. Bestimmungsweisen des Systems der Schnitte und Kräfte, Zug- und Druckcurven in Körpern.

In der vorigen Nummer haben wir angenommen, es seien drei den gegenüberliegenden Seiten conjugirten Kanten eines Dreikants gegeben und mittelst dieser die Inanspruchnahme des Materials in der Spitze des Dreikants darzustellen. Es ist das der allgemeinere Fall, weil die drei Kräfte in den Kanten ganz beliebig gewählt werden können; es ist auch einer der instructivsten Fälle, weil erst durch Zusammensetzung der Kräfte das Polarsystem der Kräfte und Schnitte bestimmt werden konnte. Allein so bietet sich der Fall in der Praxis nicht dar, sondern es werden beliebige Schnitte und die dazu gehörigen Kräfte gegeben und nun das Ellipsoid zu construiren sein. Wir wollen daher hier zeigen, wie die verschiedenen möglichen Fälle auf den auf Blatt 15 behandelten zurückgeführt werden können.

Wir schicken voraus, dass durch das Polarsystem der Kräfte und Schnitte auch die Verhältnisse der Dimensionen des Ellipsoids gegeben sind, es darf dann nur noch eine Kraft willkürlich der Grösse nach angenommen werden, um die absoluten Dimensionen des Ellipsoids zu fixiren.

Es seien drei Ebenen als Schnitte gegeben, dann dürfen die Richtungen der auf sie wirkenden drei Kräfte nicht willkürlich angenommen werden, sondern es müssen um ein Polarsystem zu bestimmen, das Dreikant der Ebenen, und das der Kräfte perspectivisch liegen. Es seien $A\ B\ C$ die Ebenen im Strahlenbündel, dann können die Richtungen von a und b die auf A und B wirken, ganz willkürlich angenommen werden, die Richtung der auf C wirkenden Kraft c muss so gewählt werden, dass die Ebenen $a\ (B\ C)$, $b\ (C\ A)$ und $c\ (A\ B)$ sich in einem Strahle S des Bündels schneiden, oder was dasselbe ist so, dass die Schnittlinien der Ebene $(a\ b)\ C$, $(b\ c)\ A$ und $(c\ a)\ B$ in einer Ebene s liegen. Die Wahl

der Kraft c ist daher auf die Ebene s (AB) beschränkt. Wählt man sie in dieser Ebene, so bestimmen nach bekannten Gesetzen der Geometrie der Lage die vier Pole $s\ a\ b\ c$ mit den ihnen entsprechenden Polären $S\ A\ B\ C$ ein Polarsystem mit oder ohne Ordnungscurve, das gerade so bestimmt werden könnte, wie das der vorigen Nummer aus einem Polardreieck und dem Mittelpunkt des Systems. Aus dem Polarsystem ergiebt sich dann das Ellipsoid wenn noch irgend eine Dimension d. h. eine Kraft willkürlich angenommen wird. Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man die zuerst angenommene Kraft nach den Richtungen der Kanten von $A\ B\ C$ zerlegt dann die beiden übrigen Seitenkräfte so wählt, dass ihre Seitenkräfte den Bedingungen von Nr. 129 S. 537 entsprechen. Wir wollen hier nur die Identität der beiden Bestimmungsarten hervorheben, ohne näher darauf einzugehen. Der eben behandelte Fall wird übrigens der in der Praxis am häufigsten vorkommende sein.

Der folgende Fall ist nahezu identisch mit Taf. 15. Es seien zu zwei Ebenen A und B die Richtungen und auch die Grössen der auf sie wirkenden Kräfte ganz willkürlich angenommen; dann darf auch noch die im Schnitt von $A\ B = c$ wirkende Kraft als Kraft auf die Ebene $a\ b = C$ willkürlich angenommen werden. Denn nach Nr. 126 ist durch die Schnitte von A und B und die darauf wirkenden Kräfte a und b die Involution der Kräfte und Schnitte nebst der Kräfteellipse in der Ebene C vollständig bestimmt, und es lassen sich daher in derselben zwei conjugirte Ebenen A' und B' so angeben, dass a' in B' und b' in A' liegt, und a' und b' auch der Grösse nach bestimmt sind. Wird jetzt auch im Schnitt von $A'\ B' = A\ B$ die Kraft c als auf $a\ b = a'\ b'$ wirkend angenommen, so ist der Fall auf den von Taf. 15 zurückgeführt. Ist überhaupt auf die eben angegebene oder auf irgend eine andere Weise die Involution der Kräfte und Schnitte in einer Ebene eines Bündels und die auf die Ebene wirkende Kraft gegeben, so darf nur noch zu einer beliebigen zweiten Ebene die Kraft darauf so angenommen werden, dass die Ebene der beiden Kräfte durch den Strahl der ersten gegebenen Ebene gehe, welcher dem Schnitt der beiden Ebenen conjugirt ist.

Man wird wohl nie von dem Satz Gebrauch zu machen haben, dass ein Polarsystem auch durch ein Fünfkant gegeben ist, in welchem jeder Kante die gegenüberliegende Seite zugeordnet ist.

Wären für alle Punkte eines Körpers die Polarsysteme der Schnitte und Kräfte gegeben, so könnte man in ähnlicher Weise wie es Nr. 127 S. 531 für die Ebene angedeutet worden ist, auch das Wirken der Kräfte im Innern von Körpern darstellen. Von einem Punkte ausgehend seien die drei Axenrichtungen bestimmt. Ist nach einer dieser Axen das Material in entgegengesetzter Weise als wie nach der Richtung der zwei andern in Anspruch genommen, so nehmen wir auf diesen beiden Axen in endlicher aber kleiner Entfernung vier weitere Punkte an, und führen für dieselben die gleichen Axenbestimmungen aus; sie geben uns acht weitere Punkte, die nicht in der gleichen Ebene als wie die ersten vier liegen, von diesen gehen wir zu weitern 12 über u. s. f.; denkt man sich den Raum zwischen je 4 solcher Punkte durch windschiefe Flächen ausgefüllt, so ist das Resultat dieser ersten Operation: eine beliebig krumme Fläche, überzogen von einem Netz rechtwinkelig sich schneidender Trajectorien, in deren Schnittpunkten Normallinien sich erheben. Ueber und unter der Fläche können zwei weitere construirt werden u. s. f.; das Endresultat der ganzen Operation ist: Ein Bündel von Linien, die sich durch den Körper ziehn und die von normalen Schichtenflächen geschnitten werden. Nach der Richtung der Linien ist das Material in einem Sinne am stärksten in Anspruch genommen, nach allen Richtungen in der Fläche in entgegengesetzter Richtung, oder auch in gleicher, wenn die Inanspruchnahme überall die gleiche ist. In den Flächen selbst können noch durch Liniennetze die Maximal- und Minimalinanspruchnahme angedeutet werden. Würde man noch in allen Kreuzungspunkten die Grösse der in den kreuzenden Linien wirkenden Kräfte andeuten, so wäre die Inanspruchnahme des Körpers im Innern vollständig dargestellt.

Leider aber muss gesagt werden, dass diese Darstellung praktisch unausführbar sei. Die Zeichnung der vorigen Nummer hat grosse Mühe und verhältnissmässig viel Zeit gekostet, kostet auch noch viel Zeit, selbst wenn man sich auf die Bestimmung der Axenrichtung beschränkt; diese Arbeit für etwa 100 Punkte, was sehr wenige wären, auszuführen, ist eine Arbeit, die die Kräfte und Zeit, die auf irgend ein Project verwendet werden kann, weit übersteigt. Im Raum beschränkt man sich deshalb darauf, die Zug- und Druckcurven für mehrere Längenschnitte auszuführen.

132. Formeln für die, Flächen proportionalen Kräfte.

Wie in Nr. 129 bestimmen wir die auf die Ebene ABC Fig. 196 Nr. 536 wirkenden Kräfte mittelst derjenigen die auf die drei Seitenflächen AOB, BOC und COA wirken. Wir nehmen diese drei Ebenen als Coordinatenebenen an, und setzen ganz wie früher:

Die Coordinaten der Ebenen $ABC = \xi, \eta, \zeta$,
die Cosinus der Coordinatenaxenwinkel $= \omega_1\ \omega_2\ \omega_3$,
die Sinus derselben $= \omega'_1\ \omega'_2\ \omega'_3$,
die auf und in der Coordinatenebene g wirkenden Kräfte $= \frac{\varrho g}{\omega' g}\quad \frac{\sigma_{ig}}{\omega' g}$ und $\frac{\sigma_{kg}}{\omega' g}$
pro Flächeneinheit.

Die ganzen auf die Fläche g wirkenden Kräfte sind nun laut Nr. 129 S. 538.

$$R_g = \frac{\varrho g}{2\,\xi_i\,\xi_k},\quad S_{ig} = \frac{\sigma_{ig}}{2\,\xi_i\,\xi_k},\quad S_{kg} = \frac{\sigma_{kg}}{2\,\xi_i\,\xi_k};$$

worin $g\,i\,k$ irgend eine der Combinationen 1 2 3 bezeichnet und $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ mit ξ, η, ζ identisch ist.

Die zu den Coordinaten parallelen Seitenkräfte, welche auf die Fläche $F_4 = ABC$ wirken seien XYZ, und pro Flächeneinheit $x\,\iota\,\vartheta$.

Dann ist offenbar:

$$X = F_4\,x = \frac{\varrho_1}{2\,\eta\,\zeta} + \frac{\sigma_{12}}{2\,\zeta\,\xi} + \frac{\sigma_{13}}{2\,\xi\,\eta},$$

Die Fläche F_4 ergiebt sich aus:

$$4\,\xi^2\,\eta^2\,\zeta^2\,F^2_4 = -\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \xi \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \eta \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & \end{vmatrix} = \Sigma^2$$

Man hat daher:

$$\begin{aligned} \Sigma\,x &= \varrho_1\ \xi + \sigma_{12}\,\eta + \sigma_{13}\,\zeta, \\ \Sigma\,\iota &= \sigma_{21}\,\xi + \varrho_2\ \eta + \sigma_{23}\,\zeta, \\ \Sigma\,\vartheta &= \sigma_{31}\,\xi + \sigma_{32}\,\eta + \varrho_3\ \zeta. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$\delta = \begin{vmatrix} \varrho_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \varrho_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \varrho_3 \end{vmatrix},$$

und die Unterdeterminanten von δ gleich $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ so findet man aus obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial\xi &: \Sigma = \delta_{11}\varkappa + \delta_{21}\iota + \delta_{31}\vartheta, \\ \partial\eta &: \Sigma = \delta_{12}\varkappa + \delta_{22}\iota + \delta_{32}\vartheta, \\ \partial\zeta &: \Sigma = \delta_{13}\varkappa + \delta_{23}\iota + \delta_{33}\vartheta. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werthe von $\xi\,\eta\,\zeta$, in die zu ABC parallelen Ebene durch den Ursprung:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0,$$

giebt die Gleichung der der Richtung $\varkappa\,\iota\,\vartheta$ entsprechenden Ebene:

$$\begin{aligned} \delta_{11}\varkappa x + \delta_{12}(\varkappa y + \iota x) + \delta_{22}\iota y + \delta_{13}(\varkappa z + \vartheta x) + \delta_{23}(\iota z + \vartheta y) \\ + \delta_{33}\vartheta z = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist offenbar die Polargleichung des Kegels:

$$\delta_{11}x^2 + 2\,\delta_{12}xy + \delta_{22}y^2 + 2\,\delta_{13}xz + 2\,\delta_{23}yz + \delta_{33}z^2 = 0.$$

Sollen conjugirte Elemente dieser Kegelfläche senkrecht aufeinander stehen, so giebt der Vergleich der auf $x\,y\,z$ senkrechten Ebene:

$$(x + \omega_3 y + \omega_2 z)\,x' + (\omega_3 x + y + \omega_1 z)\,y' + (\omega_2 x + \omega_1 y + z)\,z' = 0$$

mit der Polargleichung:

$$\begin{aligned} (\delta_{11}x + \delta_{12}y + \delta_{13}z)x' + (\delta_{21} + \delta_{22}y + \delta_{23}z)y' + (\delta_{31}x + \delta_{32}y + \delta_{33}z)z' = 0: \\ (\delta_{11}x + \delta_{12}y + \delta_{13}z)\,\lambda = \quad x + \omega_3 y + \omega_2 z, \\ (\delta_{21}x + \delta_{22}y + \delta_{23}z)\,\lambda = \omega_3 x + \quad y + \omega_1 z, \\ (\delta_{31}x + \delta_{32}y + \delta_{33}z)\,\lambda = \omega_2 x + \omega_1 y + z; \end{aligned}$$

wenn λ eine Constante ist.

Diese drei Gleichungen können aber gleichzeitig nur dann bestehen wenn:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}\lambda - 1, & \delta_{12}\lambda - \omega_3, & \delta_{13}\lambda - \omega_2 \\ \delta_{21}\lambda - \omega_3, & \delta_{22}\lambda - 1, & \delta_{23}\lambda - \omega_1 \\ \delta_{31}\lambda - \omega_2, & \delta_{32}\lambda - \omega_1, & \delta_{33}\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Da aber diese Determinante in Bezug auf λ vom dritten Grade ist, so giebt es nur drei Werthe für die Constante, welche obige drei Gleichungen möglich machen. Hat man diese drei Werthe durch Auflösung der cubischen Gleichung gefunden (in der analytischen Geometrie wird bewiesen, dass die drei Wurzeln der Gleichung immer reell sind) und einen derselben in die Determinante substituirt, so verhalten sich die Axencoordinaten wie die Unterdeterminanten einer Zeile oder Colonne.

Für bestimmte Werthe von δ_{ik} sind diese Operationen leicht ausführbar, allgemein algebraisch so viel uns bekannt ist, wurden sie noch nicht durchgeführt.

Gleichungen zwischen $\varkappa\,\iota\,\vartheta$ allein, d. h. die Gleichung des Kräfteellipsoids erhält man durch die Substitution der oben gefundenen Werthe von $\xi\,\eta\,\zeta$, in die Determinante Σ^2. Sie ergiebt:

$$\delta^2 = -\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \delta_{11}x + \delta_{12}\iota + \delta_{13}\vartheta \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \delta_{12}x + \delta_{22}\iota + \delta_{23}\vartheta \\ \omega_2 & \omega_2 & 1 & \delta_{13}x + \delta_{23}\iota + \delta_{33}\vartheta \\ \delta_{11}x + \delta_{12}\iota + \delta_{13}\vartheta, & \delta_{21}x + \delta_{22}\iota + \delta_{23}\vartheta, & \delta_{31}x + \delta_{32}\iota + \delta_{33}\vartheta, & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Coordinaten zweier Ebenen, die senkrecht aufeinander stehen, genügen der Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \xi \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \eta \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 0 \end{vmatrix}.$$

Substituirt man in diese Gleichung für $\xi\ \eta\ \zeta$ die eben gefundenen Werthe in $x\ \iota\ \vartheta$, und für $\xi'\ \eta'\ \zeta'$, die in $x'\ \iota'\ \vartheta'$, so erhält man die Polargleichung der im Kräfteellipsoid conjugirten Diametralebenen und Durchmesser. Hieraus geht hervor, dass senkrechten Schnittebenen, Richtungen, unendlich ferne Punkte entsprechen, welche im Kräfteellipsoid conjugirt sind.

Hieraus kann man schliessen, dass der Kegel und das Ellipsoid gleiche Axen haben; denn die Axen des Kegels sind auch im Ellipsoid conjugirt. Weil ihre drei Ebenen gegenseitig senkrecht auf einander stehen, so sind ihre gegenüberliegenden Axen auch im Kräfteellipsoid conjugirt, demnach auch die Axen dieses, weil sie senkrecht aufeinander stehen. Die oben aufgestellte Gleichung von λ bestimmt daher auch die Axen des Ellipsoids.

Wir wollen jetzt annehmen die drei Ebenen, von denen wir ausgegangen sind, und die wir als Coordinatenebenen angenommen haben, seien im Polarsystem des Kegels conjugirt, dann sind laut Nr. 129 S. 538 die σ gleich Null. In Folge dessen wird:

$$\delta = \varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3;\ \delta_{11} = \varrho_2\,\varrho_3;\ \delta_{22} = \varrho_3\,\varrho_1;\ \delta_{33} = \varrho_1\,\varrho_2;\ \delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{31} = 0.$$

Die Gleichung des Ordnungskegels reducirt sich auf:

$$\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2} \pm \frac{z^2}{\varrho_3} = 0.$$

Die ϱ sind gleichen oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem sie das Material in gleicher oder in entgegengesetzter Weise in Anspruch nehmen. Ist das Material in den drei Richtungen in gleicher Weise beansprucht, d. h. haben die drei ϱ gleiche Zeichen, so giebt es keine reellen Werthe von $x\,y$ und z, welche obiger Gleichung genügen; Der Ordnungskegel ist imaginär, was jedoch nicht hindert, dass in dessen Polargleichung jedem reellen Punkt eine reelle Ebene und umgekehrt conjugirt sei.

Sind die ϱ nicht gleichen Sinnes, so müssen zwei derselben gleichen, das dritte entgegengesetzten Sinnes sein. Der Gleichung dieses letztern weisen wir die z

Axe zu. Diesem Fall entspricht also das untere Zeichen des dritten Gliedes der Kegelgleichung.

Der Ordnungskegel ist jetzt reell, und es gelten alle Beziehungen zwischen Schnitten und zugehörigen Kräfterichtungen die weiter oben Nr. 129 S. 541 aufgezählt worden sind.

Die λ Gleichung zur Bestimmung der Axen des Kegels und des Ellipsoids, reducirt sich nun auf:

$$\begin{vmatrix} 1-\varrho_2\varrho_3\lambda, & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1-\varrho_3\varrho_1\lambda, & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1-\varrho_1\varrho_2\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

und die Gleichung des Kräfteellipsoids:

$$1 = -\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \frac{x}{\varrho_1} \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \frac{\iota}{\varrho_2} \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \frac{\vartheta}{\varrho_3} \\ \frac{x}{\varrho_1} & \frac{\iota}{\varrho_2} & \frac{\vartheta}{\varrho_3} & 0 \end{vmatrix}.$$

Oder wenn die Unterdeterminanten des Sinus des körperlichen Ecks mit ω_{ik} bezeichnet werden:

$$1 = \omega_{11}\frac{x^2}{\varrho_1^2} + 2\,\omega_{12}\frac{x\iota}{\varrho_1\varrho_2} + \omega_{22}\frac{\iota^2}{\varrho_2^2} + 2\,\omega_{13}\frac{x\vartheta}{\varrho_1\varrho_3} + 2\,\omega_{23}\frac{\iota\vartheta}{\varrho_2\varrho_3} + \omega_{33}\frac{\vartheta^2}{\varrho_3^2}.$$

Schliesslich nehmen wir an, es stehen die drei conjugirten Axen senkrecht auf einander; dann werden alle ω_i und alle ω_{ik} mit verschiedenen Indexen gleich 0, die $\omega_{ii}=1$, und die Gleichungen des Kegels und des Ellipsoids werden:

$$\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2} \pm \frac{z^2}{\varrho_3} = 0,$$

$$\frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{\iota^2}{\varrho_2^2} + \frac{\vartheta^2}{\varrho_3^2} = 1.$$

Setzt man in diesen Gleichungen eine der unbekannten Veränderlichen $= 0$, so gehen sie über in die in Nr. 128 S. 534 aufgestellten. In einem Hauptschnitt also verhalten sich die Schnitte und die ihnen conjugirten Kräfte mit ihren Richtungen wie im ebenen Kräftesystem. Die zusammengehörigen Schnitte und Richtungen können mittelst der Kreise Nr. 127 S. 525 und 526 construirt werden.

In Schnitten jedoch, die nur eine Axe enthalten, findet dies schon nicht mehr

statt; setzt man z. B. $y = rx$ und $z = rx$, so werden die Gleichungen des Kegels und des Ellipsoids:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{r^2}{\varrho_2}\right) x^2 \pm \frac{z^2}{\varrho_3} = 0,$$

und

$$\left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{r^2}{\varrho_2^2}\right) x^2 \pm \frac{z^2}{\varrho_3^2} = 1.$$

Nun ist aber $\left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{r^2}{\varrho_2^2}\right)$ nicht das Quadrat von $\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{r^2}{\varrho_2}\right)$, mithin gelten auch die dortigen Beziehungen und Kreisconstructionen nicht mehr für solche Schnitte, was auch mit dem in Nr. 129 S. 542 Gesagten vollkommen übereinstimmt.

Der Schnitt des Kegels mit dem Ellipsoid kann natürlich nur dann reell sein, wenn der Kegel selbst es ist. In diesem Fall sind die drei Projectionen des Schnittes:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_3}\right) \frac{x^2}{\varrho_1} + \left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}\right) \frac{y^2}{\varrho_2} = 1,$$

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) \frac{x^2}{\varrho_1} + \left(\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \frac{z^2}{\varrho_3} = 1,$$

$$\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \frac{y^2}{\varrho_2} + \left(\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1}\right) \frac{z^2}{\varrho_3} = 1.$$

Von diesen drei Projectionen ist die erste immer eine Ellipse, und von den beiden andern ist die eine eine Ellipse und die andere eine Hyperbel, trotzdem dass die Curve selbst 4ter Ordnung ist. Dieses Verhältniss ermöglichte die einfache Construction der Durchdringungscurve auf Taf. 15 siehe Nr. 130 S. 553.

Zweites Kapitel.

Die elastische Linie.

---

133. Die elastische Linie im Allgemeinen.

Die Theorie der Elasticität wird in dem Baufach vom Ingenieur vorzugsweise dazu benutzt, um die an Balken wirkenden Kräfte, welche durch Gleichgewichtsbedingungen nicht von vorn herein gegeben sind, näher zu bestimmen. Z. B. ein beliebig belasteter

Balken ruht auf 2 Stützpunkten, die nur in verticaler Richtung widerstehen können; wie wir Nr. 58 S. 211 gesehen haben, lassen sich in diesem Fall die an Balken wirkenden Belastungen nur auf eine einzige Weise in zwei durch die Stützpunkte gehende verticale Kräfte zerlegen, und wir bedürfen der Elasticitätstheorie nicht, um sie zu bestimmen. Ruht aber der Balken auf mehr als zwei z. B. n Stützpunkten, so genügen die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr um die drei verticalen Reactionen der Stützpunkte zu bestimmen; weil $n-2$ derselben ganz willkürlich angenommen, mit den übrigen zusammengesetzt und die entstehende Mittelkraft dann erst nach der Richtung der Verticalen durch die zwei andern Stützpunkte unzweideutig zerlegt werden können; und das ist auf unendlich viele Weisen möglich. Diese Vieldeutigkeit wird nun dadurch aufgehoben, dass man festsetzt: die Lage der Stützpunkte dürfe sich bei den Verbiegungen, welche der Balken durch die an ihm wirkenden Kräfte erleidet, nicht ändern. Ebenso verhält es sich mit dem Bogen; die Widerlagerreactionen sind unbestimmt, weil sie in verschiedenen Richtungen, bisweilen auch höher oder tiefer angenommen werden dürfen, vergleiche Nr. 55 Fig. 109 und 110 S. 199, und demnach das Gleichgewicht der am Bogen wirkenden Kräfte auf unendlich viele verschiedene Arten wiederhergestellt werden kann; auch hier wird die Zweideutigkeit dadurch aufgehoben, dass man festsetzt: die am Bogen wirkenden Kräfte dürfen bei den unvermeidlichen Verbiegungen die Lage der Stützpunkte und die Richtung der etwaigen Auflagerflächen nicht verändern.

Bei Bestimmung der diesen Bedingungen entsprechenden Kräften (Pfeiler- und Widerlagerreactionen) verfahren wir auf die folgende Weise: wir bringen an dem Balken irgend eines der möglichen, also den Gleichgewichtsbedingungen entsprechenden Kräftesysteme an, bestimmen die Verbiegungen, welche von allen am Balken wirkenden und sich von Querschnitt zu Querschnitt ändernden Kräften herrühren, und führen schliesslich durch Modification des angenommenen Kräftesystems, oder was dasselbe ist, durch Anbringung von Kräften, welche das Gleichgewicht nicht stören, deren Summe also gleich 0 ist, und die in der Regel für einen grössern Theil des Balkens constant sind, diejenigen Punkte des Balkens in ihre ursprüngliche Lage zurück, welche der Natur der Sache gemäss fest sein sollen.

Unsere Aufgabe zerfällt also in zwei Theile:

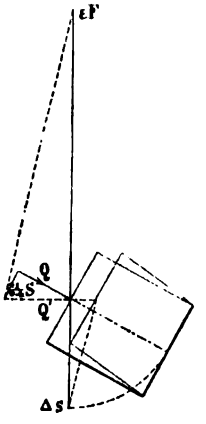
1) Müssen die von beliebigen Kräften herrührenden Formänderungen des Balkens bestimmt werden, d. h. es ist die diesen Kräften entsprechende elastische Linie zu construiren.
2) Gewisse Punkte sind in ihre ursprüngliche Lage zurückzubringen, oder: die elastische Linie ist durch gegebene Punkte zu führen, indem die ursprünglich angenommenen Kräfte modificirt werden.

So weit diese Aufgaben, namentlich die zweite, einer allgemeinen Lösung fähig sind, sollen sie hier behandelt werden; auf weitere Specialitäten werden wir dann später bei dem continuirlichen Balken und bei dem Bogen eintreten.

134. Die Formänderungen welche die, Balkenelemente pressenden und scheerenden Kräfte hervorbringen.

Wir beschränken unsere Untersuchungen auf die elastische Linie in der Ebene. Soll also durch das Wirken der Kräfte am Balken dieser nicht aus der Ebene heraustreten, so müssen die Mittelkräfte aller ausserhalb eines Querschnittes wirkenden Kräfte in dieser Ebene liegen; Torsionskräfte, die nicht um Axen drehen, die senkrecht auf der Ebene stehen, sind ausgeschlossen, und endlich muss die Ebene eine Hauptaxe der Centralellipse eines Querschnittes enthalten.

Fig. 197.



Dies vorausgesetzt, muss es möglich sein, die Kräfte ausserhalb eines Querschnittes in drei in der Balkenebene wirkenden Kräfte zu zerlegen: in eine nach der Richtung der Balkenaxe wirkende Kraft Q, in eine senkrecht auf ihr stehende und in der Ebene des Querschnittes wirkende scheerende Kraft S und in eine unendlich ferne Kraft, die wir mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen.

Die erste Kraft Q drückt das Balkenelement Δs (Fig. 197) in der Richtung der Balkenaxe zusammen. Da Q in dem Schwerpunkt angreift, so liegt die neutrale Axe, um die sich der Quer-

schnitt dreht, als Antipolare des Mittelpunktes der Centralellipse im Unendlichen; der Querschnitt wird demnach parallel zu sich selbst verschoben. Es wird angenommen, die Kraft ϱ pro Flächeneinheit, die nothwendig ist, um eine gewisse, sehr kleine Zusammenpressung λ pro Flächeneinheit zu bewirken, sei der Grösse dieser Zusammenpressung proportional, so dass man $\varrho = \varepsilon \lambda$ hat, worin ε einen Erfahrungscoefficienten, den Elasticitätsmodul bezeichnet. Ist die Querschnittsfläche des Balkens F, so ist $\varrho = \frac{Q}{F}$ und die auf die Länge des Balkenelementes Δs treffende Zusammenpressung $\lambda \Delta s$ gleich $\frac{Q}{\varepsilon F} \Delta s$.

Da der Drehungswinkel der Endfläche von Δs bei dieser Zusammenpressung $= 0$ ist, so werden alle mit dem Element Δs verbundenen und zusammenhängenden Punkte, z. B. das Balkenende um die gleiche Grösse parallel zur Axe von Δs verschoben.

Während unter der Einwirkung von Q die Länge von Δs sich verkleinert, vergrössern sich gleichzeitig alle Querschnittsdimensionen.

Nimmt man an, dieses finde gleichmässig nach allen Richtungen des Querschnittes um die Grösse μ pro Längeneinheit statt, so wird in Folge der Verkürzung und der Verbreiterung des Balkens das Volumen desselben nach der Wirkung der Kraft Q gleich: $(1 - \lambda)(1 + \mu)^2 F \Delta s = (1 + 2\mu - \lambda + \mu^2 - 2\lambda\mu - \mu^2\lambda) F \Delta s$.

Die Kraft Q konnte das Volumen von Δs nur verringern, es muss daher, weil μ und λ so kleine Grössen sind, dass die höhern Potenzen den niedrigern gegenüber vernachlässigt werden können, $\mu < \frac{1}{2} \lambda$ sein, μ liegt daher zwischen 0 und $\frac{1}{2} \lambda$.

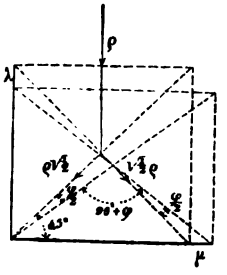
Die zweite Kraft S verschiebt den Endquerschnitt von Δs in seiner eigenen Ebene F in der Richtung von S. Auch hier wird angenommen, dass die Kraft σ, welche pro Flächeneinheit nothwendig ist, um den Endquerschnitt eines Balkenelementes von der Länge 1 um die Grösse φ zu verschieben, dieser proportional sei, und man setzt daher:

$$\sigma = \varepsilon' \varphi.$$

Die von der Kraft S herrührende, auf das Balkenelement Δs treffende Verschiebung $\varphi \Delta s$ ist, weil $\sigma = \frac{S}{F}$ ist, gleich $\frac{S}{\varepsilon' F} \Delta s$.

Wir reproduciren hier nach Prof. *Clebsch's* Theorie der Elasticität S. 10 den Beweis, dass ε' zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ε liege, d. h.: Wenn Q gleich S ist, so ist die Verschiebung des Querschnittes in der eigenen Ebene in Folge der scheerenden Kraft 2—3mal so gross, als wie die Verschiebung desselben in der Richtung der Axe in Folge der Zusammenpressung durch Q.

Fig. 198.



Es sei Fig. 198 der Querschnitt eines cubischen Balkenelements, dessen Seitenflächen den Inhalt 1 haben, es sei belastet mit der Kraft ϱ. Unter der Einwirkung dieser Kraft wird sich die Höhe des Elementes um λ vermindern und die Breite um μ vergrössern. In Folge dieser Aenderung der Dimensionen werden die ursprünglich rechtwinkeligen Diagonalen einen stumpfen Winkel $90 + \varphi$ mit einander bilden, wie die Figur es zeigt, und man hat offenbar:

$$tg\,(45 - \frac{1}{2}\varphi) = \frac{1 - \frac{1}{2}\varphi}{1 + \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1-\lambda}{1+\mu},$$

weil der Winkel φ sehr klein ist. Hieraus findet man nun:

$$\frac{1}{2}\varphi\,(2 - \lambda + \mu) = \lambda + \mu;$$

oder weil $\lambda - \mu$ als sehr kleine Grössen der 2 gegenüber vernachlässigt werden können:

$$\varphi = \lambda + \mu.$$

Oben ist gezeigt worden, dass μ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\lambda$ liege; es muss also im vorliegenden Falle φ zwischen λ und $\frac{3}{2}\lambda$ liegen.

Da φ sehr klein ist, so kann es als die Verschiebung aller senkrecht auf den Diagonalen stehenden Querschnittsflächen in ihrer eigenen Ebene betrachtet werden; und Herr Prof. *Clebsch* schreibt nun diese Verschiebung der mit dem treffenden Querschnitt parallel laufenden Seitenkraft von ϱ zu.

Schneidet man den Würfel nach der Richtung der Diagonale

(wie die Fig. 198 es andeutet) und zerlegt man ϱ im Schnitt mit ihr in zwei Seitenkräfte, wovon die eine in der Schnittfläche und die andere senkrecht darauf steht, so ist jede dieser beiden 45° mit ϱ bildenden Seitenkräfte $= \varrho \sqrt{\frac{1}{2}}$. Der Flächeninhalt einer Diagonalfläche ist aber $= \sqrt{2}$, wenn der einer Würfelseite $= 1$ ist; die auf $\sqrt{2}$ scheerend vertheilte Kraft $\varrho \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder die scheerende Kraft ist demnach gleich:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\, \varrho : \sqrt{2} = \frac{1}{2} \varrho.$$

Da $\varrho = \lambda\, \varepsilon$ ist, so haben wir jetzt zwei zusammengehörige Werthe von σ und φ, die wir in die Gleichung $\sigma = \varphi\, \varepsilon'$ substituiren und daraus ε' bestimmen können, nämlich:

$$\frac{1}{2} \lambda\, \varepsilon = (\lambda + \mu)\, \varepsilon',$$

woraus:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)} \text{ folgt.}$$

Oben haben wir gesehen, dass $\frac{\mu}{\lambda}$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ variire: demnach variirt ε' zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ε. Wenn keine bestimmteren Angaben über ε' vorliegen, so kann man jeweilen $\varepsilon' = 0{,}4\, \varepsilon$ setzen.

Zur Construction der von Q und S herrührenden Verschiebungen ist es zweckmässig, sie in der Weise zusammenzufassen, dass man das im Verhältniss von $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ vergrösserte S, also $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} S$ mit Q zu Q' zusammensetzt, siehe Fig. 198, wo Q mit $\frac{1}{0{,}4} S$ zusammengesetzt wurde und dann die von Q' herrührende und ε entsprechende Verschiebung $\frac{Q'}{\varepsilon F} \Delta\, \varepsilon$ in Richtung und Grösse aufträgt. In Fig. 197 geschah es dadurch, dass man auf einer Linie durch den Angriffspunkt von Q', $\Delta\, \varepsilon$ und εF auftrug und durch den Endpunkt von

Δs eine Parallele zu der Verbindungslinie S, εF zog, welche dann die Verschiebung auf Q' in Richtung und Grösse abschnitt, wie die Figur es zeigt. Dass diese Construction gerade nicht über jedem Bogenelement, sondern an irgend einer andern passenden Stelle, z. B. bei dem Strahlenbüschel der Q oder Δs ausgeführt werden kann, wo dann die Linie der εF und Δs nur einmal zu ziehen ist, versteht sich von selbst. Ebenso dass εF nicht im Maassstabe der Q und S aufgetragen werden müsse, denn es ist in der Regel 500 bis 1000 Mal grösser als alle Kräfte, mit denen man es auf dem Blatt zu thun hat und die gleicher Art als wie ϱF sind; trägt man nun statt εF, $\frac{1}{n} \varepsilon F$ auf, so ist es klar, dass man alle Verschiebungen in $n$fach vergrössertem Maassstab erhält, was bei Zusammensetzungen mit andern Linien wohl zu beachten ist. Herr Prof. *Mohr* in Dresden empfiehlt (1868 in der Hannoveranischen Zeitschrift des Ing. und Arch. Ver.) n gleich der reciproken Zahl des Maassstabes zu setzen, dann erhält man die Verschiebungen in natürlicher Grösse. Es ist schön, sich an dieses Verhältniss halten zu können, allein immer wird das nicht möglich sein.

Durch Aneinanderreihen, d. h. durch Summation aller den einzelnen Δs entsprechender Verschiebungen erhält man die totale Verschiebung eines bestimmten, mit dem Bogen verbundenen Punktes, z. B. seines Endpunktes. Das Summationspolygon wird, wenn die ϱ sehr klein sind, was wo möglich immer sein sollte, eine Figur gleicher Art wie der Bogen oder Balken selbst sein.

Können die S vernachlässigt werden und sind die $\frac{Q}{\varepsilon F}$ über den ganzen Balken hin constant, was z. B. bei einem Bogen der Fall wäre, dessen Form genau mit der Drucklinie zusammenfiele und dessen Querschnittsflächen den ausserhalb wirkenden Kräften proportional wären: so ist das Summationspolygon dem Bogen oder Balken selbst ähnlich, denn alle entsprechenden Elemente laufen parallel und verhalten sich wie $\varepsilon F : Q$. Lagen die Bogenenden ursprünglich auf einer Horizontalen, so würde auch das Resultat der Summirung aller Formänderungen eine horizontale Linie = $\frac{Q}{\varepsilon F}$tel der Spannweite sein.

Genau dieser Art sind auch die von den Temperaturdifferenzen herrührenden Formänderungen. Das Summationspolygon ist dem

Bogen oder Balken selbst ähnlich und ist reducirt im Verhältniss von $1 : \tau \cdot \frac{1}{100} \Delta t$, worin τ der Ausdehnungscoefficient für 100° und Δt die Temperaturdifferenz ist. Nach Herrn Prof. *Mousson's* Physik (S. 17) ist τ für Eisen = 0,001118, Stahl 0,00124 (circa $\frac{1}{800}$), Kupfer ,00171, Sandstein ,00117, Granit ,0009, Holz ,0003.

Von vorn herein können demnach beide Formänderungen approximativ geschätzt werden, wenn man sie $= \frac{Q}{\varepsilon F} \pm \tau \cdot \frac{1}{100} \Delta t$ der Balkendimensionen annimmt und voraussetzt, dass die von S herrührenden Aenderungen sich gegenseitig aufheben. Für $\frac{Q}{\varepsilon F}$ ist ein Mittelwerth einzusetzen.

Dieses Verfahren dürfte um so mehr genügen, als, wie wir in der nächsten Nummer sehen werden, die von den Q und S herrührenden Aenderungen im Verhältniss zu den von den Momenten $\mathfrak{P}$ herrührenden sehr klein sind. Werden doch die Formänderungen der S bei continuirlichen Balken, wo sie verhältnissmässig am grössten sind, in der Regel nicht berücksichtigt.

135. Formänderungen, welche die an Balkenschnitten wirkenden Momente hervorbringen.

Um die von den Momenten $\mathfrak{P}$ herrührenden Formänderungen zu bestimmen, vereinigen wir wieder $\mathfrak{P}$ mit Q zu einer Kraft Q, die nicht mehr im Schwerpunkte, sondern am Hebelsarme q (siehe Fig. 199) so wirkt, dass $Qq = \mathfrak{P}$ ist. Laut Nr. 105 S. 418 dreht die Kraft Q den Endquerschnitt von Δs um die neutrale Axe, deren Entfernung vom Schwerpunkt $= i = \frac{k^2}{q}$ ist, wo k den treffenden Trägheitshalbmesser der Centralellipse bezeichnet; die Verschiebung des Schwerpunktes ist gleich $i \Delta \vartheta \frac{Q}{\varepsilon F} \Delta s$, worin $\Delta \vartheta$ den kleinen Drehungswinkel des Querschnittes um die neutrale Axe bezeichnet.

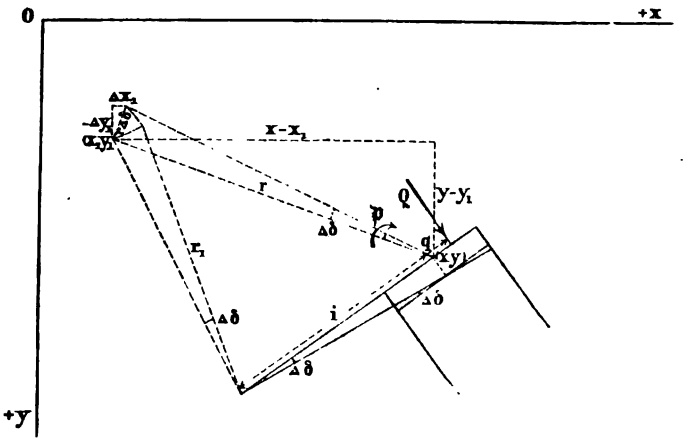
Aus dieser Gleichung folgt:

$$\Delta \vartheta = \frac{Q}{\varepsilon i F} \Delta s = \frac{qQ}{\varepsilon i q F} \Delta s = \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon \mathfrak{J}} \Delta s.$$

Wo $iqF = k^2 F = \mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die dem Angriffspunkt von Q conjugirte Schwerpunktsaxe bezeichnet.

Das von Q getrennte Moment $\mathfrak{P}$ greift als unendlich ferne Kraft im Unendlichen an und dreht den Querschnitt um die Antipolare des unendlich fernen Angriffspunktes, um den $\mathfrak{P}$ conjugirten Durchmesser der Centralellipse, um deren horizontale kleine Axe,

Fig. 199.



wenn ihre grosse Axe in der Verticalebene von $\mathfrak{P}$ liegt. Das Moment $\mathfrak{P}$ verändert demnach die Lage der Schwerpunktsaxe gar nicht, sondern bringt nur Drehung um dieselbe hervor. Auf der andern Seite verschiebt Q allein, im Schwerpunkt wirkend, wie wir in der vorigen Nummer gesehen haben, den Querschnitt parallel mit sich selbst, ohne Drehung zu verursachen, um die Grösse $(i\Delta\delta) = Q\Delta s : \varepsilon F$. Wirken daher $\mathfrak{P}$ und Q, so muss die Parallelverschiebung des Querschnittes $(i\Delta\delta)$ der Kraft Q und die Drehung $\Delta\delta$ der Kraft $\mathfrak{P}$ zugewiesen werden.

$$\Delta\delta = \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon\mathfrak{J}}\Delta s$$

ist demnach die vom Moment $\mathfrak{P}$ herrührende Drehung der Endfläche von Δs um die Schwerpunktsaxe.

In Folge dieser Drehung dreht sich jede mit Δs verbundene Querschnittsfläche, z. B. die Endfläche des Balkens um ebensoviel;

und jeder mit derselben verbundene Punkt legt einen Weg $r \Delta \delta = \frac{r \mathfrak{P}}{\varepsilon \mathfrak{J}} \Delta s$ (siehe Fig. 199) zurück, wenn r die Entfernung des Punktes vom Drehungsmittelpunkt bezeichnet. Die Richtung dieser Bewegung steht natürlicher Weise senkrecht auf r, der Verbindungslinie des Punktes, mit dem Drehungsmittelpunkt, d. h. mit der Schwerpunktsaxe der Endfläche des treffenden Elementes Δs.

Die totale von $\mathfrak{P}$ und Q herrührende Bewegung, die sich aus $r \Delta \delta$ und $i \Delta \delta$ zusammensetzt, steht senkrecht auf der Verbindungslinie r_1 des Punktes mit den Antipolaren des Angriffspunktes von Q im Querschnitt, dem Endpunkt von i, und ist gleich $r_1 \Delta \delta$; die Figur zeigt, dass $r_1 \Delta \delta$ gleich der Summe des Zuges der Linien $r \Delta \delta$ und $i \Delta \delta$ ist.

Es verhalten sich nämlich:

$$\frac{r_1 \Delta \delta}{r_1} = \frac{i \Delta \delta}{i} = \frac{r \Delta \delta}{r}.$$

136. Summation der von den Momenten herrührenden Formänderungen.

Um die von allen Balkenelementen Δs herrührenden Formänderungen zu summiren, ist es zweckmässig, die Coordinatenänderungen Δx_1 und Δy_1 eines auf diese Weise fest mit dem Bogen verbundenen Punktes $x_1 y_1$ zu bestimmen. Die drei Aenderungslängen Δx_1, Δy_1 und $r \Delta \delta$ bilden ein rechtwinkeliges Dreieck (siehe Fig. 199), welches dem Dreieck $y - y_1$, $x - x_1$ und r ähnlich ist, wo x und y die Coordinaten der betreffenden neutralen Axe des Anfangspunktes von r sind, indem die entsprechenden Seiten der Dreiecke senkrecht auf einander stehen. Man hat demnach:

$$\frac{\Delta x_1}{y - y_1} = \frac{-\Delta y_1}{x - x_1} = \frac{r \Delta \delta}{r} = \frac{\mathfrak{P} \Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}};$$

woraus:

$$\Delta x_1 = (y - y_1) \frac{\mathfrak{P} \Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}} \text{ und } -\Delta y_1 = (x - x_1) \frac{\mathfrak{P} \Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}} \text{ folgt.}$$

Δy_1 ist negativ, weil, wie die Figur zeigt, einer positiven Drehung eine Abnahme der Ordinaten entspricht.

Bezeichnen wir die totale Aenderung der Coordinaten des Punktes x_1 und y_1 mit h und k, und die totale Drehung einer mit $(x_1 y_1)$ verbundenen geraden Linie mit δ, so bestehen diese Grössen aus der Summe aller $\Delta\delta$, Δx_1 und Δy_1, welche von den einzelnen Δs herrühren, an denen die ihnen zugehörigen $\mathfrak{P}$ wirken, und man hat daher $\delta = \Sigma\Delta\delta$, $h = \Sigma\Delta x_1$ und $k = \Sigma\Delta y_1$. Hat man diese Summen bestimmt, so kann man rückwärts den Drehungsmittelpunkt $(x'' y'')$ ermitteln, um welchen sich $(x_1 y_1)$ im Ganzen gedreht hat, um aus seiner ursprünglichen Lage in die Endlage überzugehen. Um diesen Punkt zu erhalten, hat man in den eben entwickelten Verhältnissen nur h, k und δ, x'' und y'' statt Δx_1, Δy_1 $\Delta\delta$, x und y zu setzen.

Die jetzt angedeuteten Summationen führen zu den folgenden Formeln:

$$\delta = \Sigma\mathfrak{P} \cdot \frac{\Delta s}{\varepsilon\mathfrak{J}},$$

$$h = \Sigma(y - y_1)\mathfrak{P}\frac{\Delta s}{\varepsilon\mathfrak{J}} = (y'' - y_1)\delta,$$

$$-k = \Sigma(x - x_1)\mathfrak{P}\frac{\Delta s}{\varepsilon\mathfrak{J}} = (x'' - x_1)\delta.$$

Die Summen erstrecken sich natürlich über das ganze in Betracht kommende Balkenstück, z. B. von einem festen Auflager an bis zu dem Querschnitt, mit dem der Punkt $x_1 y_1$ und eine durch ihn gehende Linie fest verbunden ist.

Um diese Summationen auszuführen und zu construiren, wollen wir zuerst die Wirkungen einer einzelnen Kraft A für ein mehr oder weniger langes Balkenstück ermitteln und dann erst alle von den einzelnen Belastungen ΔP des Balkens, den wir jetzt allgemein als einen Bogen annehmen, herrührenden Aenderungen summiren. Wir setzen zunächst also voraus, dass die Momente $\mathfrak{P}$ von einer einzigen für das betrachtete Bogenstück constanten Kraft A herrühren und summiren die entsprechenden Aenderungen für dieses Bogenstück.

Es sei u der veränderliche Abstand des Schwerpunktes eines jeden Bogenquerschnittes von der Richtungslinie der Kraft A. Dann ist $\mathfrak{P} = Au$ und die Fundamentalgleichungen der vorigen Nummer werden:

$$\vartheta = A \Sigma u \cdot \left(\frac{\Delta s}{\varepsilon \Im}\right),$$

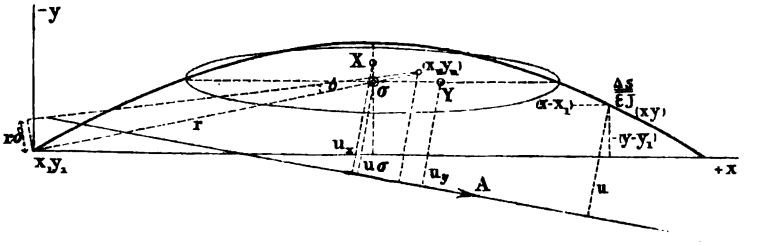
$$h = A \Sigma (y - y_1)\, u \left(\frac{\Delta s}{\varepsilon \Im}\right),$$

$$-k = A \Sigma (x - x_1)\, u \left(\frac{\Delta s}{\varepsilon \Im}\right);$$

weil das constante A als Faktor vor das Summenzeichen herausgenommen werden kann. Wir denken uns nun jedes einzelne Bogenelement behaftet, gleichsam belastet mit dem Werthe $\frac{\Delta s}{\varepsilon \Im}$, bilden nach den früheren Regeln deren Summe σ und construiren den Schwerpunkt und die Centralellipse dieser Werthe. Dann ist die erste Summe ein statisches Moment, weil die u den Entfernungen der mit $\frac{\Delta s}{\varepsilon \Im}$ belasteten Bogenelemente von einer geraden Linie der Richtungslinie der Kraft A gleich sind.

Wir verlegen die Coordinatenaxen nach dem Punkt $x_1\, y_1$, so dass die Coordinaten dieses Punktes vor der Bewegung gleich Null und nach derselben gleich h und k sind; ferner bezeichnen wir in Fig. 200, wo das negative Moment der Kraft mit dem der Formeln dem Zeichen nach nicht übereinstimmt, weil die Reaction so eingezeichnet wurde, wie sie sich in Wirklichkeit gestaltet, mit u_σ,

Fig. 200.



die Entfernung des Schwerpunktes σ der Belastungen $\frac{\Delta s}{\varepsilon \Im}$ von der Richtungslinie A und die Coordinaten desselben in Bezug auf die neuen Axen mit $x_\sigma\, y_\sigma$; ferner mit x_u und y_u die Coordinaten des Antipoles der Linie A, endlich mit u_x und u_y die Entfernungen der Antipole der Axen von der Richtungslinie von A, wie die Figur es

andeutet; dann erscheint das erste Moment δ als statisches Moment der $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{I}}$, bezüglich der Richtungslinie der A und ist gleich $u_\sigma A \sigma$; die zweite Summe ist gleich $y_\sigma u_x A_\sigma \sigma$ oder $y_u u_\sigma A \sigma$ oder endlich gleich $y_u \delta$, denn sie ist das Centrifugalmoment der Werthe $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{I}}$ bezüglich der Linie A und der Parallelen zur x Axe durch $x_1 y_1$. Laut Nr. 101 S. 404 ist aber dieses Centrifugalmoment gleich der Entfernung des Schwerpunktes σ von einer dieser Linien gleich u_σ oder y_σ, multiplicirt mit der Entfernung des Antipols der treffenden Linie von der andern y_u oder u_x, und multiplicirt mit der Summe aller $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{I}}$ oder mit σ. Auf dieselbe Weise erhalten wir $-k$ als Centrifugalmoment der Werthe $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{I}}$ in Bezug auf A und die y Axe gleich $x_\sigma u_y A \sigma$, oder $x_u u_\sigma A \sigma$ oder gleich $x_u \delta$. Wir haben also:

$$\delta = u_\sigma A \sigma,$$
$$h = y_\sigma u_x A \sigma = y_u u_\sigma A \sigma = y_u \delta,$$
$$-k = x_\sigma u_y A \sigma = x_u u_\sigma A \sigma = x_u \delta.$$

Da über die Richtung der Axen keine bestimmten Voraussetzungen gemacht wurden, so können wir den Axen jede beliebige Richtung geben und die gewonnenen Resultate haben dann noch allgemeine Gültigkeit. Wir führen also die x Axe durch den Antipol von u oder wir bringen sie in die Lage r der Fig. 200, dann wird $y_u = 0$, $x_u = r$, der von $x_1 y_1 = 0$ zurückgelegte Weg fällt mit der y Axe zusammen und wird gleich $r \delta$; und man hat schliesslich:

$$\delta = u_\sigma A \sigma; \; h = 0; \; -k = r \delta.$$

Diese Resultate können wir also in Worte fassen:

Jede Kraft dreht um ihren Antipol bezüglich der Centralellipse der $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{I}}$; und die Grösse der Drehung ist gleich der Kraft, multiplicirt mit dem statischen Moment dieser $\frac{\Delta s}{\mathfrak{I}}$ bezüglich ihrer Richtungslinie.

Zu einer andern Auffassung giebt die Form:

$$u_\sigma : \delta = u_x : \frac{h}{y_\sigma} = - u_y : \frac{k}{x_\sigma} = \frac{1}{A\sigma},$$

in welche man die Resultate kleiden kann, Veranlassung. Die Perpendikel von dem Schwerpunkte der $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{F}}$ und von den Antipolen der Coordinatenaxen auf die Richtungslinie der Kraft A verhalten sich wie die Grössen δ, $\frac{h}{y_\sigma}$ und $- \frac{k}{x_\sigma}$; d. h. beschreibt man um diese 3 jederzeit bekannten Punkte Kreise, die sich wie diese Grössen verhalten, so schneiden sich die Tangenten an je zwei dieser Kreise auf der Richtungslinie von A. Diese drei Schnittpunkte können auch direct dadurch construirt werden, dass man nach Nr. 2 S. 13 Parallellinien durch die drei gegebenen Punkte zieht, auf diesen Grössen aufträgt, welche δ, $\frac{h}{y_\sigma}$ und $\frac{k}{x_\sigma}$ proportional sind, dann schneiden die Verbindungslinien der Endpunkte der Parallelen die Dreiecksseiten der gegebenen Punkte ebenfalls auf der gesuchten Richtungslinie von A, indem diese Punkte identisch mit den vorhin benützten Tangentenschnittpunkten sind.

Wenn die Summationen auf analytischem Wege ausgeführt werden, gelangt man jederzeit zu δ, $\frac{h}{y_\sigma}$ und $\frac{k}{x_\sigma}$; und dann haben diese 3 Werthe eine ganz bestimmte Bedeutung: sie sind die trimetrischen Coordinaten der Linie A bezüglich des Fundamentaldreiecks, welches mit dem Schwerpunkt der $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{F}}$ und den Antipolen der Coordinaten gebildet wird.

Wir sind jetzt vollkommen im Stande, die zweite der S. 564 aufgestellten Aufgaben zu lösen, nämlich die Kraft zu bestimmen, welche im Bogenende nöthig ist, um einen gegebenen Winkel zurückzudrehen und eine gewisse Strecke zurückzuführen. Wir bestimmen auf der Senkrechten durch den Endpunkt dieser Strecke den Punkt, von welchem aus die Strecke mit Berücksichtigung des

Sinnes unter dem Winkel δ gesehen wird; dann ist die Antipolare dieses Punktes die Richtungslinie der Kraft A; durch Construction derselben sind alle u gegeben und daher auch:

$$A = \frac{\delta}{u_\sigma \sigma}.$$

Drittes Kapitel.

Der elastische Bogen.

---

137. Die Widerlagerreactionen von Bogen.

In der vorigen Nummer haben wir ganz allgemein die Kraft A bestimmt, durch welche eine gegebene, unendlich kleine Bewegung eines mit einem beliebig geformten und an einem Ende festen Balken oder Bogen verbundenen Punktes hervorgebracht werden kann. Bevor wir nun die aufgestellten Gleichungen construiren, wollen wir zeigen, wie mittelst derselben die Widerlagerreactionen von Bogen bestimmt werden können, indem es gerade die Bogen sind, auf welche der Ingenieur die entwickelte Theorie vorzugsweise anwendet.

Um die Widerlagerreactionen eines Bogens zu bestimmen, der so fest auf den Widerlagern ruht, dass daselbst die Richtungen der Bogenenden sich nicht ändern können, verfahren wir ganz, wie in der vorigen Nummer angedeutet wurde. Wir bestimmen die von jedem einzelnen ΔP, möge es Eigengewicht oder zufällige Belastung sein, herrührende Formänderung des einen Bogenendes, das wir uns beweglich denken, während das andere als fest vorausgesetzt wird, und diejenige Widerlagerreaction ΔA, welche die ganze Formänderung, die Drehung mit inbegriffen, wieder aufhebt. Die Mittelkraft aller ΔA, welche von den einzelnen ΔP herrühren, ist die gesuchte Widerlagerreaction.

Es sei ferner die von der Temperaturänderung desselben Bogens herrührende Widerlagerreaction zu bestimmen. Ist das eine Bogenende fest, so wird in Folge der gleichmässigen Ausdehnung durch die Temperatur der ausgedehnte Bogen dem ursprünglichen ähnlich sein, demnach das freie Ende eine horizontale Linie, ohne sich zu drehen, beschreiben, es ist also der unendlich ferne Punkt der Verticallinie der Drehungsmittelpunkt, und die Antipolare desselben, d. h. der der Verticallinie conjugirte Durchmesser der Centralellipse wird die Richtungslinie der gesuchten Widerlagerreaction sein. Wenn der Bogen symmetrisch gebaut ist, so ist es die horizontale Linie durch den Schwerpunkt σ der $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}}$.

Als zweiten Fall nehmen wir an, es sitze ein Bogen an beiden Widerlagern auf zwei Punkten auf, um die er sich drehen kann. Wir verfahren wie oben, zerlegen ΔP in zwei verticale Seitenkräfte durch die beiden Stützpunkte und in einen Schub ΔA, der ebenfalls durch die beiden Stützpunkte gehen muss, denn ginge er nicht durch dieselben, so würde er ja um sie drehen. Würde die Axe der x parallel zu diesen Stützpunkten gewählt, so bestimmte sich die Grösse der Reactionen ΔA aus der zweiten Gleichung von h, in der alle Hebelsarme bekannt sind, weil die Lage der Reaction ΔA von vorn herein gegeben ist. Diese durch beide Stützpunkte gehenden Reactionen ΔA verursachen aber auch positive Δy_1; welche allgemein durch keine Kraft wieder aufgehoben werden können, weil sie eben nicht durch die Stützpunkte gehen wird; denn wäre dieses der Fall, so wäre sie eben nie nothwendig gewesen. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als wie das ganze System um den unendlich kleinen Winkel $-\frac{\Delta y_1}{l}$, wo l die Spannweite des Bogens bezeichnet, wieder zurückzudrehen. So gross ist also der Winkel, um den sich dasjenige Bogenende drehen wird, das wir uns fest gedacht hatten. Das bewegliche Ende wird sich je nach dem Zeichen von δ, um $\delta \mp$ diesen Winkel gedreht haben.

Die Ausdehnung durch die Wärme wird in diesem Falle gerade so wie oben behandelt werden. Das durch die Wärme hervorgebrachte h wird durch ein horizontales ΔA durch das Bogenende aufgehoben, dieses ΔA dreht das freie Bogenende abwärts; um so viel muss das ganze System wieder aufwärts gedreht werden.

Beide Bogenenden sind in Folge dessen steiler geworden, was auch ganz natürlich ist.

Alte Praktiker kommen bisweilen auf die Idee (!), auch im Scheitel noch ein Scharnier anzubringen. Zur Bestimmung der an einem solchen System wirkenden Kräfte braucht man die Elasticitätstheorie nicht mehr; in der That ist nur ein einziges Seilpolygon möglich, welches alle ΔP mit einander verbindet, dessen äusserste Seiten durch die Scharniermittelpunkte der Widerlager und dessen Polygonseite zwischen den dem Mittelscharnier anliegenden ΔP durch dieses geht. Alle am System wirkenden Kräfte sind daher von vorn herein bekannt.

138. Kräfteplan eines elastischen Bogens.

Wir wollen jetzt die in Nr. 136 entwickelten Formeln auf Bogen anwenden, und zeigen, wie die unter den Summenzeichen stehenden Werthe allgemein construirt und summirt werden können. Wie schon bemerkt wurde, construiren wir zunächst die von einer Einzellast ΔP, welche irgendwo angebracht sein mag und vertical abwärts wirkt, herrührenden Formänderungen, heben diese durch die Widerlagerreaction ΔA wieder auf, summiren dann alle ΔA, indem wir sie mittelst eines Seilpolygons einfach zusammensetzen. Die Entfernung der Richtungslinie ΔP von dem ersten Auflager A sei $= \beta l$, und die vom andern $B = \beta' l$ wo l die totale Spannweite bezeichnet. Bezeichnen wir ferner die Entfernung irgend eines Balkenelementes von A mit x und die von B mit x', so ist das Moment der von der Belastung ΔP herrührenden Kräfte für einen Punkt x der Strecke βl laut Nr. 86 S. 340 gleich $\beta' x \Delta P$ und für einen Punkt der zweiten Strecke $\beta' l$ gleich $\beta x' \Delta P$.

Die Richtungslinie und Grösse der zu bestimmenden Kraft ΔA werde vorerst auch als bekannt vorausgesetzt, dann ist ihr Moment für alle Punkte des Balkens gleich $u \Delta A$, weil sie sich über den ganzen Balken erstreckt.

Die Grösse $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}}$ bringen wir auf die Form $\frac{\Delta x}{\mathfrak{E} z'''}$, worin $\mathfrak{E}$ constant und z''' variabel ist. Wird z. B. das Trägheitsmoment nach Nr. 116 S. 479 construirt, so vergrössere man die

dritte Basis c im Verhältniss von $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ einfach dadurch, dass man die Bogen auf der Abscissenaxe in gleiche Theile theilt und dann die c diesen treffenden Bogenlängen proportional annimmt, dann ist $\varepsilon\,\mathfrak{J} = (\varepsilon\ ab)\ c\ \frac{\Delta s}{\Delta x}\ z'''_n$, und wenn wir statt dem constanten Moment $(\varepsilon\ ab)\ c$, $\mathfrak{E}$ und statt z'''_n, z''' setzen, so hat man

$$\frac{\Delta s}{\varepsilon\,\mathfrak{J}} = \frac{\Delta x}{\mathfrak{E}\,z'''}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen Nr. 136 S. 572 und 574, so sind die folgenden Werthe zu construiren:

$$\mathfrak{E}\,\delta = \beta'\,\Delta P \sum_{o}^{\beta l} x\,\frac{\Delta x}{z'''} + \beta\,\Delta P \sum_{\beta l}^{l} x'\,\frac{\Delta x}{z'''} + \Delta A\,.\,u_\sigma\,\sigma,$$

$$\mathfrak{E}\,h = \beta'\,\Delta P \sum_{o}^{\beta l} xy\,\frac{\Delta x}{z'''} + \beta\,\Delta P \sum_{\beta l}^{l} x'y\,\frac{\Delta x}{z'''} + \Delta A\,.\,u_x y_\sigma\,\sigma,$$

$$-\mathfrak{E}\,k = \beta'\,\Delta P \sum_{o}^{\beta l} x^2\,\frac{\Delta x}{z'''} + \beta\,\Delta P \sum_{\beta l}^{l} x'x\,\frac{\Delta x}{z'''} + \Delta A\,.\,u_y x_\sigma\,\sigma;$$

worin σ statt $\sum_{o}^{l} \frac{\Delta x}{z''}$ gesetzt wurde und sich daher vom frühern σ der Nr. 135 durch den constanten Faktor $\mathfrak{E}$ unterscheidet.

Die unter den Σ Zeichen stehenden Producte und die Werthe $\sigma\,x_\sigma\,y_\sigma$ construiren wir mittelst Summationspolygonen nach den in Nr. 4 S. 22 entwickelten Methoden auf Taf. 16. Es sei Taf. 16_1 die stark ausgezogene parabelartige Curve, die Axe des Bogens. Wir theilen denselben in 10 Lamellen, deren Projectionen Δx auf die horizontale Sehne, die wir uns als Abscissenaxe denken, gleich gross sind. Im Sinn von Nr. 3 könnten wir die hier aneinander gereihten Δx als Kräftepolygon betrachten; es würde dieses aber zu gross werden, und wir haben es desshalb in Taf. 16_2 auf die Hälfte reducirt und über den Mitten der ersten 5 Lamellen die z''', die wir uns auf irgend eine Weise vorher bestimmt denken, aufgetragen um das Gesetz ihrer Ab- und Zunahme zu zeigen. Auf der Horizontalen durch diese Endpunkte liegen die Eckpunkte des ersten Polygons, welches Fig. 25 S. 22 entspricht. Bei der Construction wurde der

Strahl 5 6 Taf. 16_2 vertical angenommen und an diesen nach beiden Seiten hin die weiteren Strahlen und Dreiecke angereiht.

Irgend eines der Verhältnisse $\frac{\Delta x_i}{z'''_i}$ ist jetzt Taf. 16_2 durch Δx_i und die Höhe des über ihm stehenden Dreiecks ausgedrückt. Die Summe aller dieser Verhältnisse ist gleich der $\Sigma \frac{1}{2} \Delta x = \frac{1}{2} l$ oder der halben Spannweite getheilt durch die Höhe $\frac{1}{2} m$, (wir schreiben der Symmetrie wegen $\frac{1}{2} m$) des über ihr stehenden Dreiecks, siehe Taf. 16_2, man hat also:

$$\sigma = \frac{l}{m}.$$

Zur Bestimmung von ΔA aus den obigen Gleichungen S. 579 müssten alle vorkommenden Längen durch dieses Verhältniss σ dividirt werden; man erspart viele spätere Reductionen, wenn man gleich von vorn herein alle z''' mit diesem Verhältniss multiplicirt. Geschieht dies, so muss das mit den neuen z''' construirte Verhältniss $\sum_0^l \frac{\Delta x}{z''' \sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_0^l \frac{\Delta x}{z'''} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$ werden. Man hat daher das Kräftepolygon collineär so zu verzerren, dass beide Polygone die Linie der $\frac{1}{2} \Delta x$ entsprechend gemein haben, das Colineationscentrum im unendlich fernen Punkt der Linie m liege, und die Entfernung des Kreuzungspunktes der äussersten Strahlen von der Linie der $\frac{1}{2} \Delta x$ gleich $\frac{1}{2} l$ sei.

Da die beiden Polygone auch alle Verticalen mit einander gemein haben, so hat man nichts weiter zu thun als auf der Verticalen m, $\frac{1}{2} l$ aufzutragen durch den Endpunkt gerade Linien nach den Endpunkten von l zu ziehen bis zum Schnitt mit der Verticalen des 1ten und letzten ($n$ten) $\sigma z'''$, von da Linien nach $\frac{1}{2} \Delta x_1$ und $\frac{1}{2} \Delta x_{n-1}$ bis zum Schnitt mit der Verticalen durch z'''_1 und z'''_{n-1} u. s. w., wie wir das schon öfters ausgeführt haben. Bei diesem Vorgehen werden die $\sigma z'''$ in der Mitte, wenn die Strahlen

sich der Richtungslinie der $\frac{1}{2}m$ nähern etwas ungenau, man muss daher bei den äussersten Strahlen beginnen und gegen die Mitte zu arbeiten; die mittelsten $\sigma z'''$ kann man dadurch bestimmen, dass man den Endpunkt des alten z''' mit irgend einem etwas entfernten z'''_i verbindet, und die Verbindungslinie bis zum Schnitt mit der Linie der $\frac{1}{2}\Delta x$ verlängert; die Linie von diesem Schnitt nach dem Endpunkt von $\sigma z'''_i$ schneidet dann auf dem z''' das $\sigma z'''$ ab, aus ganz elementaren Collineationsgründen.

Mit diesem neuen Polygon construiren wir nun ganz so wie es Nr. 4 gezeigt wurde, das Seilpolygon Taf. 16_3, in dem die Seiten des Seilpolygons zwischen den Verticalen durch die Endpunkte der Δs oder Δx senkrecht auf die entsprechenden Strahlen von Taf. 16_2 gezogen werden. Zwei aufeinanderfolgende Seiten unmittelbar vor und nach Δs schneiden auf den Verticallinien durch die Endpunkte des Bogens die Strecken $\frac{x\,\Delta x}{z'''\,\sigma}$ und $\frac{x'\,\Delta x}{z'''\,\sigma}$ ab, wie es Taf. 16_3 für die Lamelle 8 eingeschrieben ist. Irgend eine Polygonseite bei βl schneidet auf denselben Verticalen zwischen ihr und den Endpunkten des Seilpolygons die Segmente $\sum_0^{\beta l} x\,\frac{\Delta x}{\sigma z'''}$ und $\sum_{\beta l}^{l} x'\,\frac{\Delta x}{\sigma z'''}$ ab, wie es auch für die Polygonseite 4 5 also $\beta = 0{,}4$ angedeutet ist. In Folge dessen ist die Ordinate des Seilpolygons bei dem Angriffspunkt βl der Kraft ΔP gleich:

$$u'_\sigma = \frac{\beta' l \sum_\sigma^{\beta l} \frac{x\Delta x}{\sigma z'''} + \beta l \sum_{\beta l}^{l} \frac{x'\Delta x}{\sigma z'''}}{\beta' l + \beta l} = \frac{1}{\sigma}\left[\beta' \sum_0^{\beta l} x\,\frac{\Delta x}{z'''} + \beta \sum_{\beta l}^{l} x'\,\frac{\Delta x}{z'''}\right],$$

weil $\beta' l + \beta l = l$ ist.

Es ist also u'_σ der schon mit σ dividirte Factor von ΔP in der ersten Gleichung S. 579; die beiden äussersten Polygonseiten schneiden sich auf dem Schwerpunkt aller $\frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}}$ oder $\frac{\Delta x}{z'''}$ und bestimmen daher x_σ siehe Taf. 16_3.

Wir verbinden ferner alle Parallelen zu x (Horizontallinien) durch die Mitten von Δs mit einem Seilpolygon, dessen Seiten parallel mit den entsprechenden Seiten von Taf. 16_2 laufen (siehe Taf. 16_4).

Die Abschnitte auf der Horizontalen l sind gleich $\frac{y\,\Delta x}{\sigma\, z'''}$, siehe die Figur, und die äussersten Polygonseiten schneiden sich auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt σ und bestimmen dadurch y_σ . σ ist nun vollständig bestimmt.

Wir betrachten jetzt die Linie der $x\,\frac{\Delta x}{z'''\,\sigma}$ Taf. 16_3 als neues Kräftepolygon mit dem Schnitt der äussersten Polygonseiten als Pol, also x_σ als Poldistanz, und construiren damit das Seilpolygon Taf. 16_5, dessen Seiten zwischen den Verticallinien der Δs mit den Seiten des Kräftepolygons Taf. 16_3 parallel laufen. Ganz den Ergebnissen von Taf. 16_3 entsprechend, giebt dieses Polygon die folgenden Resultate: zwei aufeinanderfolgende Polygonseiten schneiden auf den Verticalen durch die Bogenenden die Produkte $x\,\frac{x\,\Delta x}{x_\sigma\,\sigma\,z'''}$ und $x'\,\frac{x\,\Delta x}{x_\sigma\,\sigma\,z'''}$ ab, siehe Taf. 16_5; bei der Abscisse βl ist die Ordinate des Polygons bezüglich der Schlusslinie, siehe die Fig., gleich:

$$u'_y = \frac{1}{x_\sigma\,\sigma}\left[\beta\sum_{o}^{\beta l} x^2\,\frac{\Delta x}{z'''} + \beta\sum_{\beta l}^{l} x'\,x\,\frac{\Delta x}{z'''}\right],$$

dem durch $x_\sigma\,\sigma$ dividirten Faktor von ΔP in der Gleichung — $\mathfrak{E}k$ S. 579; die äussersten Polygonseiten schneiden sich laut S. 409 auf der Verticalen des Antipols der Parallelen zur y Axe durch das Bogenende, wie es in der Figur angedeutet ist.

Ein Halbkreis, den wir, siehe die Figur, über der Entfernung des Antipoles von seiner Antipolaren beschreiben, schneidet daher auf der Verticallinie durch σ die halbe Entfernung der verticalen Tangente an die Elasticitätsellipse ab. Im vorliegenden Fall ist, weil der Bogen symmetrisch vorausgesetzt wurde, diese Entfernung die grosse Axe der Ellipse selbst.

Ferner betrachten wir die Linie der $y\,\frac{\Delta x}{\sigma\, z'''}$ Taf. 16_4 als neues Kräftepolygon, den Schnitt der äussersten Polygonseiten mit der Poldistanz y_σ als Pol, und construiren mittelst desselben das Polygon Taf. 16_6, indem die Polygonseiten zwischen den Verticallinien senkrecht auf die entsprechenden Strahlen von Taf. 16_4 gezogen werden. Zwei aufeinanderfolgende Polygonseiten schneiden auf den

Verticalen durch die Bogenenden die Produkte $x \frac{y}{y_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''}$ und $x' \frac{y}{y_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''}$ ab und eine Ordinate des Polygons ist gleich:

$$u'_x = \frac{1}{y_\sigma \sigma}\left[\beta' \sum_{0}^{\beta l} xy \frac{\Delta x}{z'''} + \beta \sum_{\beta l}^{l} x'y \frac{\Delta x}{z'''}\right],$$

dem durch $y_\sigma \sigma$ dividirten Faktor von ΔP in der Gleichung der $\mathfrak{E} h$ S. 579; die äussersten Polygonseiten schneiden sich laut Nr. 409 auf der Verticalen durch den Antipol der Parallelen zur x Axe durch das Bogenende.

Um diesen Antipol noch vollends zu bestimmen, betrachten wir die Linie der $\frac{y \Delta x}{z''' \sigma}$ Taf. 16_4 als Kräftepolygon, den Schnitt der beiden äussersten Polygonseiten als Pol, und construiren auf diese Weise mit der Poldistanz y_σ das Seilpolygon Taf. 16_7, dessen Eckpunkte auf der Horizontallinie durch die entsprechenden Δs und Eckpunkte von Taf. 16_4 liegen. Die äussersten Polygonseiten schneiden sich auf der Horizontalen durch den Antipol der x Axe, und dieser ist demnach jetzt vollständig bestimmt. Ein Kreisbogen über der Entfernung des Antipols von der Abscissenaxe schneidet auf der Senkrechten von σ die halbe Distanz der beiden zur x Axe parallelen Tangenten ab. Die Verbindungslinie dieses Antipols mit dem Punkte σ ist ein der x Axe conjugirter Durchmesser, und schneidet also auf den eben erwähnten Paralleltangenten die Berührungspunkte aus, und es kann jetzt die Centralellipse nach Nr. 100 ergänzt und gezeichnet werden.

Der Vollständigkeit wegen haben wir hier gezeigt wie die Elasticitätsellipse, die einen mehr demonstrativen Nutzen hat, construirt werden kann, zur Herstellung eines Kräfteplanes braucht man bei symmetrischen Bogen jedoch nur d i e j e n i g e n 5, nicht 6, Polygone zu zeichnen, welche zur Construction der u'_σ, u'_x, u'_y, des Schwerpunkts und der Antipole nothwendig sind. Sind diese ermittelt, so erhält man durch Substitution die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{E} \delta}{\sigma} = u'_\sigma \Delta P + u_\sigma \Delta A,$$

$$\frac{\mathfrak{E} h}{\sigma y_\sigma} = u'_x \Delta P + u_x \Delta A,$$

$$-\frac{\mathfrak{E}k}{\sigma x_\sigma} = u'_y \Delta P + u_y \Delta A.$$

Soll ΔA diejenige Widerlagerreaction sein, welche alle von ΔP herrührenden Formänderungen wieder aufhebt, so müssen die linken Seiten der obigen Gleichungen gleich 0 gesetzt werden und man hat:

$$\frac{u_\sigma}{u'_\sigma} = \frac{u_x}{u'_x} = \frac{u_y}{u'_y} = -\frac{\Delta P}{\Delta A}.$$

Da also $u_\sigma u_x u_y$, die senkrechten Abstände der Richtungslinie ΔA von dem Schwerpunkt σ und den bekannten Antipolen, $u'_\sigma u'_x u'_y$ proportional sein sollen, so kann diese Richtungslinie leicht construirt werden. Die für die Lamellengrenze 4 5 Taf. $16_{3\,5\,6}$ besonders markirten $u'_\sigma u'_x u'_y$ wurden Taf. 16_1 auf drei Parallellinien durch die Schwerpunkte und Antipole aufgetragen, die Verbindungslinien der Endpunkte dieser drei Linien schneiden dann auf den Verlängerungen der Seiten des durch den Schwerpunkt und die Antipole gebildeten Dreiecks, Punkte der gesuchten Richtungslinie aus. Wir ziehen die Linie und erhalten dadurch die $u_\sigma u_x u_y$; im Winkel, den u_σ und u'_σ mit einander bilden, wurde Taf. 16_1 mit der Länge ΔP die Reaction ΔA construirt.

In gleicher Weise erhält man die Richtungslinien der ΔA für alle übrigen ΔP; Taf. 16_1 wurde der Schnitt mit der Verticalen links angegeben, und die Strecken zwischen dem vorausgehenden und folgenden ΔA ausgezogen, der Inbegriff dieser Strecken giebt die eingezeichnete Umhüllungscurve, eine Art flache Ellipse. Dass die Curve die Verticale rechts berühre geht daraus hervor, dass die beiderseitigen Verticallinien durch die Stützpunkte als Richtungslinien von ΔP und ΔA, sich gegenseitig entsprechen. In der That verhalten sich, wenn ΔP durch den linkseitigen Stützpunkt geht, die unendlich kleinen $u'_\sigma u'_x u'_y$, wie die Abschnitte der ersten Seilpolygonseiten und der Schlusslinie auf der Verticalen des rechtseitigen Stützpunktes. Wegen des Parallelismus der äussersten Polygonseiten hat man demnach, siehe Taf. 16_5:

$$u'_\sigma : u'_x : u'_y = DM' : DM' : DY' = DM : DM : DY.$$

Diese trimetrischen Coordinaten sind gleich für die Eckpunkte σ und X Taf. 16_1, und verhalten sich zu der Ordinate von Y wie die Abstände dieser Punkte von der Verticalen durch den recht-

seitigen Stützpunkt, diese Verticale ist also die gesuchte Richtungslinie. Den Berührungspunkt der Umhüllungscurve auf ihr können wir nicht direct ermitteln; approximativ dadurch, dass wir die ΔP den Widerlagern möglichst nähern.

Die auf diese Weise in Richtung und Grösse bestimmten ΔA bilden nicht die ganze Widerlagerreaction, sondern man muss die verticalen Reactionen von ΔP durch die Stützpunkte zu den auf beiden Seiten wirkenden ΔA addiren. Es geschah dies für die ΔA_{45} .. und so erhielt man die eigentliche von ΔP herrührende Widerlagerreaction $\Delta A'$. Man kann diese auch direct erhalten, indem die trimetrischen Coordinaten derselben den Grössen $u''_\sigma\, u''_x\, u''_y$ Taf. 16_{356} proportional sind. Die erste der Gleichungen S. 579 kann nämlich dadurch, dass man die erste $\sum_{o}^{\beta l}$ gleich $\sum_{o}^{l} - \sum_{\beta l}^{l}$ setzt, auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\mathfrak{E}\,\delta}{\sigma} = \beta'\,\Delta P \sum_{o}^{l} x \frac{\Delta x}{\sigma z'''} - \Delta P \sum_{\beta l}^{l} (x - \beta l) \frac{\Delta x}{\sigma z'''} + u_\sigma\,\Delta A.$$

Wir bemerken, dass:

$$\sum_{o}^{l} x \frac{\Delta x}{\sigma z'''} = x_\sigma,$$

und

$$\sum_{\beta l}^{l} (x - \beta l) \frac{\Delta x}{\sigma z'''} = u''_\sigma,$$

ist; das erstere geht aus der Entstehung von x_σ hervor, und um die Richtigkeit der zweiten Gleichung zu zeigen, wurde die Bedeutung von $(x_8 - \beta l) \frac{\Delta x}{\sigma z'''_8}$ in Taf. 16_3 besonders eingezeichnet.

Setzt man nun in dieser Gleichung $\delta = 0$, substituirt in dieselbe die Werthe von x_σ und u_σ, und nimmt man endlich mit den zwei folgenden Gleichungen $-\frac{\mathfrak{E}h}{\sigma}$ und $-\frac{\mathfrak{E}k}{\sigma}$ dieselben Verwandlungen vor, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$0 = x_\sigma \beta'\,\Delta P - \nu u''_\sigma \frac{\Delta P}{\nu} + u_\sigma\,\Delta A,$$

$$0 = x_\sigma \beta' \Delta P - \nu u''_x \frac{\Delta P}{\nu} + u_x \Delta A,$$

$$0 = x_y \beta' \Delta P - \nu u''_y \frac{\Delta P}{\nu} + u_y \Delta A;$$

worin ν ein für jedes β und β' zu bestimmender Factor ist. $x_\sigma\, x_\sigma\, x_y$ und $u_\sigma\, u_x\, u_y$ sind die Perpendikel von den Punkten σ Y und Y auf die Richtungslinien der verticalen Widerlagerreaction $\beta' \Delta P$ und die Kraft ΔA; die Gleichungen können daher als das Resultat der Substitution der Coordinaten dieser drei Punkte in die Normalgleichung der Kräfte $\beta' \Delta P$, ΔA und ihrer Mittelkraft betrachtet werden: demnach ist $\frac{\Delta P}{\nu}$ die Mittelkraft derselben, $\nu u''_\sigma\, \nu u''_x$ und $\nu u''_y$ die Perpendikel von den drei Punkten σ X Y auf dieselbe, man erhält daher die Richtungslinie der totalen Widerlagerreaction, indem man sie mittelst der trimetrischen Coordinaten $u''_\sigma\, u''_x$ und u''_y bestimmt.

$\Delta A'$ ist demnach das mit $u''_\sigma\, u''_x\, u''_y$ construirte ΔA. Versteht man unter ΔA, $\beta' \Delta A'$ die ganze Normalform dieser Kräfte, so wird aus der Gleichung:

$$\Delta A = -\beta' \Delta P + \Delta A'_2$$

folgen:

$$\Delta A' = \Delta A + \beta' \Delta P;$$

d. h. $\Delta A'$ ist die totale Widerlagerreaction inclusive $\beta' \Delta P$, die wir zu construiren suchten.

Praktisch ist diese Bestimmung allein zu verwenden, man ermittelt diese Richtungen für zwei zu 1 sich ergänzenden β, sie müssen sich auf ΔP schneiden und in diesen Schnitt zerlegt man dieses direct nach den zwei gefundenen Richtungen, ohne vorher ΔA bestimmt zu haben.

Diese viel kürzere Construction ist leider nur anwendbar wenn ΔA sich frei nach ΔP gestalten, also den drei Gleichungen genügen kann und an gar keine Bedingungen, z. B. durch bestimmte Punkte zu gehen, geknüpft ist. Sobald ΔA gewissen Bedingungen zu genügen hat, z. B. durch bestimmte Punkte gehen muss, wie es in der Praxis meistens der Fall ist, so ist diese Construction nicht mehr zu gebrauchen und deshalb musste zuerst die allgemeine Methode entwickelt werden.

Wenn man in den Fall kommt den Kräfteplan eines Bogens zeichnen zu müssen, so führt man ihn nicht für den ganzen, sondern nur für den halben Bogen aus, um diese Hälfte in doppelten Maassstab zeichnen zu können. Da ferner die ersten und letzten Polygonseiten alle mit einander parallel laufen, so wird man bei dem Zeichnen der Polygone Taf. $16_{3\,4\,5}$, von einem und demselben Streifen in der Tafelecke links unten, und bei dem Zeichnen von Taf. $16_{4\,7}$ von der Verticalen im Scheitel des Bogens ausgehen. Hier schneiden die äussersten Seiten der letzten zwei Polygone Taf. $16_{4\,7}$ σ und X direct auf der Bogenmitte ab. Die symmetrischen Polygone Taf. $16_{3\,6}$ zeichnen sich ohne Schwierigkeit aus Taf. $16_{2\,4}$, um aber die unsymmetrischen umgeklappten und punktirten Hälften des Polygons Taf. 16_5 direct in dieser Lage zeichnen zu können, ist es nothwendig, auch den obern Theil des Kräftepolygons Taf. 16_3 mit dem es gezeichnet wurde, also die Segmente 7, 8, 9, 10 der Verticalen links ebenfalls herunter zu klappen. Dies kann auf die folgende Weise geschehen. Die Polygonseite 2 3 wird links bis zur Verticalen, wo sie den Punkt 2 3 ausschneidet, und rechts bis zur Bogenmitte verlängert und dann die Distanz d ihres Schnittes unter dem Pol x_σ zweimal über 2 3 aufgetragen, was mit der punktirten Strecke angedeutet ist, um den umgeklappten Punkt 8 9 zu erhalten. Denn wird der zu 2 3 symmetrische Strahl 8 9 um x_σ umgeklappt, so wird er nach der Umklappung mit 2 3 parallel laufen und um $2\,d$ über 2 3 liegen.

Soll der Bogen in möglichst grossem Maassstab gezeichnet werden und fällt in Folge dessen Y Taf. 16_1 über das Blatt hinaus, so können alle Reactionen bei symmetrischen Bogen auch mit dem Antipol Y' der rechtseitigen Reaction gezeichnet werden. In diesem Fall wird das von rechts aus construirte ΔB für $\beta = 0{,}4$ (von links 0,6) genau symmetrisch liegen mit ΔA für 0,4, die trimetrischen Coordinaten für dieses ΔB werden aber für den Fundamentalpunkt Y' des Bogens gleich (u'_y) und (u''_y) sein, und wegen der Symmetrie werden dies auch die Abstände dieses Fundamentalpunktes von der symmetrischen Seite 4 5 sein. Die Abstände u_σ und u_x ändern sich natürlich nicht. Bei symmetrischen Bogen kann man also alle Operationen auf dem halben Blatt ausführen; hat man aber den Punkt Y noch auf dem Blatt, so erhält man eine viel genauere Bestimmung der Reaction ΔA, denn der auf XY bestimmte Punkt liegt weit weg von den Punkten auf σY, σX und

XY, so dass er zur Richtungsbestimmung sehr nützlich ist. Unter allen Verhältnissen aber bieten die Verhältnisse:

$$2\,u'_\sigma = u'_y + (u'_y) \text{ und } 2\,u''_\sigma = u''_y + (u''_y),$$

eine werthvolle Controle für die richtig ausgeführte Zeichnung dar.

Diese Beziehungen zwischen den verschiedenen u ergeben sich auch durch directe Addition der treffenden Formeln. Da nämlich wegen der Symmetrie:

$$\sum_{0}^{\beta' l} x^2 \frac{\Delta x}{z'''} = \sum_{\beta l}^{l} x'^2 \frac{\Delta x}{z'''}, \text{ und } \sum_{\beta' l}^{l} x x' \frac{\Delta x}{z'''} = \sum_{0}^{\beta l} x x' \frac{\Delta x}{z'''},$$

ist, so erhält man wegen $x + x' = 2\,x_\sigma$:

$$\begin{aligned} u'_y + (u'_y) &= \beta' \sum_{0}^{\beta l} \frac{x^2}{x_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''} + \beta \sum_{\beta l}^{l} \frac{x x'}{x_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''} \\ &+ \beta \sum_{\beta l}^{l} \frac{x'^2}{x_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''} + \beta' \sum_{0}^{\beta l} \frac{x x'}{x_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''} \\ &= 2\,\beta' \sum_{0}^{\beta l} x \frac{\Delta x}{\sigma z'''} + 2\,\beta \sum_{\beta l}^{l} x' \frac{\Delta x}{\sigma z'''} = 2\,u'_\sigma. \end{aligned}$$

Für (u''_y) liest man aus der Figur:

$$(u''_y) = \sum_{0}^{\beta l} (\beta' l - x) \frac{x}{x_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''} = \sum_{\beta l}^{l} (x - \beta l) \frac{x'}{x_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''},$$

hinzu addirt:

$$u''_y = \sum_{\beta l}^{l} (x - \beta l) \frac{x}{x_\sigma} \cdot \frac{\Delta x}{\sigma z'''},$$

giebt:

$$u''_y + (u''_y) = 2\,u''_\sigma$$

139. Schnittlinie und Umhüllungscurve der Kräfte.

So wie wir jetzt die eine der beiden Widerlagerreactionen $\Delta A'$ ermittelt haben, kann auch die andere $\Delta A''$ construirt werden; beide müssen sich natürlich auf der Richtungslinie von ΔP schnei-

den. Auf Taf. 16 wurde der Bogen symmetrisch angenommen, in Folge dessen sind die $\Delta A'$ und $\Delta A''$ ebenfalls symmetrisch für gleich weit von den Enden der Bogen abstehende ΔP, die Bedingung des Schnittes der drei Kräfte in einem Punkt wird daher erfüllt, wenn die Verbindungslinie der Schnitte aller $\Delta A'$ mit den entsprechenden ΔP ebenfalls symmetrisch bezüglich der Bogenaxe ist. Diese Schnittlinie der Kräfte bildet innerhalb des Blattes eine sanft gekrümmte Curve über dem Bogen; wird sie aber verlängert, so hat sie im unendlich fernen Punkt der Verticallinie einen Doppelpunkt, dessen Asymptoten weit aussen zu beiden Seiten des Bogens liegen, ein weiterer Punkt im Unendlichen liegt in den Horizontallinien; wir schliessen das daraus dass, wie wir später bei analytischer Behandlung sehen werden, die Schnittlinie bei constantem $\varepsilon \Im \frac{\Delta x}{\Delta s}$ in einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt im unendlich fernen Punkt der Verticalen übergeht, und durch endliche Aenderung der Querschnitte wohl die Lage, nicht aber die Richtung der Asymptoten verändert werden kann.

Zieht man die Richtung jedes $\Delta A'$ zwischen jedem vorausgehenden und folgenden $\Delta A'$ aus, siehe Taf. 16_1, so erhält man die Umhüllungscurve aller $\Delta A'$. Schliessend aus der Analogie für constantes $\varepsilon \Im \frac{\Delta x}{\Delta s}$ können wir behaupten, die Curve habe ebenfalls einen unendlich fernen Doppelpunkt in der Verticallinie, und dann noch zwei unendlich ferne Punkte und einen weitern Doppelpunkt. Bei symmetrischen Bogen zerfällt die Curve in zwei symmetrische Aeste; in zwei Hyperbeln bei constantem $\varepsilon \Im \frac{\Delta x}{\Delta s}$.

Durch die Schnitt- und die Umhüllungslinie der Kräfte ist die Widerlagerreaction für alle ΔP gegeben. Aus dem Schnittpunkt irgend eines ΔP mit der Schnittlinie zieht man zwei Tangenten an die Umhüllungscurve, sie sind die Richtungslinien der Reactionen, und die directe Zerlegung von ΔP nach diesen Richtungen giebt wie es Taf. 16_1 ausgeführt ist, Grösse der Reactionen, ohne dass es nothwendig wäre, für ihre Ermittlung auf die Gleichungen zwischen $u\ u'$ und ΔP zurückzugreifen.

Mittelst dieser beiden Curven lässt sich auch die ungünstigste Belastung für den elastischen Bogen, d. h. diejenige Belastung

ermitteln, welche das Moment in Bezug auf gewisse Punkte zum Maximum machen. Die Punkte sind die Knotenpunkte bei versteiften Bogen, die höchsten und tiefsten Punkte des Kernes bei vollem Bogen. Taf. 16_1 haben wir bei der Lamelle 6 einen Schnitt durch die Construction geführt und es sei C der Punkt, in Bezug auf welchen die Momente der von der Belastung im Schnitt erzeugten Kräfte ein Maximum sein müssen, damit ein geschnittener Constructionstheil am ungünstigsten in Angriff genommen sei. Die durch C gehenden Tangenten an die Umhüllungscurve treffen die Kräfteschnittlinie in E und F. Ein ΔP vor E erzeugt im Schnitt ein unter C liegendes $\Delta A''$, das demnach negativ um diesen Punkt dreht. Dabei denken wir uns den Bogentheil links vom Schnitt entfernt, so dass sowohl die $\Delta A'$ als auch die $\Delta A''$ nach rechts gegen den Schnitt drücken. Ein ΔP zwischen E und dem Schnitt, erzeugt in diesem ein $\Delta A''$, das über C liegt und demnach positiv um C dreht. Ein ΔP zwischen dem Schnitt und F erzeugt in demselben ein $\Delta A''$, das ebenfalls über C liegt und positiv um diesen Punkt dreht. Endlich erzeugt ein ΔP zwischen F und dem rechten Widerlager im Schnitt ein ΔA, das unter C liegt, und demnach negativ um diesen Punkt dreht. Hieraus geht hervor, dass die ΔP zwischen E und F negativ, die ausserhalb positiv um C herumdrehen: die Mittelstrecke wird daher immer in entgegengesetzter Weise als wie die beiden äussern Strecken belastet sein müssen, damit der geschnittene Constructionstheil, dessen Inanspruchnahme vom Moment in Bezug auf C abhängt, am stärksten belastet sei.

Ist auf diese von Herrn Prof. *Winkler* herrührende Weise die ungünstigste Belastung bestimmt, so hat man noch, um die totale Widerlagerreaction zu erhalten, die von den einzelnen ΔP herrührenden $\Delta A'$ zusammenzusetzen. Um diese Zusammensetzung zu erleichtern, wurden Taf. 16_1 die sämmtlichen von gleich grossen ΔP herrührenden $\Delta A'$ und $\Delta A''$ mittelst eines Kräfte- und eines Seilpolygons zusammengesetzt, die keiner weitern Erläuterung bedürfen. Diese Polygone geben nun unmittelbar die von einer beliebigen Anzahl aufeinanderfolgenden ΔP herrührende Reaction. In der Praxis wird man nie mehr als wie zwei Gruppen solcher $\Delta A'$ oder $\Delta A''$ zu einer totalen Widerlagerreaction zusammenzusetzen haben. Diese totale Reaction zusammengesetzt mit den ΔP zwischen ihr und dem in Frage stehenden Schnitt, geben schliesslich die ausser-

halb eines Schnittes wirkende, und auf die verschiedenen Constructionstheile zu vertheilende Kraft, womit dann der Zweck des Kräfteplanes erreicht ist.

Kurz wollen wir noch der scheerenden und pressenden Kräfte und der Ausdehnung durch die Wärme erwähnen. Will man diese Kräfte und Verhältnisse berücksichtigen, so wird es am einfachsten sein, nach Nr. 134 S. 567 die parallele Verschiebung des Endquerschnittes, welche sie verursachten, zu construiren und durch ein besonderes ΔA, das den übrigen beizufügen ist, wieder aufzuheben. Setzt man statt $\mathfrak{E}$ wieder dessen ursprünglichen Werth $\varepsilon\, ab\, c$, so wird man die folgenden Ausdrücke zu construiren haben:

$$\varepsilon\, ab\, c\, \frac{\delta}{\sigma} = u_\sigma\, \Delta A = 0,$$

$$u_x : u_y = \frac{h}{y_\sigma} : -\frac{k}{x_\sigma},$$

$$\varepsilon\, ab \cdot \frac{c}{y_\sigma} \cdot \frac{h}{\sigma\, u_x} = -\,\varepsilon\, ab\, \frac{c}{x_\sigma} \cdot \frac{k}{\sigma\, u_y} = \Delta A.$$

Auf zwei Parallelen durch die Antipole X und Y mögen die Längen h und $-\frac{k\, y_\sigma}{x_\sigma}$ aufgetragen werden. Der Schnitt ihrer Verbindungslinie mit der Linie $X\, Y$ giebt einen Punkt von ΔA, der, wegen $u_\sigma = 0$, mit σ verbunden die Richtungslinie dieser Kraft giebt, auf der dann u_x und u_y direct abgegriffen werden kann. Indem man nun nach Fig. 22 S. 18 zwei Winkel mit den Sinusverhältnissen $\frac{c}{y_\sigma}$ und $\frac{h}{\sigma\, u_x}$ oder $\frac{c}{x_\sigma}$ und $\frac{k}{\sigma\, u_y}$ aufträgt, kann man $\varepsilon\, ab$ zweimal reduciren und auf diese Weise ΔA erhalten. $\sigma\, u_x$ und $\sigma\, u_y$ werden im Winkel, den l mit m bildet, construirt.

Bei diesen Reductionen muss natürlich darauf geachtet werden, dass die h und k um so viele Male vergrössert werden, als wie $\varepsilon\, ab$ nach Nr. 135 S. 568 verkleinert worden ist.

140. Bogen mit Widerlagerreactionen durch feste Punkte.

In den vorigen Nummern hatten wir vorausgesetzt, dass die ΔA beliebige Richtungen annehmen können und dass die Bogen

hinlängliche Dimensionen erhalten, um diesen ΔA widerstehen zu können; so ist es bei unversteiften Bogen mit festem Auflager. Häufig aber kommt es vor, dass die ΔA durch feste gegebene Punkte gehen müssen, z. B. bei versteiften Bogen durch den ersten Knotenpunkt, bei Bogen mit beweglichem Auflager durch den Mittelpunkt dieses u. s. w. In den meisten Fällen der Praxis sind solche Bogen symmetrisch construirt; das ΔA muss dann durch beide Auflager gehen, denn gesetzt den Fall, es ginge nicht durch den einen oder durch den andern Stützpunkt, so würde es Drehung um denselben verursachen, während vorausgesetzt wird, er könne einer solchen nicht widerstehen. Wir dürfen also für solche Bogen ΔA horizontal annehmen.

Dagegen greift das ΔA häufig nicht in der theoretischen Bogenaxe an; bei einem versteiften Bogen z. B. liegt die Axe im Schwerpunkte der Querschnittsfläche des Bogens und obern horizontalen Streckbaumes, also mehr oder weniger hoch über dem eigentlichen materiellen Bogen. Wie aber auch die Bogenformen sein mögen, im vorliegenden Falle werden die u_σ, u_x und u_y von vorn herein gegeben und für alle ΔA constant sein. Durch Variation von ΔA können wir daher nicht mehr den drei Gleichungen von Nr. 138 S. 579, sondern nur einer derselben genügen. Dem Nr. 137 S. 577 Entwickelten entsprechend, machen wir $h = 0$, indem wir die 2. Gleichung befriedigen, also setzen:

$$0 = u'_x \Delta P + u_x \Delta A.$$

Da die u_x constant sind, so gelangt man am leichtesten zu den Richtungslinien von $\Delta A'$ und $\Delta A''$, indem man für ΔP die Länge u_x annimmt, dann wird $\Delta A = -u'_x$. Trägt man dieses u'_x vom festen Stützpunkt des Widerlagers aus auf die Horizontale und fügt die Verticale $\beta' \Delta P = \beta' u_x$, construirt wie auf Taf. 16_6, hinzu, so erhält man $\Delta A'$, welches ΔP auf der Kräfteschnittlinie schneidet.

An die Stelle der Umhüllungscurve treten die beiden Angriffspunkte von ΔA, die Kräfteschnittlinie und diese beiden Punkte werden jetzt benutzt, um alle weitern Constructionen wie in der vorigen Nummer auszuführen; auch das ΔA, welches zur Aufhebung der durch die Temperaturänderungen, dann durch die scheerenden und pressenden Kräfte hervorgebrachten Formänderungen dient, wird genau in der gleichen Weise ermittelt.

Wollte man auch bestimmen, um wie viel die Bogenenden

sich gedreht haben, so wäre die umgekehrte Aufgabe zu lösen; jedes, aus der obigen Gleichung ermittelte ΔA wäre in die beiden Gleichungen:

$$\varepsilon\, ab\, \frac{c}{\sigma}\, \delta = u'_\sigma \Delta P + u_\sigma \Delta A,$$

$$-\varepsilon\, ab\, \frac{c}{\sigma} \cdot \frac{k}{x_\sigma} = u'_y \Delta P + u_y \Delta A,$$

zu substituiren und daraus δ und k zu suchen. k muss hauptsächlich bestimmt werden, um den Winkel $\frac{k}{l}$ zu erhalten, weil $\delta - \frac{k}{l}$ nach Nr. 137 S. 577 der Winkel ist, um den sich das eine, und $\frac{k}{l}$ der ist, um den sich das andere Widerlager gedreht hat. Nun ist aber in den meisten Fällen $x_\sigma = \frac{1}{2} l$.

Man erhält daher unmittelbar:

$$\varepsilon\, ab\, \delta = (u'_\sigma \Delta P + u_\sigma \Delta A) \frac{\sigma}{c},$$

$$-\varepsilon\, ab\, \frac{k}{l} = (u'_y \Delta P + u_y \Delta A) \frac{\sigma}{2c}.$$

Nachdem man $\frac{c}{\sigma}$ im Winkel $\frac{m}{l}$ (Taf. 16_2) construirt hat, reducirt man die oberen Momentenflächen auf diesen Hebelsarm $\frac{c}{\sigma}$, die unteren auf den doppelten Hebelsarm, und erhält dann unmittelbar die gesuchten Winkel in Bogenlängen vom Radius $\varepsilon\, ab$.

141. Drucklinie eines elastischen Bogens.

Hat man die $\Delta A'$ und $\Delta A''$ für alle Belastungen eines Bogens summirt, so kann man sie zu der totalen Widerlagerreaction A' und A'' zusammensetzen und mittelst derselben die Drucklinie der am Bogen wirkenden Kräfte zeichnen, wie es das Seil- und das Kräftepolygon (Fig. 201 und 202) zeigen. Die so für einen bestimmten elastischen Bogen eingezeichnete Drucklinie steht in einer eigenthümlichen Beziehung zur Axe desselben. Wir ge-

langen am leichtesten zu diesen Beziehungen, indem wir gleichzeitig zeigen, wie mit Umgehung der Summation aller ΔA und $\Delta A'$ das totale A und A' für eine beliebige, bestimmte Belastung construirt werden kann.

Wir verbinden die an einem Bogen wirkenden Belastungen ΔP durch eine beliebige Drucklinie, für die die Widerlagerreaction so angenommen wurde, dass sie sich der Axe des Bogens

Fig. 201.

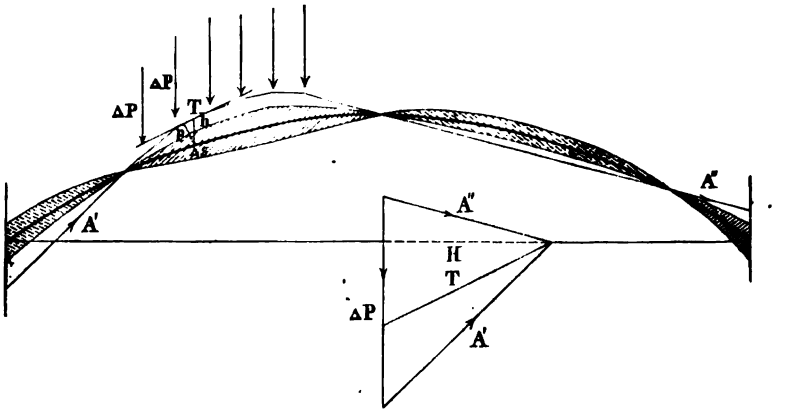


Fig. 202.

möglichst anschliesst. Ist dann die in einer Polygonseite wirkende Kraft, die bei einem Schnitt durch ein Bogenelement Δs ebenfalls geschnitten wird $= T$, so ist das Moment in Bezug auf die Mitte des Bogenelementes gleich $p\,T$, wenn mit p der Perpendikel von der Mitte Δs auf die Seilpolygonseite T bezeichnet wird. Zieht man nun h (Fig. 201) vertical, d. h. parallel zur Richtung der ΔP, und H (Fig. 202) senkrecht darauf, d. h. horizontal, so sind die Dreiecke $p\,h$ und $P\,H$ ähnlich, weil der Winkel $T\,h$ (Fig. 202) gleich dem Winkel $T\,\Delta P$ (Fig. 202) ist und beide Dreiecke ausserdem noch rechtwinkelig sind.

Es ist also das Moment der ausserhalb Δs wirkenden Kräfte gleich:

$$\mathfrak{P} = p\,T = h\,H.$$

Wir substituiren nun dieses $\mathfrak{P}$ in die allgemeinen Formeln, in denen wir uns noch $s\,\mathfrak{Z}$ wie früher durch $\mathfrak{E}\,z'''\,\frac{\Delta s}{\Delta x}$ gegeben und

den Bogen durch eine Kraft A in seine ursprüngliche Lage zurückgeführt denken; dann erhalten wir durch Division der Gleichungen mit σH, $y_\sigma \sigma H$ und $x_\sigma \sigma H$:

$$\frac{\mathfrak{E}\,\delta}{H\sigma} = \Sigma \frac{h\,\Delta x}{\sigma z'''} + \frac{A}{H} u_\sigma,$$

$$\frac{\mathfrak{E}\,h}{y_\sigma H \sigma} = \Sigma \frac{y}{y_\sigma} \cdot \frac{h\,\Delta x}{\sigma z'''} + \frac{A}{H} u_x,$$

$$-\frac{\mathfrak{E}\,k}{x_\sigma H \sigma} = \Sigma \frac{x}{x_\sigma} \cdot \frac{h\,\Delta x}{\sigma z'''} + \frac{A}{H} u_y.$$

$\frac{h\Delta x}{\sigma z'''}$ ist die, im Allgemeinen auf eine variable Basis $\sigma z'''$, reducirte Momentenfläche der Fig. 201 innerhalb einer Lamelle. Trägt man alle so erhaltenen, die Flächen von Lamellen darstellenden Linien als Kräftepolygon auf, so ist die Länge dieses Polygons $u'_\sigma = \Sigma \frac{h\,\Delta x}{\sigma z'''}$ und u_σ proportional. Construirt man mit diesem und der Poldistanz y_σ ein Seilpolygon, dessen Seiten auf den Horizontalen durch Δs liegen, so schneiden die äussersten Seiten dieses Polygons auf der Horizontalen des Endpunktes ein Segment $u'_x = \Sigma \frac{y}{y_\sigma} \cdot \frac{h\,\Delta x}{\sigma z'''}$ aus, das dem Moment dieser Flächen in Bezug auf diese Linie und u_x proportional ist.

Ebenso schneidet ein mit der Poldistanz x_σ construirtes Seilpolygon, dessen Ecken auf der Verticalen durch Δs liegen, auf der Verticalen durch den Endpunkt ein Segment $u'_y = \Sigma \frac{x}{x_\sigma} \cdot \frac{h\,\Delta x}{\sigma z'''}$ aus, das dem Moment derselben Flächen in Bezug auf die Verticale des Endpunktes und u_y proportional ist. Mittelst dieser u'_σ, u'_y und u'_x können nun gerade so, wie es in Nr. 138 S. 584 gezeigt worden ist, die Richtungslinie und Grösse von A bestimmt werden, durch das die angenommene Widerlagerreaction modificirt wird. Ist diese Reaction richtig angenommen worden, so werden die drei Summen u'_σ u'_x u'_y und mit ihm A gleich 0.

Sind zudem die z''' constant, so kann man auch den Factor $\frac{1}{\sigma z'''}$ weglassen, und die erste der Summen wird, weil die Seilpolygonseiten sich in Verticallinien über den entsprechenden Δx

schneiden, mathematisch genau gleich dem Inhalt der Flächen zwischen der Drucklinie und dem Bogen; die erste der Gleichungen sagt also, dass die Inhalte dieser Flächen über und unter dem Bogen gleich gross sind. In der Figur wurden die Flächen, innerhalb der die ausserhalb wirkenden Kräfte positiv um die Bogenaxe drehen, schraffirt, die negativen Momentenflächen punktirt. x und y sind die Coordinaten der Bogenelemente in Bezug auf Axen durch den Endpunkt; verschiebt man daher die Flächenelemente in den Verticallinien so, dass ihre Mitten in die Bogenaxe fallen, so müssen auch die Momente dieser Flächen gleich 0 sein.

Da nun die Flächensumme selbst gleich 0 ist, ihr Gewicht sich demnach auf ein unendlich fernes reducirt und die beiden Axen im Endlichen liegen, so kann dieser Bedingung nur dann genügt werden, wenn die Schwerpunkte der positiven und negativen, schraffirten und punktirten Flächen zusammenfallen, mit einem Wort, wenn das Mittelgewicht dieser Flächen gleich 0 ist.

Dass dieser Bedingung bei jeder beliebigen Belastung genügt werden könne, geht aus der eben durchgeführten Construction hervor, kann aber auch auf die folgende Weise anschaulich gemacht werden. Wir nehmen eine Widerlagerreaction in Richtung und Grösse willkürlich an und verbinden mit ihr die Belastungen ΔP; auf dem Wege der directen Flächenverwandlung mit paralleler Verschiebung der erhaltenen Drucklinien kann man leicht bewirken, dass die Flächen über und unter dem Bogen sich ausgleichen. Fallen nun die Schwerpunkte der positiven und negativen Flächen nicht zusammen, so kann man von irgend einem festen Punkte aus die relative Entfernung der beiden Schwerpunkte auftragen; dann die Widerlagerreaction ändern. Lässt man für verschiedene Richtungslinien der Reaction die Grösse derselben von a bis ∞ wachsen, so beschreibt der Endpunkt der relativen Entfernung eine Schaar von Linien, von den die durch den Ursprung gehende die wahre Richtung und Grösse bestimmt. Es ist klar, dass diese Constructionen nach der Regula falsa mit zwei Unbekannten viel umständlicher als die vorausgegangenen Constructionen sind.

Dass die Flächen zwischen der Drucklinie und dem Bogen zu beiden Seiten des letzten gleich gross sein müssen, kann auch mit den Worten ausgedrückt werden: es muss sich die Drucklinie dem Bogen innig anschmiegen und er muss dieselbe bei gewöhn-

lichen Bogenformen mindestens in drei Punkten schneiden, denn es lässt sich nicht denken, wie bei einem gewöhnlichen convexen Bogen der Schwerpunkt der beiden äussern in gleicher Weise belasteten Bogenenden mit dem Schwerpunkt der Mittelstrecke zusammenfallen sollten, wenn der Bogen durch nur zwei Schnittpunkte in drei Strecken getheilt wäre. Das mehr oder weniger Auseinandergehen der Curven zwischen diesen Schnittpunkten wird durch die Bedingung der Momentengleichheit näher bestimmt. Es ist z. B. auch klar, dass wenn die Form des Bogens als Drucklinie der Belastung entspricht, die beiden Linien zusammenfallen müssen. Denn da laut Nr. 46 S. 176 alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden Linien auf einer Geraden liegen müssen, so können sie deren nicht mehr als zwei gemein haben, ohne ganz zusammenzufallen.

Man ist also berechtigt, in allen Fällen, in welchen die Drucklinie ziemlich nahe zur Deckung mit der Bogenaxe gebracht werden kann, wie z. B. bei dem mittleren Theil von Gewölben, deren Eigengewicht im Verhältniss zur zufälligen Belastung sehr gross ist, eine Drucklinie einzuzeichnen, die sich der Bogenaxe möglichst nähert. In keinem Falle aber ist die Drucklinie durch die äussersten Fugenkanten zu führen.

Den Axen von hölzernen und eisernen Bogen ist die Form der Drucklinie zu geben, welche dem Eigengewicht entspricht (nicht die Form eines Kreissegmentes, wie es in Frankreich üblich ist), denn in diesem Falle wird das Eigengewicht sich gleichförmig auf alle Bogenschnitte vertheilen und den Bogen gar nicht auf Biegung in Anspruch nehmen. Es muss dann die Theorie der Elasticität nur zur Bestimmung der von der zufälligen Belastung herrührenden Inanspruchnahme benutzt werden.

Herr Prof. *Ritter* von Riga hat die Gleichheit der Flächen und Momente dazu benützt, um für Parabelbogen mit gleichmässiger Belastung in äusserst sinnreicher Weise die Reactionen zu construiren. Da wir es vorziehen, in diesem Falle die Reactionen ein für alle Mal zu rechnen, was in dem nächsten Kapitel geschehen wird, so müssen wir es ihm selbst überlassen, seine Methoden gelegentlich zu veröffentlichen.

Die eben mitgetheilte Methode der Construction von A für eine bestimmte Belastung scheint sehr kurz zu sein, indem man bereits mit zwei Polygonen zum Ziele gelangte; allein in Wirk-

lichkeit ist sie doch nicht praktisch, denn um die Eckpunkte σ X Y und die Schnitt- und Umhüllungscurve der Kräfte zu erhalten, müssen die Polygone von Tafel 16, dennoch gezeichnet werden und für jede Belastungsart wiederum neue Polygone. Nur in speciellen Fällen, in welchen die ungünstigsten Belastungsarten von vorn herein bekannt sind und die Polygone aus wenig Linien bestehen, also bei geraden Balken, sind die Verwandlungen der Momentenflächen zweckmässig; wir werden sie im letzten 5. Kapitel anwenden.

Viertes Kapitel.

Die elastische Parabel bei constantem $\mathfrak{E} = \varepsilon \mathfrak{J} \frac{dx}{ds}$.

---

142. Allgemeine Formeln für die elastische Parabel bei constantem $\mathfrak{E}$.

In Nr. 136 S. 572 waren wir zu den folgenden drei Fundamentalformeln gelangt:

$$\delta = \Sigma \mathfrak{P} \frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}}; \quad h = \Sigma (y - y_1) \mathfrak{P} \frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}}; \quad -k = \Sigma (x - x_1) \mathfrak{P} \frac{\Delta s}{\varepsilon \mathfrak{J}},$$

um die Drehung und die Aenderung der Lage des Endpunktes eines am andern Ende befestigten Bogens zu bestimmen. Wir haben dann gezeigt, wie ganz im Allgemeinen für veränderliche $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{J}$ die Aufgabe graphisch gelöst werden könne. Um dieselben Aufgaben analytisch zu lösen, haben wir innerhalb der Strecken, für welche das Moment analytisch als Function von x oder s ausgedrückt werden kann, statt Δs, ds zu setzen und die Σ Zeichen durch $\int$ Zeichen zu ersetzen.

Die Integration ist aber mit einigen Schwierigkeiten verbunden und man hat sich viel damit geplagt, für constante Querschnitte für Kreis- und für Parabelbogen diese Integrationen auszuführen. Bei veränderlichen Querschnitten und bei veränderlichen Trägheitsmomenten sind einzig allein die graphischen Methoden, die

wir in den vorigen Nummern entwickelt haben, am Platze, und das um so mehr, als die Voraussetzungen, die jederzeit gemacht werden, um die Aenderungen analytisch auszudrücken, so wenig zutreffen, dass die graphische Methode sicher genauere Resultate liefert. Die analytische Methode halten wir nur dann für passend, wenn die obigen Integrale auf einfache Formen zurückgeführt werden können.

Wir nehmen also zunächst an, die Belastung durch das Eigengewicht sei eine gleichförmige, dann muss die Bogenaxe laut Nr. 141 S. 597 eine parabolische sein, um das Eigengewicht nicht berücksichtigen zu müssen. Die nach Umständen streckenweise Belastung, mit der wir es im Folgenden allein zu thun haben werden, wird ebenfalls innerhalb jeder Strecke gleichförmig angenommen. Am meisten aber trägt zur Vereinfachung die Annahme bei, dass vom Scheitel gegen das Widerlager hin das Trägheitsmoment eines Querschnittes im Verhältniss der Länge eines Bogenelementes zu seiner Projection zunehme. Alle Bogenquerschnitte nehmen vom Scheitel gegen das Widerlager hin zu, und zwar in viel grösserem Verhältniss, als in dem von ds zu dx; die unter dieser Voraussetzung berechneten Bogen werden daher den wirklichen näher stehen, als wie die constanten Querschnitte, die der Rechnung gewöhnlich zu Grunde gelegt werden.

Nimmt der Bogen im eben angedeuteten Verhältniss zu, so ist:

$$\mathfrak{E} = \varepsilon \mathfrak{J} \frac{dx}{ds},$$

eine Constante. Multiplicirt man die drei Fundamentalgleichungen mit dieser Gleichung, so werden sie:

$$\mathfrak{E}\, \delta = \Sigma \int \mathfrak{P}\, dx,$$

$$\mathfrak{E}\, h = \Sigma \int (y - y_1)\, \mathfrak{P}\, dx,$$

$$-\mathfrak{E}\, k = \Sigma \int (x - x_1)\, \mathfrak{P}\, dx;$$

worin die $\int$ sich über die Strecken erstrecken, innerhalb deren das Gesetz des Belastungsmomentes sich nicht ändert und das Σ Zeichen das Aggregat aller dieser Integrale zusammenfasst.

Die Gleichung des Parabelbogens sei:

$$\frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2} = \beta^2.$$

Die Coordinaten des festen Endpunktes des Bogens seien $+ l, f$; die des beweglichen $x_1, y_1 = -l, \gamma f$; wir setzen γf und nicht f, weil häufig die Axe des Bogens, die parabelförmig angenommen wird, nicht mit dem Endpunkte, in welchem der Bogen aufsitzt, zusammenfällt.

Es ergeben sich dann zunächst die Dimensionen der Elasticitätsellipse und die Coordinaten des Fundamentaldreiecks wie folgt:

Die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$x_\sigma = 0, \quad y_\sigma = \int_0^l y\, dx : \int_0^l dx = \frac{f}{l^3} \int_0^l x^2\, dx = \frac{1}{3} f;$$

die x Axe der Centralellipse:

$$k'^2 = \frac{1}{l}\int_0^l x^2\,dx = \frac{1}{3}\,l^2;\quad k' = 0{,}57735\,l;$$

die y-Axe:

$$k'^2 = \frac{1}{l}\int_0^l y^2\,dx - y_\sigma^2 = \frac{f^2}{l^5}\int_0^l x^4\,dx - \frac{1}{9}\,f^2 = \frac{4}{45}\,f^2,\quad k' = 0{,}29814\,f.$$

Die Gleichung der Elasticitätsellipse ist also im vorliegenden Falle:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}\,l^2} + \frac{(y-\frac{1}{3}f)^2}{\frac{4}{45}\,f^2} = \frac{x^2}{(,57735\,l)^2} + \frac{(y-\frac{1}{3}f)^2}{(,29814\,f)^2} = 1.$$

Der Parabelordinate $y = \frac{1}{3}f$ entspricht ebenfalls die Abscisse $x^2 = \frac{1}{3}\,l^2$, demnach liegen die Endpunkte der x Axe auf dem Parabelbogen. Die beiden übrigen Schnitte haben die Coordinaten:

$$\frac{\gamma}{f} = \frac{x^2}{l^2} = \frac{1}{15} = (0{,}2582)^2.$$

Die Ordinaten der Scheitel der kleinen Axe sind:

$$\frac{y}{f} = \frac{1}{3} \pm ,29814 = ,03519;\ ,63147.$$

Von den Fundamentalpunkten ist der Mittelpunkt der Ellipse bereits bekannt. Die Abscisse des Antipoles der Ordinate durch den Endpunkt $-\,l$ ist:

$$x = \frac{1}{3}\,l^2 : l = \frac{1}{3}\,l.$$

Und die Ordinate des Antipoles der Parabelsehne:

$$y = \frac{1}{3}\,f - \frac{4}{45}\,f^2 : \frac{2}{3}\,f = \frac{1}{5}\,f.$$

Den Antipol der Linie $y = \gamma f$ braucht man nie. Ueberhaupt haben wir diese Dimensionen nur ausgerechnet und in Fig. 203 zusammengestellt, um sie mit den graphisch construirten zu vergleichen. Der Vergleich zeigt, dass die Abweichungen ziemlich bedeutend sind, was auf die Benützung der graphischen Methoden hinweist.

Wie in Nr. 138 vorgehend, bestimmen wir zunächst die von der bei $\beta\,l$ wirkenden Verticallast ΔP herrührenden Widerlagerreaction ΔA. Das Moment dieser Kräfte ist im Sinne von Nr. 43 S. 171 die Summe der Normalgleichungen der Kraft.

Die Normalgleichung der Belastung $\Delta\,P$ inclusive ihrer verticalen Widerlagerreaction bei $-\,l$ ist laut Nr. 86 S. 340 von und nach $\beta\,l$ gleich:

$$\frac{1}{2}\left(1-\beta\right)\left(1+\frac{x}{l}\right) l\,\Delta P,\ \text{und}\ \frac{1}{2}\left(1+\beta\right)\left(1-\frac{x}{l}\right) l\,\Delta P.$$

Die Zeichen sind denen in der citirten Nummer entgegengesetzt, weil die x und $\beta\,l$ in entgegengesetzter Reihenfolge angenommen wurden.

Die Normalgleichung der Kraft ΔA ist gleich:

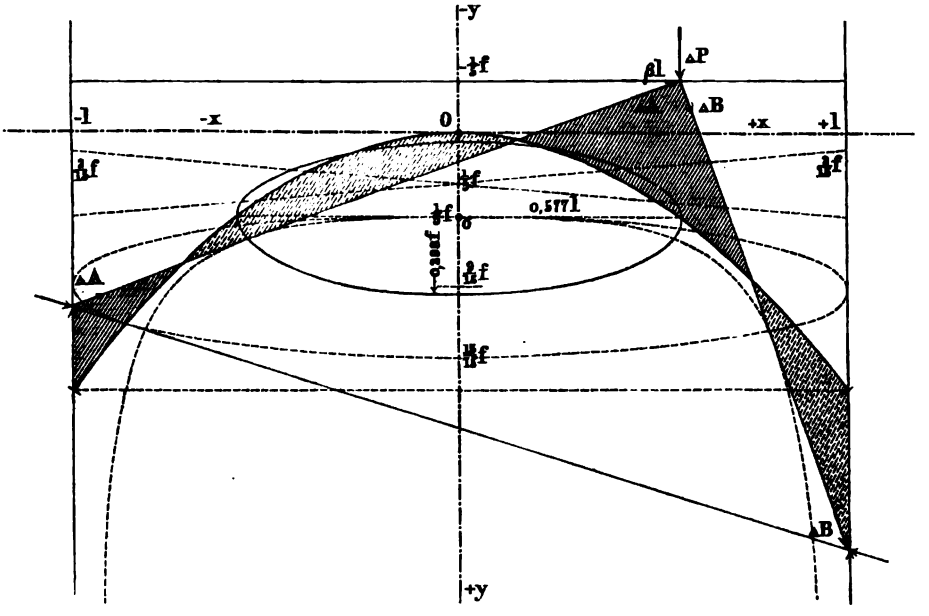
$$\frac{1}{\vartheta}(\xi x + \eta y + 1)\,\Delta A,$$

worin ξ und η die noch unbekannten Coordinaten der Richtungslinie von ΔA und ϑ den Normalfactor $= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ bezeichnet. Wir erhalten demnach die Summe der Gleichungen der von ΔP vor und nach β hervorgerufenen Kräfte:

$$\mathfrak{B} = \Delta\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(1-\beta)\left(1+\frac{x}{l}\right) l\,\Delta P + \frac{1}{\vartheta}(\xi x + \eta y + 1)\Delta A,$$

$$\mathfrak{B} = \Delta\mathfrak{B} = \frac{1}{2}(1+\beta)\left(1-\frac{x}{l}\right) l\,\Delta P + \frac{1}{\vartheta}(\xi x + \eta y + 1)\Delta A.$$

Fig. 203.



Die Substitution dieser Werthe in die allgemeinen Formeln giebt:

$$\mathfrak{E}\,\delta = 0 = \left[(1-\beta)\int_{-1}^{\beta}\left(1+\frac{x}{l}\right)dx + (1+\beta)\int_{\beta}^{+1}\left(1-\frac{x}{l}\right)dx\right]\frac{1}{2}\,l\,\Delta P$$

$$+ \frac{1}{\vartheta}\,\Delta A\int_{-1}^{+1}(\xi x + \eta y + 1)\,dx,$$

$$\mathfrak{E}\,h = 0 = \Big[(1-\beta)\int_{-1}^{\beta}\Big(1+\frac{x}{l}\Big)\Big(\frac{x^2}{l^2}-\gamma\Big)\,dx$$

$$+ (1+\beta)\int_{\beta}^{+1}\Big(1-\frac{x}{l}\Big)\Big(\frac{x^2}{l^2}-\gamma\Big)\,dx\Big]\frac{1}{2}\,f\,l\,\Delta P$$

$$+ \frac{1}{\vartheta}\,f\,\Delta A\int_{-1}^{+1}(\xi x+\eta y+1)\Big(\frac{x^2}{l^2}-\gamma\Big)\,dx,$$

$$-\mathfrak{E}\,k = 0 = \Big[(1-\beta)\int_{-1}^{\beta}\Big(1+\frac{x}{l}\Big)^2\,dx + (1+\beta)\int_{\beta}^{+1}\Big(1-\frac{x^2}{l^2}\Big)\,dx\Big]\frac{1}{2}\,l^2\,\Delta P$$

$$+ \frac{1}{\vartheta}\,l\,\Delta A\int_{-1}^{+1}(\xi x+\eta y+1)\Big(1+\frac{x}{l}\Big)\,dx;$$

oder nach Ausführung der angedeuteten Interationen:

$$\mathfrak{E}\,\delta = (1-\beta^2)\,\frac{1}{2}\,l^2\,\Delta P + \frac{1}{\vartheta}\Big(\frac{1}{3}\,f\eta+1\Big)\,2\,l\,\Delta A,$$

$$-\mathfrak{E}\,h = (1-\beta^2)\,(6\gamma-1-\beta^2)\,\frac{1}{12}\,f\,l^2\,\Delta P$$

$$+ \frac{1}{\vartheta}\Big[\frac{1}{5}\,(5\gamma-3)\,f\eta+3\gamma-1\Big]\,\frac{2}{3}\,f\,l\,\Delta A,$$

$$-\mathfrak{E}\,k = (1-\beta^2)\,(3+\beta)\,\frac{1}{6}\,l^3\,\Delta P + \frac{1}{\vartheta}\Big(\frac{1}{3}\,l\xi+\frac{1}{3}\,f\eta+1\Big)\,2\,l^2\,\Delta A.$$

143. Mit ΔP belasteter Parabelbogen bei festem Auflager.

Wie früher wollen wir zuerst annehmen, der Bogen sitze so breit und fest auf dem Widerlager, dass dieses im Stande ist, einem beliebigen ΔA zu widerstehen; dieses ΔA ist daher gar keiner Bedingung unterworfen und ist im Stande, die drei Gleichungen von δ, h und k gleich 0 zu machen. Der Punkt, der seine Lage nicht ändern und bei dem ein Schnitt durch den Bogen sich nicht drehen soll, ist der letzte Punkt der Axe, dessen Coordinaten l und f sind; man hat daher in den letzten Gleichungen $\gamma = 1$ zu setzen. Setzt man dann noch δ, h und $k = 0$ und sucht die unbekannten Grössen $\frac{\xi}{\vartheta}\,\Delta A$, $\frac{\eta}{\vartheta}\,\Delta A$ und $\frac{1}{\vartheta}\,\Delta A$, so findet man:

$$\frac{\xi}{\vartheta} l \Delta A = -8(1-\beta^2)\beta \quad . \frac{1}{32} l \Delta P,$$

$$\frac{\eta}{\vartheta} f \Delta A = 15(1-\beta^2)^2 \quad . \frac{1}{32} l \Delta P,$$

$$\frac{1}{\vartheta} \Delta A = -(1-\beta^2)(13-5\beta^2) . \frac{1}{32} l \Delta P.$$

Die Addition dieser drei Gleichungen giebt die Normalform der gesuchten Widerlagerreaction, die nun vollständig bestimmt ist:

$$\frac{1}{\vartheta}(\xi x + \eta y + 1)\Delta A =$$

$$\left[-8\beta\frac{x}{l} + 15(1-\beta^2)\frac{y}{f} - 13 + 5\beta^2\right](1-\beta^2) . \frac{1}{32} l \Delta P.$$

Ist eine Gleichung auf die Normalform gebracht, so ist nach Nr. 43 S. 171 die Seitenkraft parallel zu $+x$ gleich dem positiven Coefficienten von y, gleich $\frac{15}{32}(1-\beta^2)^2 \frac{l}{f} \Delta P$, die Seitenkraft parallel zu $+y$ gleich dem negativen Coefficienten von x, gleich $\frac{1}{4}\beta(1-\beta^2)\Delta P$; und das Moment in Bezug auf den Ursprung ist gleich dem constanten Theil $-\frac{1}{32}(13-5\beta^2)(1-\beta^2) l \Delta P$.

Die von ihren Factoren befreite Gleichung der Richtungslinie der Kraft lässt sich auf die folgende Form bringen:

$$5\left(1-3\frac{y}{f}\right)\beta^2 - 4\frac{x}{l} . 2\beta - 13 + 15\frac{y}{f} = 0.$$

Diese Gleichung ersten Grades enthält die Constante β im zweiten Grade, demnach umhüllt die Richtungslinie von ΔA bei verschiedenem β eine Curve zweiter Ordnung. Nach den Regeln der analytischen Geometrie ist die Gleichung dieser Curve die Discriminante der Gleichung ersten Grades in Bezug auf β, also:

$$S = 5\left(1-3\frac{y}{f}\right)\left(13-15\frac{y}{f}\right) + 16\frac{x^2}{l^2} = 0,$$

d. h. die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{(y-{}^3/_5 f)^2}{({}^4/_{15} f)^2} = 1.$$

Diese Ellipse wurde ebenfalls in die Fig. 203 gezeichnet; aus der Gleichung geht hervor, dass die Curve die beiden Verticalen durch die Widerlager und die zwei Horizontallinien $y = \frac{1}{3} f$ und $= \frac{13}{15} f$ berührt. Da $y = \frac{1}{3} f$ die Ordinate des Punktes σ ist, so berührt diese Ellipse die Elasticitätsellipse in diesem Punkte.

Substituirt man die oben gefundene Normalgleichung von ΔA in die Gleichungen von $\Delta \mathfrak{A}$ und $\Delta \mathfrak{B}$ der vorigen Nummer, so erhält man die totalen Widerlagerreactionen in ihrer Normalform, nämlich:

$$\Delta\mathfrak{A} = [\ \ 8(2+\beta)\frac{x}{l} + 15(1+\beta)^2\frac{y}{f} + 8 - 5(1+\beta)^2](1-\beta)^2\frac{1}{32}\,l\,\Delta P,$$

$$\Delta\mathfrak{B} = [-8(2-\beta)\frac{x}{l} + 15(1-\beta)^2\frac{y}{f} + 8 - 5(1-\beta)^2](1+\beta)^2\frac{1}{32}\,l\,\Delta P.$$

Der Gleichung $\Delta\mathfrak{A}$ sowohl, als auch $\Delta\mathfrak{B}$ genügen die Coordinaten:

$$x = \beta l, \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{5}f.$$

Es ist also:

$$y + \frac{1}{5}f = 0$$

die Gleichung der Kräfteschnittlinie, einer Horizontallinie im $\frac{1}{5}$ des Pfeiles über dem Scheitel des Bogens.

Die Gleichung von $\mathfrak{A}$ lässt sich wie folgt schreiben:

$$0 = 5\,(3\frac{y}{f} - 1)\,(1+\beta)^2 + 4\frac{x}{l}\cdot 2\,(1+\beta) + 8\left(1+\frac{x}{l}\right).$$

Auch diese Gleichung enthält die Constante $1+\beta$. Bildet man die Discriminante derselben in Bezug auf $(1+\beta)$, so erhält man die Umhüllungscurve der geraden Linie bei variablem $(1+\beta)$. $\mathfrak{A}$ umhüllt die Curve:

$$S' = 5\,(3\frac{y}{f} - 1)\left(1+\frac{x}{l}\right) - 2\frac{x^2}{l^2} = 3\left(1+\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{-\frac{3}{2}l} + \frac{y}{\frac{1}{5}f} - 1\right) - 2 = 0.$$

Sie ist offenbar eine Hyperbel.

Die Verticale $x = -l$ ist eine Asymptote; die andere geht durch den Mittelpunkt $x = -l$, $y = \frac{1}{15}f$; durch die Axenabschnitte $x = -\frac{3}{2}l$ und $y = \frac{1}{5}f$; und durch den Endpunkt $x = l$, $y = \frac{1}{3}f$ der Tangente $y - \frac{1}{3}f = 0$, welche im Punkt $x = 0$ berührt wird.

In gleicher Weise erhält man die Gleichung von $\mathfrak{B}$:

$$0 = 5\,(3\frac{y}{f} - 1)\,(1-\beta)^2 - 4\frac{x}{l}\cdot 2\,(1-\beta) + 8\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

$\mathfrak{B}$ umhüllt die Hyperbel:

$$S' = 5\,(3\frac{x}{f} - 1)\left(1-\frac{x}{l}\right) - 2\frac{x^2}{l^2} = 3\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{\frac{3}{2}l} + \frac{y}{\frac{1}{5}f} - 1\right) - 2 = 0.$$

Die Verticale $x = l$ ist eine Asymptote; die andere geht

durch den Mittelpunkt $x = l$, $y = \frac{1}{15}f$,

durch die Axenabschnitte $x = \frac{3}{2}l$, $y = \frac{1}{5}f$,

durch den Endpunkt $x = -l$, $y = \frac{1}{3} f$ der den drei Curven gemeinschaftlichen Tangente $0 = y - \frac{1}{3} f$, welche im Punkte x berührt wird.

Alle diese Tangenten wurden in die Fig. 203 eingezeichnet. Die Berührungspunkte $\pm \frac{3}{2} l$ fallen jedoch über die Figur hinaus.

Die drei Curven S, S', S'' osculiren sich gegenseitig im Punkte $x = 0$, $y = \frac{1}{3} f$, denn sie können auf die folgende Form gebracht werden:

$$8 S' + S = 5 \left(3 \frac{y}{f} - 1\right) \left(8 \frac{x}{l} + 15 \frac{y}{f} - 5\right),$$

$$8 S'' + S = 5 \left(3 \frac{y}{f} - 1\right) \left(- 8 \frac{x}{l} + 15 \frac{y}{f} - 5\right),$$

$$S' - S'' = 10 \left(3 \frac{y}{f} - 1\right) \frac{x}{l}.$$

Da die Linie $3 \frac{y}{f} - 1 = 0$ die drei Kegelschnitte schon in demselben Punkte $\frac{x}{l} = 0$ berührt und die drei Sehnen:

$$\pm 8 \frac{x}{l} + 15 \frac{y}{f} - 5 = 0, \quad \frac{x}{l} = 0$$

durch denselben Punkt gehen, so fallen in diesen Punkt laut *Salmon Fiedler*, S. 287, 3mal 3 Punkte der 3 Curven zusammen. Je zwei der Curven können daher nur mehr je einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Diese drei Punkte liegen auf den drei eben angeschriebenen Sehnen und ihre Coordinaten sind:

$$\frac{x}{l} = \mp \frac{4}{5}, \quad \frac{y}{f} = \frac{19}{25}; \quad \frac{x}{l} = 0, \quad y = \infty.$$

Der Zusammenhang der Richtungen der drei Kräfte ΔA, $\Delta \mathfrak{A}$, $\Delta \mathfrak{B}$ lässt sich nun kurz symmetrisch wie folgt ausdrücken:

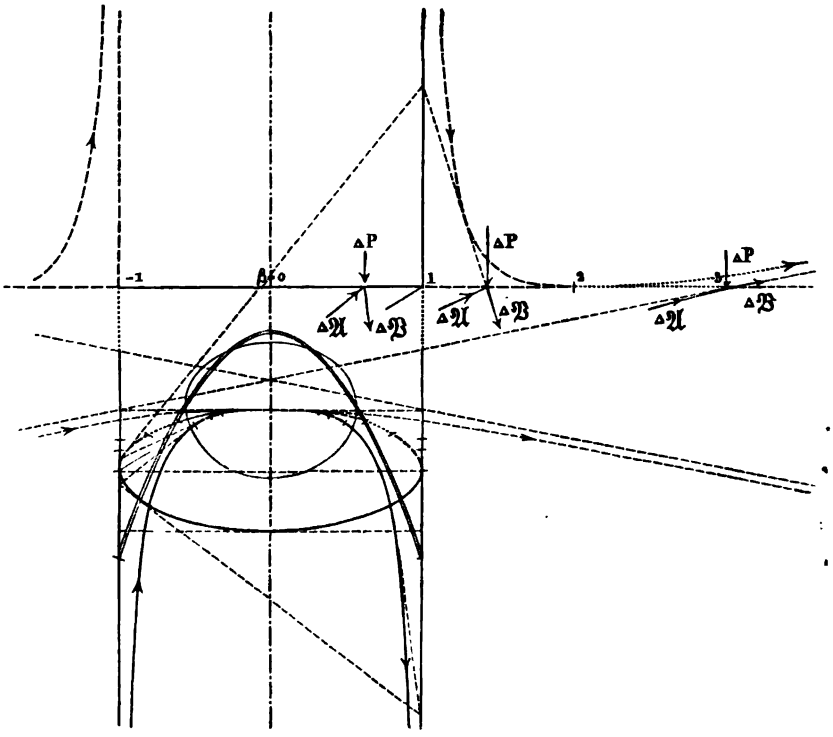
Das Dreieck dieser drei Richtungen ist dem Dreieck $y = -\frac{1}{5} f$, $x = \pm l$ mit unendlich fernem Eckpunkt einbeschrieben und umhüllt die drei Kegelschnitte $S S' S''$. Die drei Seiten des umschriebenen Dreiecks berühren je einen der Kegelschnitte und die drei Kegelschnitte berühren sich in einem und demselben dreifachen Punkte. Demnach bestimmen auch die drei Richtungslinien der Kräfte projectivische Gebilde auf den Dreieckseiten, denen sie einbeschrieben sind, und auf den Curven, denen sie umbeschrieben sind.

Es bietet einiges Interesse dar, die Seitenkräfte von ΔP nicht blos auf Angriffspunkte der Schnittlinie zwischen den beiden Widerlagern zu beschränken, sondern sie auch noch für ausserhalb liegende Angriffspunkte zu bestimmen, denn

wir waren ja in Nr. 139 S. 589 im Stande, einige Ergebnisse über den Verlauf der Umhüllungscurve zu verallgemeinern.

In Fig. 204 haben wir es versucht, das Entsprechen der verschiedenen Richtungen der ΔP, ΔA, ΔB, $\Delta \mathfrak{P}$, $\Delta \mathfrak{A}$, $\Delta \mathfrak{B}$ zu zeigen. Die Kräfteschnittlinie wird durch die vier Asymptoten der vorkommenden Hyperbeln, von denen zwei immer mit den verticalen Widerlagerreactionen zusammenfallen, durch ihre Berührungspunkte und den unendlich fernen Punkt in 7 Strecken getheilt, welche in der Figur auf vier verschiedene Weisen, und zwar symmetrisch gelegene Strecken in gleicher Weise ausgezogen worden sind. Diesen Strecken entsprechen in der

Fig. 204.



Ellipse ebenfalls symmetrische, auf den Hyperbeln und den verticalen Asymptoten aber unsymmetrische, und zwar immer einer langen Strecke auf der einen, eine kurze auf der andern.

Da alle Gebilde projectivisch sind, so folgen die verschiedenen Strecken auch in gleicher Ordnung aufeinander, und indem ΔP die Kräfteschnittlinie von $-\infty$ zu $+\infty$ beschreibt, beschreiben die Berührungspunkte jeder der übrigen Kräfte je ihre Umhüllungscurve. Hinsichtlich der Richtung drehen sich hierbei die ΔA stets in gleichem Sinne, weil sie eine Ellipse umhüllen. Für die Hyperbeln aber sind

die Asymptoten Wendetangenten, was den Drehungssinn betrifft, und was die Figur durch die Richtungen der Kräfte vor und hinter den Asymptoten der Hyperbel $\Delta\mathfrak{A}$ zeigt. Da in der Figur überall das Gleichgewicht von ΔA und $\Delta\mathfrak{A}$, dann von ΔB und $\Delta\mathfrak{B}$ mit der Widerlagerreaction dargestellt wurde, so stimmt die Richtungslinie dieser Kräfte einmal mit dem Sinne der Curven überein, einmal nicht. ΔB und $\Delta\mathfrak{B}$ stimmen überein, ΔA und $\Delta\mathfrak{A}$ nicht.

Für die Strecke $\beta = 0$ bis $+\infty$ dreht sich $\Delta\mathfrak{A}$ immer im gleichen positiven Sinne; $\Delta\mathfrak{B}$ nur bis zum rechtseitigen Widerlager $\beta = 1$, wo es vertical wird; dann dreht es sich in entgegengesetztem, negativem Sinne, bis es die andere Asymptote $\beta = 3$ erreicht, wobei es für $\beta = 2$ horizontal wurde und mit der Kräfteschnittlinie zusammenfiel. Von $\beta = 3$ bis $\beta = \infty$ dreht es sich wieder im positiven Sinne, um mit $\beta = \infty$ wieder horizontal zu werden, fällt aber jetzt nicht mehr mit der Kräfteschnittlinie, sondern mit der gemeinschaftlichen Osculationstangente der drei Curven zusammen. Auf der Strecke $\beta = 0$ bis $-\infty$ findet Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ statt.

144. Mit p gleichförmig belasteter Parabelbogen bei festem Auflager.

Um die totalen Widerlagerreactionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für gleichförmig vertheilte Belastungen zu ermitteln, setzen wir in den Formeln der vorigen Nummer:

$$\Delta P = p\, d.l\beta = lp\, .\, d\beta$$

und summiren, d. h. integriren die Gleichungen in Bezug auf β. Setzt man dabei in $\Delta\mathfrak{A}$ oder jetzt $d\,.\,\mathfrak{A}$ statt $1-\beta$, β', so sieht man sofort, dass die integrirte Gleichung den Factor β'^3 erhält und dass demnach die Gleichung nur β' und auch β im zweiten Grade enthält, wenn $1-\beta=0$ oder $\beta = 1$ als obere Grenze des Integrals angenommen wird. Wir erhalten daher einfachere Formen, wenn wir bei $\mathfrak{A}$ als obere Grenze des Integrals $+1$, d. h. eine von $\mathfrak{A}$ abstehende Belastung annehmen. Genau dieselben Schlüsse führen dazu, auch für $\mathfrak{B}$ eine abstehende Belastung oder als untere Grenze des Integrals -1 anzunehmen. Für jede nicht bis zum gegenüberliegenden Widerlager reichende Belastung erhält man dann die treffenden Widerlagerreactionen einfach durch Subtraction der für die Endpunkte der Belastung bestimmten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Wir führen die Integrationen aus und erhalten:

$$\mathfrak{A} \overset{+1}{=}_{\beta} [2\,(3+\beta)\,\frac{x}{l} + (8+9\beta+3\beta^2)\frac{y}{f} - (3+\beta)\beta]\,(1-\beta)^3\,.\,\frac{1}{32}l^2p,$$

$$\mathfrak{B} \overset{\beta}{=}_{-1} [-2(3+\beta)\,\frac{x}{l} + (8-9\beta+3\beta^2)\frac{y}{f} + (3-\beta)\beta]\,(1+\beta)^3\,.\,\frac{1}{32}l^2p.$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \overset{\beta}{=}_{-1} + \mathfrak{A} \overset{+1}{=}_{\beta} (-2\beta\,.\,\frac{x}{l} + \frac{y}{f} + \beta^2)\frac{1}{2}l^2p.$$

Die Gleichung der Richtungslinie der Kraft $\mathfrak{P}$ lässt sich auf die Form bringen:

$$(3\frac{y}{f}-1)(3+\beta)^2+2\left(\frac{x}{l}-\frac{9}{2}\frac{y}{f}+\frac{3}{2}\right)(3+\beta)+8\frac{y}{f}=0.$$

Sie umhüllt also die Curve:

$$\left(\frac{x}{l}-\frac{9}{2}\frac{y}{f}+\frac{3}{2}\right)^2-8\frac{y}{f}\left(3\frac{y}{f}-1\right)=0$$

Die Berührungspunkte auf den Tangenten $\frac{y}{f}=0$ und $\frac{y}{f}=\frac{1}{3}$ sind: $\frac{x}{l}=-\frac{3}{2}$ und $\frac{x}{l}=0$. Da die beiden Tangenten parallel laufen, so ist die Mitte zwischen den beiden Berührungspunkten $\frac{x}{l}=-\frac{3}{4}$ und $\frac{y}{f}=\frac{1}{6}$ der Mittelpunkt der Curve.

Die Gleichung kann daher auf die Asymptotenform:

$$\left(\frac{x}{l}+\frac{3}{4}\right)^2-9\left(\frac{x}{l}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{y}{f}+\frac{1}{6}\right)-\frac{15}{4}\left(\frac{y}{f}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2}{3}=0,$$

oder

$$\left[\frac{x}{l}+\frac{3}{4}-\left(\frac{9}{2}+2\sqrt{6}\right)\left(\frac{y}{f}-\frac{1}{6}\right)\right]\cdot\left[\frac{x}{l}+\frac{3}{4}-\left(\frac{9}{2}-2\sqrt{6}\right)\left(\frac{y}{f}-\frac{1}{6}\right)\right]+\frac{2}{3}=0,$$

oder

$$\left[\frac{y}{f}-\frac{1}{6}+\frac{4}{15}\left(\frac{9}{2}-2\sqrt{6}\right)\left(\frac{x}{f}+\frac{3}{4}\right)\right]\cdot\left[\frac{y}{f}-\frac{1}{6}+\frac{4}{15}\left(\frac{9}{2}+2\sqrt{6}\right)\left(\frac{x}{l}+\frac{3}{4}\right)\right]-\frac{8}{45}=0$$

gebracht werden.

Punkte dieser Asymptoten sind: auf der Tangente $y=0$, $\frac{x}{l}=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}=-1{,}5\mp0{,}8165$; auf der Tangente $\frac{y}{f}=\frac{1}{3}$, $\frac{x}{l}=\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}=\pm0{,}8165$; auf der Endtangente des Parabelbogens $2\frac{x}{l}+\frac{y}{f}+1=0$; $\frac{x}{l}=-1\pm\frac{1}{6}\sqrt{6}=-1\pm0{,}4082$, $\frac{y}{f}=1\mp\frac{1}{3}\sqrt{6}=1\mp0{,}8165$;

auf der Verticalen $\frac{x}{l}=-1$, $\frac{y}{f}=\frac{7}{15}\mp\frac{2}{15}\sqrt{6}=\frac{7}{15}\mp0{,}3266$;

auf der Ordinatenaxe $\frac{x}{l} = 0$, $\quad \frac{y}{f} = -\frac{11}{15} \pm \frac{2}{5}\sqrt{6} = -\frac{11}{15} \pm 0{,}9798$;

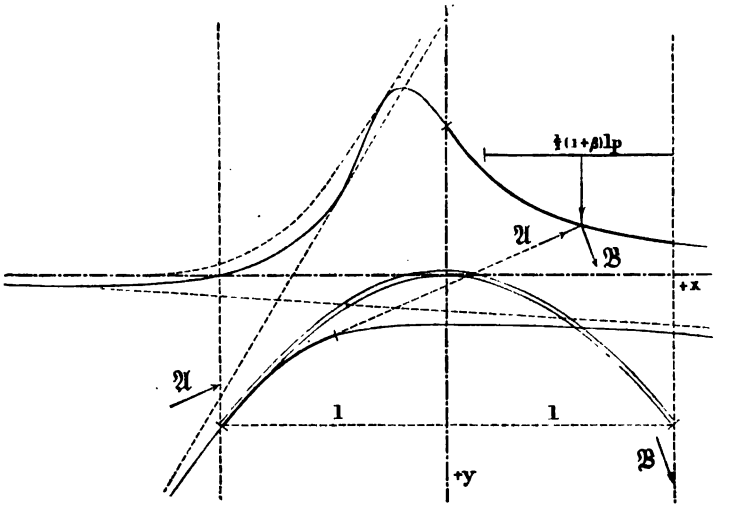
auf der Verticalen $\frac{x}{l} = 1$, $\quad \frac{y}{f} = -\frac{29}{15} \pm \frac{14}{15}\sqrt{6} = -\frac{29}{15} \pm 2{,}2862$.

Diese Werthe gelten auch für $\mathfrak{B}$, wenn man statt $+x$, $-x$ setzt. Die Hyperbeln wurden in Fig. 205 eingezeichnet; da bei Totalbelastung die Richtungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit den Tangenten an die Parabel zusammenfallen, so müssen auch die Hyperbeln diese Tangenten bei $\pm l$ berühren, in der That gibt die Substitution von $\beta = -1$ in $\mathfrak{A}$ und die von $\beta = +1$ in $\mathfrak{B}$, die Gleichungen der Parabeltangenten:

$$\pm 2\frac{x}{l} + \frac{y}{f} + 1 = 0.$$

Die Umhüllungscurve von $\mathfrak{B}_{\beta}^{+1}$ sowie von $\mathfrak{A}_{-1}^{\beta}$ ist eine Curve 5ter Classe, wir halten uns mit der Analyse derselben nicht auf, sondern begnügen uns damit, weiter unten in einer kleinen Tafel das Mittel zu geben, jenes kleine Stückchen derselben zu construiren, dessen man bedarf.

Fig. 205.



Die Umhüllungscurven von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genügen nicht um diese Richtungslinien vollständig einzeichnen zu können, wir müssen noch einen Punkt jeder Richtungslinie kennen, und rechnen die Schnittlinie der Kräfte aus; nämlich den Punkt, in welchem $\mathfrak{A}_{\beta}^{+1}$ die verticale Schwerlinie der von β bis 1 reichenden gleichförmigen

Last, also die Verticale: $x = \frac{1}{2}(\beta + 1)$ und zugleich $\mathfrak{B}_{\beta}^{+1}$ schneidet. Man erhält offenbar die Gleichung der Schnittlinie, wenn man aus dieser Gleichung und aus $\mathfrak{A}$ die Constante β eliminirt, d. h. in $\mathfrak{A}$ für β den Werth $2x - 1$ substituirt, indem wir statt $-\frac{x}{l}$ und $\frac{y}{f}$ schlechtweg x und y setzen.

Das Resultat dieser Substitution ist:

$$y = -\frac{x+1}{6x^2+3x+1} = -\frac{x+1}{N},$$

wenn man den immer positiven Nenner dieser Gleichung in N bezeichnet. Die Differentialquotienten ergeben sich nun hieraus wie folgt:

$$N^2\frac{dy}{dx} = 2(3x^2+6x+1) = 6\left(x+1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(x+1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

$$N^3\frac{d^2y}{dx^2} = -72(x^3+3x^2+x) = -18x(2x+3+\sqrt{5})(2x+3-\sqrt{5}).$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass (siehe Fig. 205) die Curve aus einem einzigen Ast besteht, weil auf jeder Ordinate nur ein einziger aber für jeden reellen Werth von x reeller Punkt liegt. Im Unendlichen berührt die Curve die Abscissenaxe, welche demnach der Curve einzige reelle Asymptote ist. Ausserdem hat die Curve drei reelle Inflexionspunkte die in einer geraden Linie liegen, und zwischen je zweien derselben einmal ein Maximum einmal ein Minimum, bei den folgenden Coordinaten:

	x	y	$\frac{dy}{dx}$
Die Inflexionspunkte	$-\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$	$+\frac{1}{5}(\pm\sqrt{5}-2)$	$(-1{,}6\pm 0{,}72\sqrt{5})$
	$-2{,}61803$	$+0{,}04721$	$+0{,}009969$
	$-0{,}38197$	$-0{,}84721$	$-3{,}209969$
	0	-1	$+2$
Das Maximum und Minimum	$\left(1\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\frac{1}{15}(\pm 4\sqrt{6}-9)$	0
	$-1{,}81650$	$0{,}05320$	0
	$-0{,}18350$	$1{,}25320$	0
Widerlagerpunkte	-1	$0{,}0$	$-0{,}25$
	$+1$	$-0{,}2$	$+0{,}2$

Diese Zahlen haben wir gegeben um den Verlauf der Curve zu zeigen, denn die Curve selbst braucht man natürlicher Weise nur zwischen $x = 0$ und $+1$.

Diese Kräfteschnittlinie steht in eigenthümlicher Beziehung zur Hyperbel, welche die Kräfte $\mathfrak{A}_{\beta}^{+1}$ umhüllt. Die Gleichung dieser Hyperbel kann auf die Form gebracht werden:

$$(15\,y + 18\,x + 11)^2 = 64\,(6\,x^2 + 9\,x + 4),$$

wenn, wie weiter oben, statt $\frac{y}{f}$, y und statt $\frac{x}{l}$, x gesetzt wird. Substituirt man in diese Gleichung die oben gefundene Ordinate y der Kräfteschnittlinie, und bringt die Gleichung auf 0 so erhält man ein vollständiges Quadrat; nämlich

$$(3\,x^3 + 6\,x^2 + 5\,x + 1)^2 = 0.$$

Dies bedeutet, dass diese beiden Curven in ihren drei gemeinschaftlichen Punkten sich nicht schneiden sondern nur berühren können.

Die drei Doppelwurzeln der Gleichung sind:

$$x = -\,,28194\,; \quad -\,,85903 \pm\,,38486\,\sqrt{-3}$$

Der reellen Wurzel entspricht die reelle Ordinate des Doppelpunktes mit seiner Tangente:

$$y = -\,1{,}13775\,; \quad \frac{dy}{dx} = -\,2{,}27550.$$

Zur Bestimmung der Widerlagerreactionen bedarf man übrigens nur kurzer Strecken dieser Curven, und wir haben die besondern Punkte derselben nur zur bessern Charakterisirung ausgerechnet. Will man sie wirklich gebrauchen, um die Widerlagerreactionen direct für verschiedene Belastungen zu construiren, und nicht erst so wie wir es am Schluss dieser Nummer zeigen werden, die Gleichungen sämmtlicher ausserhalb eines Schnittes wirkender Kräfte summiren und dann die Mittelkraft auftragen, so ist es am bequemsten, mittelst der folgenden kleinen Tabelle, 20 zusammengehörige $\mathfrak{A}^{+1}_{\beta}$ und $\mathfrak{B}^{+1}_{\beta}$ aufzutragen; sie genügen um mit mehr als hinlänglicher Genauigkeit für diese 20 Werthe von β, die Schnittlinie und die Umhüllungslinie zu zeichnen und hierauf für alle möglichen β die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ interpolliren zu können.

Die Tafel giebt, von $\beta = -1$ bis $+1$, die Ordinate des Schnittpunktes von $\mathfrak{A}^{+1}_{\beta}$ mit $x = -1$, die Coordinaten des Kräfteschnittpunktes und die Ordinate von $\mathfrak{B}^{+1}_{\beta}$ mit $x = +1$.

$-\beta$	$\mathfrak{A}_{\beta}^{+1}$ für $x=-1$	Kräfte-Schnittlinie.		$\mathfrak{B}_{\beta}^{+1}$ für $x=+1$	$+\beta$	$\mathfrak{A}_{\beta}^{+1}$ für $x=-1$	Kräfte-Schnittlinie.		$\mathfrak{B}_{\beta}^{+1}$ für $x=+1$
	$y=$	$x=$	$y=$	$y=$		$y=$	$x=$	$y=$	$y=$
0,0	1,0000	0,00	1,0000	1,0000	0,0	0,7500	0,50	0,3750	1,1250
0,9	0,9914	0,05	0,9013	1,0005	0,1	0,7290	0,55	0,3471	1,3312
0,8	0,9706	0,10	0,8088	1,0033	0,2	0,7097	0,6	0,3226	1,4355
0,7	0,9432	0,15	0,7256	1,0100	0,3	0,6919	0,65	0,3008	1,5722
0,6	0,9130	0,20	0,6522	1,0217	0,4	0,6755	0,70	0,2815	1,7572
0,5	0,8823	0,25	0,5882	1,0392	0,5	0,6604	0,75	0,2642	2,0190
0,4	0,8525	0,30	9,5328	1,0632	0,6	0,6465	0,80	0,2486	2,4144
0,3	0,8241	0,35	0,4847	1,0947	0,7	0,6337	0,85	0,2346	3,0768
0,2	0,7975	0,40	0,4430	1,1350	0,8	0,6220	0,90	0,2220	4,4051
0,1	0,7728	0,45	0,4067	1,1859	0,9	0,611	0,95	0,2105	8,4162
0,0	0,7500	0,50	0,3750	1,1250	0,0	0,600	1,00	0,2000	∞

Zerlegt man in dem Punkte der Kräfteschnittlinie, der über der Mitte einer mit p belasteten anstehenden Strecke liegt, die Belastung nach der Richtung der zwei Umhüllungscurven, so erhält man die entsprechenden zwei Widerlagerreactionen.

Aus den Differenzen zweier solcher Reactionen, d. h. aus der Zusammensetzung der Reactionen zweier anstehenden Strecken, von denen die eine, nämlich die der kürzern Strecke in entgegengesetztem Sinne zu nehmen ist, können die Reactionen irgend einer beliebigen nicht anstehenden Strecke ermittelt werden. Setzt man schliesslich noch eine so bestimmte Reaction mit der verticalen Last zusammen die zwischen ihr und zwischen irgend einem bestimmten Querschnitt liegt, so erhält man die ausserhalb dieses Querschnittes wirkende Kraft. Diese hat sich also aus der Zusammensetzung von drei Kräften ergeben.

Graphisch ist es weniger einfach, rechnerisch dagegen einfacher, die ausserhalb eines Querschnittes β wirkenden Kräfte für eine von β' bis β'' reichende Belastung dadurch zu ermitteln, dass man von den, der Totalbelastung für den Querschnitt β entsprechenden Bogenpressungen $\mathfrak{C}_{\beta}$, die $\mathfrak{A}_{\beta''}^{+1}$ und $\mathfrak{B}_{-1}^{\beta'}$ abzieht. Diese Methode liegt dem unten folgenden gerechneten Beispiel zu Grunde.

Der den letzten Entwickelungen zu Grunde liegende Standpunkt, wird also bei dem Zeichnen von Kräfteplänen selten eingenommen; da die zuletzt construirten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus der Integration der $\Delta P = p\, l\, \Delta\beta$ hervorgegangen sind, so folgt dass sie nichts anderes als wie die Mittelkräfte der einzelnen zu diesen ΔP gehörigen ΔA und ΔB sind. Da nun die beiden Hyperbeln, welche die ΔA und ΔB umhüllen ohnedies construirt werden müssen, um die ungünstigsten Belastungsarten zu bestimmen, so gelangt man viel einfacher zu den $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, indem man die von den einzelnen ΔP herrührenden ΔA und ΔB direct zusammensetzt, so wie es in Nr. 139 S. 590 gezeigt worden ist. Es ist dies auch das an der Schule hier allgemein geübte Verfahren.

Will man aber etwas grössere Genauigkeit erzielen, so kann man die Glei-

chungen der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche die ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte bilden, addiren und schliesslich die ganze Mittelkraft auftragen.

Dieses Verfahren wollen wir noch etwas ausführlicher behandeln. Mittelst der Umhüllungscurve und Schnittlinie der Kräfte sei die ungünstigste Belastung für einen Knotenpunkt gefunden worden; sie reiche von β' bis β'', und es sei die Summe der ausserhalb des Schnittes β, der vorerst zwischen β' und β'' vorausgesetzt wird, wirkenden Kräfte zu bestimmen.

Die Belastung zwischen β' und β erzeugt im Schnitt β, als Kraft ausserhalb des Schnittes, die Widerlagerreaction:

$$\underset{\beta'}{\overset{\beta}{\mathfrak{B}}} = \underset{-1}{\overset{\beta}{\mathfrak{B}}} - \underset{-1}{\overset{\beta'}{\mathfrak{B}}}.$$

Ebenso erzeugt die Belastung zwischen β und β'' als Kraft die Widerlagerreaction:

$$\underset{\beta}{\overset{\beta''}{\mathfrak{A}}} = \underset{\beta}{\overset{+1}{\mathfrak{A}}} - \underset{\beta''}{\overset{+1}{\mathfrak{A}}}.$$

Die totale auf den Schnitt wirkende Kraft $\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{T}}}$ ist demnach gleich:

$$\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{T}}} = \underset{-1}{\overset{\beta}{\mathfrak{B}}} + \underset{\beta}{\overset{+1}{\mathfrak{A}}} - \underset{-1}{\overset{\beta'}{\mathfrak{B}}} - \underset{\beta''}{\overset{+1}{\mathfrak{A}}}.$$

Es ist:

$$\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{C}}} = \underset{-1}{\overset{\beta}{\mathfrak{B}}} + \underset{\beta}{\overset{+1}{\mathfrak{A}}} = \left(- 2\beta \frac{x}{l} + \frac{y}{f} + \beta^2 \right) . \frac{1}{2} l^2 p$$

laut dem eben Gesagten nichts anderes als wie die von der totalen Belastung herrührende Kraft auf den Schnitt β, und umhüllt die Curve

$$\frac{y}{f} - \frac{x^2}{l^2} = 0,$$

also die gegebene Parabel, wie es sein muss. Es reducirt sich also $\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{T}}}$ auf:

$$\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{T}}} = \underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{C}}} - \underset{-1}{\overset{\beta'}{\mathfrak{B}}} - \underset{\beta'}{\overset{+1}{\mathfrak{A}}}.$$

Trifft der Schnitt auf eine unbelastete Strecke, so müssen laut Nr. 138 die beiderseitigen Belastungen bis zu dem Widerlager reichen und man hat offenbar:

$$\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{T}'}} = \underset{-1}{\overset{\beta'}{\mathfrak{B}}} + \underset{\beta'}{\overset{+1}{\mathfrak{A}}}.$$

Die beiden $\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{T}}}$ ergänzen sich zu $\underset{\beta}{\overset{\beta}{\mathfrak{C}}}$, wie es sein soll. Um die Berechnung der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu erleichtern, haben wir die auf Seite 614 und 615 mitgetheilte Tabelle berechnet, welche alle vorkommenden Coefficienten von β giebt, nämlich (Forts. S. 616):

Bogenzahlen

für feste Auflager.

β	a_β	Δ	$a_{-\beta}$	$-\Delta$	b_β	$b_{-\beta}$	$\pm\Delta$	c_β	Δ	$c_{-\beta}$	Δ	β
0,	6	1612	6	1588	8	8	1500	0	308	0,	292	0,
01	6,1612.	1636	5,8412.	1564	8,1500.	7,8500	1499	0,0308	324	0292	276	01
02	6,3248.	1660	5,6848.	1540	8,2999	7,7001.	1498	0,0632	342	0568	262	02
03	6,4908.	1684	5,5308.	1516	8,4497	7,5503.	1497	0,0974.	358	0830.	246	03
04	6,6592.	1708	5,3792.	1492	8,5994.	7,4006	1494	0,1332.	375	1076.	231	04
05	6,8300.	1732	5,2300.	1468	8,7488.	7,2512	1490	0,1707	394	1307	218	05
06	7,0032.	1756	5,0832.	1444	8,8978	7,1022.	1488	0,2101.	412	1525.	204	06
07	7,1788.	1779	4,9388.	1421	9,0466.	6,9534	1483	0,2513.	430	1729.	190	07
08	7,3567	1804	4,7967	1396	9,1949.	6,8051	1478	0,2943.	449	1919.	177	08
09	7,5371.	1827	4,6571.	1378	9,3427	6,6573.	1473	0,3392.	468	2096.	164	09
10	7,7198	1851	4,5198	1349	9,4900	6,5100.	1467	0,3860.	488	2260.	152	10
11	7,9049	1875	4,3849	1325	9,6367	6,3633.	1461	0,4348.	507	2412.	139	11
12	8,0924.	1898	4,2524.	1302	9,7828.	6,2172	1453	0,4855	528	2551	128	12
13	8,2822	1922	4,1222	1278	9,9281	6,0719.	1446	0,5383	549	2679	117	13
14	8,4744	1946	3,9944	1254	10,0727	5,9273.	1438	0,5932	570	2796	106	14
15	8,6690.	1969	3,8690.	1231	10,2165.	5,7835	1429	0,6502.	591	2902.	95	15
16	8,8659.	1992	3,7459.	1208	10,3594.	5,6406	1419	0,7093.	612	2997.	84	16
17	9,0651	2016	3,6251	1184	10,5013.	5,4987	1409	0,7705	635	3081	75	17
18	9,2667	2039	3,5067	1161	10,6422	5,3578.	1400	0,8340	657	3156	65	18
19	9,4706.	2062	3,3906.	1138	10,7822.	5,2178	1388	0,8997	680	3221	56	19
20	9,6768	2085	3,2768	1115	10,9210.	5,0790	1376	0,9677.	703	3277.	47	20
21	9,8853	2108	3,1653	1092	11,0586	4,9414.	1365	1,0380.	726	3324.	38	21
22	10,0961	2131	3,0561	1069	11,1951.	4,8049	1352	1,1106.	750	3362.	30	22
23	10,3092	2154	2,9492	1046	11,3303.	4,6697	1338	1,1856.	773	3392.	21	23
24	10,5246.	2176	2,8446.	1024	11,4641	4,5359.	1326	1,2629	799	3413	15	24
25	10,7422.	2199	2,7422.	1001	11,5967.	4,4033	1311	1,3428.	823	3428.	7	25
26	10,9621.	2221	2,6421.	979	11,7278	4,2722.	1297	1,4251.	848	3435.	0	26
27	11,1842.	2243	2,5442.	957	11,8575.	4,1425	1281	1,5099.	873	3435.	−7	27
28	11,4085	2266	2,4485	934	11,9856	4,0144.	1267	1,5972.	899	3428.	−15	28
29	11,6351.	2287	2,3551.	913	12,1123.	3,8877	1250	1,6871.	925	3415.	−19	29
30	11,8638	2309	2,2638	891	12,2373.	3,7627	1234	1,7796.	951	3396.	−25	30
31	12,0947	2331	2,1747	869	12,3607.	3,6393	1217	1,8747.	978	3371.	−30	31
32	12,3278	2353	2,0878	847	12,4824.	3,5176	1200	1,9725.	1004	3341.	−36	32
33	12,5631.	2374	2,0031.	826	12,6024.	3,3976	1182	2,0729	1032	3305	−40	33
34	12,8005.	2395	1,9205.	805	12,7206.	3,2794	1164	2,1761.	1059	3265.	−45	34
35	13,0400.	2416	1,8400.	784	12,8370	3,1630.	1146	2,2820.	1087	3220.	−49	35
36	13,2816	2437	1,7616	763	12,9516.	3,0484	1127	2,3907.	1115	3171.	−53	36
37	13,5253	2458	1,6853	742	13,0643.	2,9357	1108	2,5022.	1143	3118.	−57	37
38	13,7711.	2478	1,6111.	722	13,1751.	2,8249	1088	2,6165	1172	3061	−60	38
39	14,0189	2499	1,5389	701	13,2839.	2,7161	1068	2,7337.	1201	3001.	−63	39
40	14,2688	2519	1,4688	681	13,3907	2,6093.	1048	2,8538.	1229	2938.	−67	40
41	14,5207.	2539	1,4007.	661	13,4955	2,5045.	1028	2,9767	1260	2871	−68	41
42	14,7746.	2558	1,3346.	642	13,5983	2,4017.	1007	3,1027.	1288	2803.	−72	42
43	15,0304	2578	1,2704	622	13,6990	2,3010.	986	3,2315	1319	2731	−73	43
44	15,2882	2598	1,2082	602	13,7976	2,2024.	965	3,3634	1349	2658	−75	44
45	15,5480.	2617	1,1480.	583	13,8941	2,1059.	943	3,4983.	1379	2583.	−77	45
46	15,8097.	2635	1,0897.	565	13,9884	2,0116.	922	3,6362	1410	2506	−78	46
47	16,0732	2654	1,0332	546	14,0806.	1,9194	899	3,7772	1441	2428	−79	47
48	16,3386	2673	0,9786	527	14,1705	1,8295.	878	3,9213.	1471	2349.	−81	48
49	16,6059	2691	0,9259	509	14,2583.	1,7417	855	4,0684	1504	2268	−80	49
50	16,8750		0,8750	—	14,3438.	1,6562		4,2188.		2188.		50

Bogenzahlen

für feste Auflager.

β	a_β	Δ	$a_{-\beta}$	$-\Delta$	b_β	$\pm\Delta$	$b_{-\beta}$	c_β	Δ	Δ	$c_{-\beta}$	β
0,											0,	0,
50	16,8750		0,8750		14,3438.		1,6562	4,2188.			2188.	50
51	17,1459.	2709	0,8259.	491	14,4270.	832	1,5730	4,3722	1534	—82	2106	51
52	17,4186.	2727	0,7786.	473	14,5080.	810	1,4920	4,5288	1566	—82	2024	52
53	17,6930.	2744	0,7330.	456	14,5867.	787	1,4133	4,6886	1598	—82	1942	53
54	17,9691	2761	0,6891	439	14,6631	764	1,3369.	4,8517.	1631	—81	1861.	54
		2779		421		741			1662	—82		
55	18,2470.		0,6470.		14,7372		1,2628.	5,0179			1779	55
56	18,5265	2795	0,6065	405	14,8091.	719	1,1909	5,1874	1695	—81	1698	56
57	18,8077.	2812	0,5677.	388	14,8786.	695	1,1214	5,3602.	1728	—80	1618.	57
58	19,0905.	2828	0,5305.	372	14,9458.	672	1,0542	5,5362	1760	—80	1538	58
59	19,3749.	2844	0,4949.	356	15,0107.	649	0,9893	5,7156.	1794	—78	1460.	59
		2859		341		626			1826	—78		
60	19,6608		0,4608		15,0733.		0,9267	5,8982			1382	60
61	19,9483.	2875	0,4283.	325	15,1336.	603	0,8664	6,0842	1860	—76	1306	61
62	20,2373.	2890	0,3973.	310	15,1916.	580	0,8084	6,2736.	1894	—74	1232.	62
63	20,5277	2904	0,3677	296	15,2473.	557	0,7527	6,4662	1926	—74	1158	63
64	20,8197.	2920	0,3397.	280	15,3007.	534	0,6993	6,6623.	1961	—71	1087.	64
		2933		267		511			1994	—70		
65	21,1130.		0,3130.		15,3518		0,6482.	6,8617			1017	65
66	21,4077	2947	0,2877	253	15,4007	489	0,5993.	7,0645	2028	—68	0949	66
67	21,7038.	2961	0,2638.	239	15,4474	467	0,5526.	7,2708.	2063	—65	0884.	67
68	22,0012.	2974	0,2412.	226	15,4919.	445	0,5081	7,4804.	2096	—64	0820.	68
69	22,2999.	2987	0,2199.	213	15,5341	422	0,4659.	7,6935.	2131	—61	0759.	69
		2999		201		401			2164	—60		
70	22,5998		0,1998		15,5742		0,4258.	7,9099			0699	70
71	22,9010.	3012	0,1810.	188	15,6122.	380	0,3878	8,1298	2199	—57	0642	71
72	23,2033	3023	0,1633	177	15,6480.	358	0,3520	8,3532.	2234	—54	0588.	72
73	23,5068	3035	0;1468	165	15,6818.	338	0,3182	8,5800.	2268	—52	0536.	73
74	23,8115.	3047	0,1315.	153	15,7135.	317	0,2865	8,8102	2302	—50	0486	74
		3057		143		297			2337	—47		
75	24,1172.		0,1172.		15,7432.		0,2568	9,0439			0439	75
76	24,4240.	3068	0,1040.	132	15,7709.	277	0,2291	9,2811	2372	—44	0395	76
77	24,7317	3077	0,0917	123	15,7967	258	0,2033.	9,5217	2406	—42	0353	77
78	25,0405.	3088	0,0805.	112	15,8206	239	0,1794.	9,7658.	2441	—39	0314.	78
79	25,3502.	3097	0,0702.	103	15,8427	221	0,1573.	10,0133	2475	—37	0277	79
		3106		94		203			2510	—34		
80	25,6608		0,0608		15,8630		0,1370.	10,2643			0243	80
81	25,9723.	3115	0,0523.	85	15,8816	186	0,1184.	10,5188.	2545	—31	0212.	81
82	26,2846.	3123	0,0446.	77	15,8985	169	0,1015.	10,7767.	2579	—29	0183.	82
83	26,5976	3130	0,0376	70	15,9138	153	0,0862.	11,0380	2613	—27	0156	83
84	26,9115.	3139	0,0315.	61	15,9276.	138	0,0724	11,3028	2648	—24	0132	84
		3145		55		123			2682	—22		
85	27,2260.		0,0260.		15,9399.		0,0601	11,5710			0110	85
86	27,5412.	3152	0,0212.	48	15,9507	108	0,0493.	11,8427	2717	—19	0091	86
87	27,8570	3158	0,0170	42	15,9602	95	0,0398.	12,1178.	2751	—17	0074.	87
88	28,1734	3164	0,0134	36	15,9685.	83	0,0315	12,3963	2785	—15	0059	88
89	28,4904.	3170	0,0104.	30	15,9755	70	0,0245.	12,6782	2819	—13	0046	89
		3174		26		60			2853	—11		
90	28,8078		0,0078		15,9815.		0,0185	12,9635			0035	90
91	29,1257	3179	0,0057	21	15,9864.	49	0,0136	13,2522.	2887	—9	0026.	91
92	29,4440	3183	0,0040	17	15,9904.	40	0,0096	13,5442	2920	—8	0018	92
93	29,7627.	3187	0,0027.	13	15,9935.	31	0,0065	13,8397.	2955	—5	0013.	93
94	30,0817	3190	0,0017	10	15,9959.	24	0,0041	14,1384.	2987	—5	0008.	94
		3193		7		17			3021	—3		
95	30,4010.		0.0010.		15,9976.		0,0024	14,4405.			0005.	95
96	30,7205	3195	0,0005	5	15,9988.	12	0,0012	14,7458	3053	—3	0002	96
97	31,0402	3197	0,0002	3	15.9995.	7	0,0005	15,0545	3087	—1	0001	97
98	31,3601.	3199	0,0001.	1	15,9998	3	0,0002.	15,3664	3119	—1	0000	98
99	31,6800	3199	0,0000	1	16,0000.	2	0,0000	15,6816	3152	0	0000	99
1,	32	3200	0,	0	16	0	0	16	3184	0	0,	1,

$$a = 2(3+\beta)(1-\beta)^3, \qquad a = 2(3-\beta)(1+\beta)^3,$$
$$-\beta \qquad\qquad \beta$$
$$b = (8+9\beta+3\beta^2)(1-\beta)^3, \qquad b = (8-9\beta+3\beta^2)(1+\beta)^3,$$
$$-\beta \qquad\qquad \beta$$
$$c = \beta(3+\beta)(1-\beta)^3, \qquad c = \beta(3-\beta)(1+\beta)^3.$$
$$-\beta \qquad\qquad \beta$$

Die Summe der ausserhalb des Querschnittes β wirkenden Kräfte $\mathfrak{T}$ ergibt sich nun für eine von β' bis β'' reichende Belastung aus der Summe der drei folgenden Gleichungen, in denen das obere Zeichen für positive, das untere für negative β gilt:

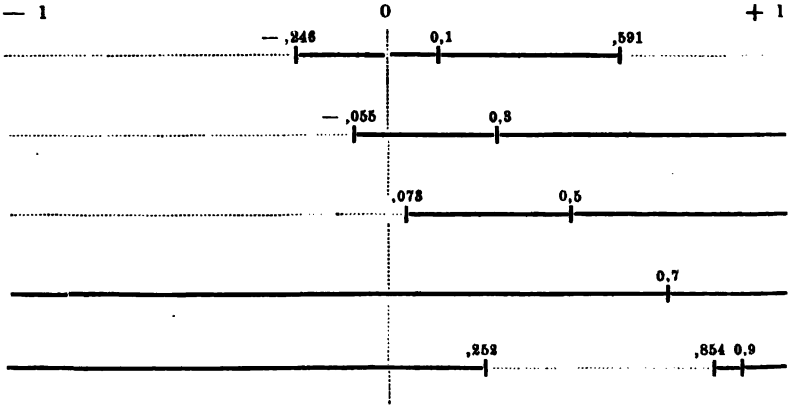
$$\mathfrak{T}_\beta = \begin{cases} +\mathfrak{C}_\beta = \\ -\mathfrak{B}_{-1}^{\beta'} = \\ -\mathfrak{A}_{\beta''}^{+1} = \end{cases} \begin{cases} -32\beta\,\frac{x}{l} + 16\,\frac{y}{f} + 16\beta^2 \\ +a_{\beta'}\,\frac{x}{l} - b_{\beta'}\,\frac{y}{f} \mp c_{\beta'} \\ -a_{-\beta''}\,\frac{x}{l} - b_{-\beta''}\,\frac{y}{f} \pm c_{-\beta''} \end{cases} \frac{1}{32}\,p.$$

Für Schnitte in unbelasteten Strecken fällt $\mathfrak{C}_\beta$ weg und die beiden untern Zeilen ändern ihr Zeichen, wir schreiben diesen Fall nicht besonders an.

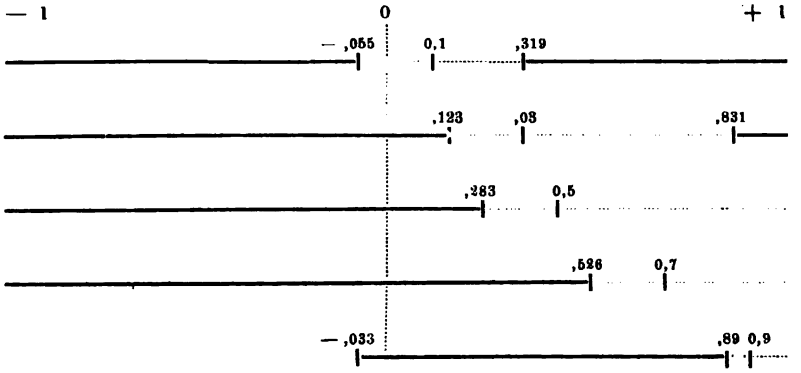
Es wird zweckmässig sein die auszuführenden Rechnungen durch ein Beispiel zu erläutern.

Mittelst der Umhüllungscurve und Schnittlinie der Kräfte fand man, dass für die Querschnitte 0,1; 0,3; 0,5; 0,7 und 0,9 die ungünstigsten Belastungen seien:

a) für die obern Fasern des Bogens:



b) für die untern Fasern des Bogens:



Um die auf die treffenden Querschnitte wirkenden Kräfte zu berechnen, setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{B}_{-1}^{\beta} + \mathfrak{A}_{\beta}^{+1} = \mathfrak{C}_{\beta} = -32\,\beta\,\frac{x}{l} + 16\,\frac{y}{f} + 16\,\beta^2$$

und erhalten dann die von der Belastung allein herrührenden Kräfte für die obern Fasern des Querschnitts 0,1; denen auch noch die von der Ausdehnung durch die Wärme verursachte Spannung beizufügen ist, wenn sie in diesem Querschnitt berücksichtigt werden muss, wir haben:

$$\mathfrak{T}_{0,1} = \mathfrak{C}_{0,1} - \mathfrak{B}_{-1}^{-0,246} - \mathfrak{A}_{,591}^{+1},$$

$$\mathfrak{C}_{0,1} = -3{,}2\,\frac{x}{l} + 16\,\frac{y}{f} + {,}16$$

$$-\mathfrak{B}_{-1}^{-,246} = +2{,}783\,\frac{x}{l} - 4{,}456\,\frac{y}{f} + {,}342$$

$$-\mathfrak{A}_{,591}^{+1} = -0{,}492\,\frac{x}{l} - 0{,}983\,\frac{y}{f} + {,}145$$

$$\mathfrak{T}_{0,1} = -\,{,}909\,\frac{x}{l} + 10{,}561\,\frac{y}{f} + {,}647.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf den im Scheitel des Bogens liegenden Ursprung der Coordinaten; um sie auf den Schwerpunkt des Querschnitts zu beziehen, haben wir statt der Constanten, das Resultat der Substitution der Coordinaten $x = \beta l = 0{,}1\,l$ und $y = \beta^2 f = 0{,}01\,f$ in obige Gleichung, oder $-\,{,}909\,.\,{,}1 + 10{,}561\,.\,{,}01 + {,}647 = +\,{,}662$ zu setzen; wir erhalten also die ausserhalb des Querschnitts wirkende, und auf seinen Schwerpunkt bezogene Kraft:

$$\mathfrak{T}'_{0,1} = -\,{,}909\,\frac{x}{l} + 10{,}561\,\frac{y}{f} + {,}662.$$

In gleicher Weise wurden alle übrigen $\mathfrak{T}$ berechnet und folgen hier:

a) Für die obern Fasern ist:

$$\mathfrak{T}_{0,1} = \mathfrak{C}_{,1} - \mathfrak{B}^{-,946}_{-1} - \mathfrak{A}^{+1}_{,591} = \left(- 0{,}909\,\frac{x}{l} + 10{,}561\,\frac{y}{f} + 0{,}662\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,3} = \mathfrak{C}_{,3} - \mathfrak{B}^{-0,55}_{-1} = \left(- 4{,}443\,\frac{x}{l} + 8{,}823\,\frac{y}{f} + 1{,}043\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,5} = \mathfrak{C}_{,5} - \mathfrak{B}^{,073}_{-1} = \left(- 8{,}768\,\frac{x}{l} + 6{,}909\,\frac{y}{f} + 1{,}079\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,7} = \mathfrak{C}_{,7} = \left(- 22{,}4\,\frac{x}{l} + 16{,}\,\frac{y}{f} + 0{,}\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,9} = \mathfrak{C}_{,9} + \mathfrak{B}^{,252}_{-1} - \mathfrak{B}^{,854}_{-1} = \left(- 12{,}234\,\frac{x}{l} + 11{,}679\,\frac{y}{f} + 1{,}089\right)\frac{1}{32}\,l^2p.$$

b) Für die untern Fasern ist:

$$\mathfrak{T}_{0,1} = \mathfrak{B}^{-,055}_{-1} + \mathfrak{A}^{+1}_{,319} = \left(- 3{,}060\,\frac{x}{l} + 10{,}707\,\frac{y}{f} - 0{,}675\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,3} = \mathfrak{B}^{,123}_{-1} + \mathfrak{A}^{+1}_{,831} = \left(- 8{,}093\,\frac{x}{l} + 9{,}897\,\frac{y}{f} - 1{,}056\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,5} = \mathfrak{B}^{,283}_{-1} = \left(- 11{,}476\,\frac{x}{l} + 12{,}024\,\frac{y}{f} - 1{,}108\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,7} = \mathfrak{B}^{,526}_{-1} = \left(- 17{,}583\,\frac{x}{l} + 14{,}555\,\frac{y}{f} - 0{,}552\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

$$\mathfrak{T}_{0,9} = \mathfrak{B}^{,890}_{-1} - \mathfrak{B}^{-,033}_{-1} = \left(- 23{,}005\,\frac{x}{l} + 8{,}470\,\frac{y}{f} - 1{,}075\right)\frac{1}{32}\,l^2p.$$

Sie zeigen, dass die verticalen und horizontalen Seitenkräfte immer positiv sind, dagegen drehen, wie es auch in der That sein muss, bei ungünstigster Belastung der obern Fasern die Momente positiv, und bei ungünstigster Belastung der untern Fasern negativ, um den Schwerpunkt des Querschnitts.

Das so berechnete $\mathfrak{T}$ wird schliesslich direct in den Querschnitt, nicht in die Ansicht des Bogens, die ja in der Regel in viel kleinerm Maassstab gezeichnet ist, eingetragen, und nach Nr. 105 S. 418 die ϱ für die äussersten Fasern bestimmt.

145. Graphisches Auftragen berechneter Kräfte.

Da bis jetzt noch nicht gezeigt worden ist wie Kräfte, deren Gleichungen gegeben sind, eingetragen werden, so soll das hier allgemein gezeigt werden. Es sei zu construiren, die Linie der homogenen Gleichung:

$$a\frac{x}{l}+b\frac{y}{f}+c=0.$$

Um die Linie aufzutragen, construiren wir ihre Axenschnitte $-\frac{cl}{a}$, und $-\frac{cf}{b}$, zu diesem Behufe tragen wir f und l auf einer Axe, — c auf der andern so auf, dass die Dreiecke cl und cf in den negativen Axenwinkel treffen wenn c positiv, und in den positiven wenn c negativ ist, im Uebrigen aber ist das Auftragen ganz gleichgültig. In Fig. 206 wurde f und l, auf der x Axe — c auf der y Axe aufgetragen; a und b werden mit ihren Zeichen allein mit Vertauschung der Axen, d. h. a auf der y, l auf der x Axe auf-

Fig. 206.

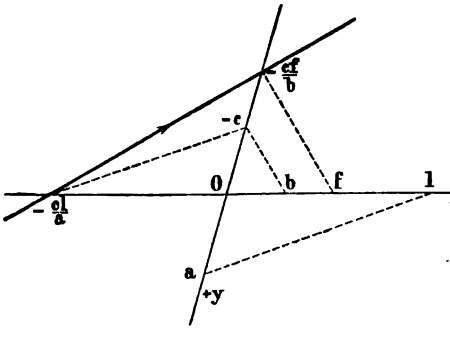
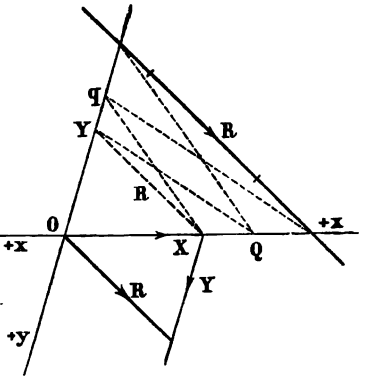


Fig. 207.



getragen. Parallelen durch $-c$ zu al und durch f zu $-cb$ schneiden die gesuchten Abschnitte aus, wie Fig. 206 es zeigt. Wird das so eben Gesagte bezüglich der Zeichen berücksichtigt, so sind gar keine andern Parallellinien möglich, und daher ein Irrthum unmöglich; wenn noch beachtet wird, dass cl und cf als Multiplicationsfactoren nach Nr. 2 S. 8 nie die Richtung von Parallelen bestimmen können.

Bei dieser Construction haben wir vorausgesetzt, es seien abc Linien, da aber die Gleichung in Bezug auf diese Grössen homogen ist, so können sie auch irgend eine andere Bedeutung haben, z. B. Kräfte sein, wie wir das sogleich zeigen werden, wären es Verhältnisszahlen $\alpha\beta\gamma$ so könnten diese in irgend einem Maassstab aufgetragen werden; es kommt also nur auf ihre Verhältnisse an.

Sollte der Linie nach Nr. 43 S. 172 ein Sinn beigelegt werden, so müsste es der auf der Linie mit einem Pfeil bezeichnete sein, weil die Linie so den drei Zeichen von $+a$, $+b$, $+c$ entsprechend positiv um die drei Ecken des Fundamentaldreiecks $0\,0$, $\infty\,0$, $0\,\infty$, herumdreht.

Es sei die mit ω', dem Sinus des Axenwinkels dividirte Normalgleichung einer Kraft gegeben:

$$-Yx + Xy + Qq = 0$$

Nach Nr. 43 S. 171 bedeutet dies, dass:

$$R = +\sqrt{X^2 + Y^2 + 2XY\omega}$$

die Kraft, X und Y die Seitenkräfte und $Q\,q\,\omega'$, das Moment der Kraft in Bezug auf den Ursprung sei.

Construirt man Fig. 207 gerade so als wie weiter oben in Fig. 206, so sind q und Q so aufzutragen, dass das Momentendreieck qQ in den negativen Axenwinkel trifft, X als Coefficient von y ist auf die x Axe und $-Y$ als Coefficient von x auf die y Axe, und zwar von O nach oben aufzutragen. Die Parallelen geben die Axenabschnitte und damit die Lage von R, die Grösse und Richtung von R aber ist gleich der der punktirten Verbindungslinie der Endpunkte der gebrauchten X und Y. Um sich davon zu überzeugen, hat man nun von O aus den Linienzug XY aufzutragen.

Die vorstehenden Constructionen haben wir noch der in der vorigen Nummer gegebenen Kraft:

$$\left(a\frac{x}{l} + b\frac{y}{f} + c\right)\frac{1}{32}\,l^2p,$$

anzupassen. Man könnte mit den gegebenen Verhältnisszahlen $a\,b\,c$ zuerst ganz wie in Fig. 206 die Linie zeichnen, hierauf $a\,.\,\frac{1}{32}$ als Seitenkraft $-Y$ construiren oder rechnen, wodurch dann auch R gegeben ist. Es dürfte jedoch zweckmässig sein, zuerst:

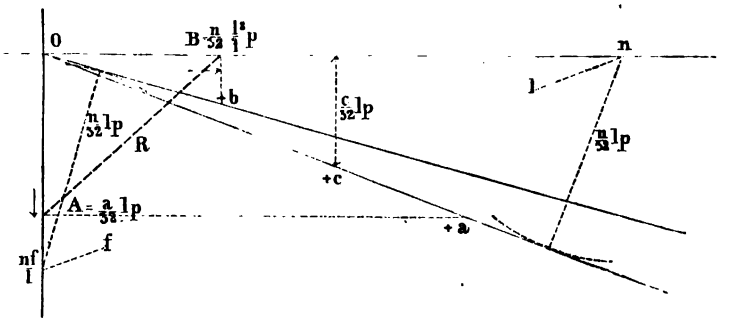
$$A = a\,.\,\frac{1}{32}\,lp, \quad B = b\,.\,\frac{1}{32}\,\frac{l^2}{f}\,p, \quad C = c\,.\,\frac{1}{32}\,lp,$$

und dann gerade so wie in Fig. 207 zu construiren. ABC werden mittelst Sinusverhältnisse construirt, welche letztern wohl am passendsten so wie Fig. 208 es zeigt, disponirt werden. Von der runden Länge $n = 10$ oder 20 Ctm. z. B. als Mittelpunkt beschreibt

man einen Kreis mit dem berechneten Halbmesser $\frac{n}{32} lp$, die Tangente von O an ihn hat das gewünschte Sinusverhältniss $\frac{1}{32} lp$; wird auf derselben von O aus a mit Berücksichtigung des Zeichens aufgetragen, so ist der Abstand des Endpunktes von a von der Abscissenaxe gleich $A = \frac{a}{32} lp$, und eine Parallele zu x durch diesen Endpunkt schneidet auf y den Punkt A aus.

Von n ziehen wir eine Parallele zur Verbindungslinie von l und f, welche auf dem Blatt immer vorhanden ist, aber in der Figur weggelassen wurde, beschreiben von dort aus einen Kreis mit dem gleichen Radius $\frac{n}{32} lp$, und die Tangente von O an ihn hat das Sinusverhältniss $\frac{1}{32} \frac{l^2}{f} p$ bezüglich der Ordinatenaxe. Wird daher von O aus b mit Berücksichtigung des Zeichens aufgetragen, so liegt b in der Ordinate von $B = \frac{b}{32} \frac{l^2}{f} p$. Die Verbindungslinie von A und B ist gleich R; auf der ersten Linie

Fig. 208.



kann man bei c die Länge $C = \frac{c}{32} pl$ abgreifen von O auf $-y$ auftragen, und nun die Figur nach 207 vollenden.

146. Mit ΔP belasteter Parabelbogen bei Reactionen durch feste Punkte.

Ganz dem entsprechend was im Eingang von Nr. 140 S. 592 gesagt worden ist, wird in diesem Fall ΔA in den Horizontalen $y = \gamma f$ angenommen, wo $\gamma < 1$ ist.

In Folge dieser Beschränkung kann man nur der mittelsten der drei Hauptgleichungen — $\mathfrak{E}h$, Nr. 142 S. 602 genügen. Da die Normalgleichung von ΔA:

$$(y - \gamma f)\,\Delta A = 0,$$

ist, so hat man in dieselbe zu substituiren:

$$\frac{\xi}{\vartheta} = 0, \qquad \frac{\eta}{\vartheta} = 1, \qquad \frac{1}{\vartheta} = -\gamma f,$$

und man erhält:

$$-\mathfrak{E}h = (1-\beta^2)(6\gamma - 1 - \beta^2)\frac{1}{12} f l^2 \Delta P -$$
$$(3\gamma^2 - 2\gamma + \frac{3}{5})\cdot\frac{2}{3} f^2 l\,\Delta A.$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$\alpha = 3\gamma^2 - 2\gamma + \frac{3}{5},$$

das leicht gerechnet aber auch in der Form $\alpha f^2 = 3(\gamma f - \frac{1}{3} f)^2 + \frac{4}{15} f^2$ $= [1{,}732051\,(\gamma f - \frac{1}{3} f)]^2 + (0{,}516398\, f)^2$ leicht construirt werden kann, so erhält man, wenn $h = 0$ gesetzt wird:

$$\Delta A = (1-\beta^2)(6\gamma - 1 - \beta^2)\cdot\frac{1}{8\alpha}\cdot\frac{l}{f}\,\Delta P.$$

Die Substitution dieses ΔA in die ursprünglichen Gleichungen von $\Delta \mathfrak{A}$ und $\Delta \mathfrak{B}$ S. 601 giebt:

$$\Delta \mathfrak{A} = \left[4(1-\beta)\left(1 + \frac{x}{l}\right) - (1-\beta^2)(6\gamma - 1 - \beta)\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\gamma - \frac{y}{f}\right)\right]\cdot$$
$$\frac{1}{8} l\,\Delta P,$$

$$\Delta \mathfrak{B} = \left[4(1+\beta)\left(1 - \frac{x}{l}\right) - (1-\beta^2)(6\gamma - 1 - \beta^2)\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\gamma - \frac{y}{f}\right)\right]\cdot$$
$$\frac{1}{8} l\,\Delta P.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen $\Delta \mathfrak{A}$ und $\Delta \mathfrak{B} = 0$, nach x und y giebt, als Coordinaten ihres Schnittpunktes:

$$x = \beta l, \qquad \gamma - \frac{y}{f} = -\frac{4\alpha}{6\gamma - 1 - \beta^2}.$$

Setzt man die Coordinaten der Kräfteschnittlinie gleich x' und y', so erhält man die Gleichung derselben wegen $\beta l = x'$

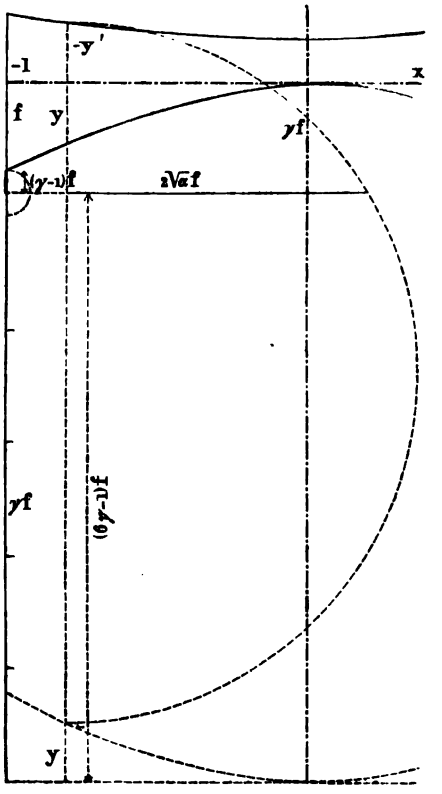
$$\left(6\gamma - 1 - \frac{x'^2}{l^2}\right)\left(\gamma - \frac{y'}{f}\right) = 4\alpha,$$

eine Curve 3. Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkt am Ende der Ordinatenaxe, und dann noch einen Punkt in jeder Ordinate. $x = \mp\sqrt{6\gamma - 1}\, l$, und $y' = \gamma f$ sind die 3 Asymptoten. Sie hat keine Inflektionspunkte: sie kann für jedes γ leicht gerechnet, aber auch leicht construirt werden in der Form:

$$[(6\gamma - 1) f - y]\ (\gamma f - y') = 4\alpha f^2,$$

weil $\frac{x'^2}{l^2} = \frac{y}{f}$ ist, wenn mit y die Ordinaten der vorhandenen Parabel bezeichnet werden.

Fig. 209.



Man trage von der Horizontalen die $(6\gamma - 1) f$ unter der Richtungslinie von ΔA liegt, die Ordinaten y nach oben auf, siehe Fig. 209 bezüglich dieses Auftragens; dann werden diese Punkte um die Länge $(6\gamma - 1)f - y$ unter ΔA und alle auf einer Parabel liegen, die der gegebnen symmetrisch ist. Auf ΔA wird von jeder Ordinate aus das eben construirte oder berechnete $f\sqrt{\alpha}$ doppelt aufgetragen, dessen Endpunkt mit dem früher construirten Punkt verbunden, und auf der Verbindungslinie ein Perpendikel errichtet (siehe die Figur), der auf der Ordinate die Länge $\gamma f + (-y')$ ausschneidet, dieser Schnittpunkt ist daher ein Punkt der gesuchten Schnittlinie.

Durch diese Kräfteschnittlinie sind jetzt die beiden Seitenkräfte $\Delta\mathfrak{A}$ und $\Delta\mathfrak{B}$ von ΔP vollständig bestimmt, weil die Umhüllungscurve einer jeden dieser Kräfte sich auf einen Punkt reducirt, indem sie durch die zwei Punkte $\pm l$, γf gehen.

Mittelst dieser Schnittlinie kann nun nach Nr. 139 S. 590 die ungünstigste Belastungsart für jeden Knotenpunkt, oder für jede äusserste Grenze eines Central-

kernes ermittelt, und sogar nach den Methoden von Nummer 139 die ΔP direct zerlegt und ihre Seitenkräfte $\Delta \mathfrak{A}$ und $\Delta \mathfrak{B}$ zur totalen Widerlagerreaction zusammengesetzt werden. Hier an der Schule geschieht dieses in der Regel, weil die Rechnungen complicirter als wie die in Nr. 144 sind; immerhin wollen wir in der nächsten Nummer die Integrationen für gleichförmig vertheilte Belastungen noch durchführen.

147. Mit P gleichförmig belasteter Parabelbogen, bei Reactionen durch feste Punkte.

Wie in Nr. 144 setzen wir $\Delta P = lp\, d\beta$, und integriren die in der vorigen Nummer erhaltenen Gleichungen für die Widerlagerreactionen. Aus den gleichen Gründen als wie früher, ist bei diesen Integrationen für $\mathfrak{A}$ als obere Grenze $+1$, und für $\mathfrak{B}$ als untere Grenze -1 anzunehmen; also wie dort die Reactionen für abstehende Belastungen zu bestimmen.

Die Integrationen geben die folgenden Resultate:

$$\mathfrak{A}_{\beta}^{+1} = \left\{ 1 + \frac{x}{l} - [3\gamma - 1 - (\gamma - 1)\ (1 - \beta) - \frac{1}{10}(4 + \beta)\ (1 - \beta)^2] \frac{1}{\alpha}\left(y - \frac{y}{f}\right)\right\} (1 - \beta)^2 \frac{1}{4} l^2 p,$$

$$\mathfrak{B}_{-1}^{\beta} = \left\{ 1 - \frac{x}{l} - [3\gamma - 1 - (\gamma - 1)\ (1 + \beta) - \frac{1}{10}(4 - \beta)\ (1 + \beta)^2] \frac{1}{\alpha}\left(\gamma - \frac{y}{f}\right)\right\} (1 + \beta)^2 \frac{1}{4} l^2 p,$$

$$\mathfrak{C}_{\beta} = \mathfrak{B}_{-1}^{\beta} + \mathfrak{A}_{\beta}^{+1} = [-2\beta \frac{x}{l} + \frac{1}{\alpha}(2\gamma - 0{,}4) \frac{y}{f} + 1 + \beta^2 - \frac{\gamma}{\alpha}(2\gamma - 0{,}4)] \frac{1}{2} l^2 p.$$

Da $\mathfrak{A}_{\beta}^{+1}$ und $\mathfrak{B}_{\beta}^{+1}$ durch die beiden festen Punkte $f\gamma$ gehen, so braucht man ihre Umhüllungscurve nicht zu bestimmen, und beide sind durch ihre Schnittlinie, die auf der Mitte der gleichformig vertheilten Belastung liegt, gegeben. Den Schnittpunkt der zu β bis 1 gehörenden Seitenkräfte erhält man daher, indem man in $\mathfrak{A}_{\beta}^{+1}$ $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}(\beta + 1)$ setzt, und die Gleichung der Schnittlinie, indem man nachher $\beta = 2\frac{x}{l} - 1$ setzt. Man gelangt daher auch direct zu diesen, indem man in $\mathfrak{A}_{\beta}^{+1}$, $\beta = 2\frac{x}{l} - 1$ setzt.

Wird nach der Substitution y bestimmt, so erhält man:

$$\left(\gamma - \frac{y}{f}\right) = \frac{\alpha\left(1+\frac{x}{l}\right)}{3\gamma - 1 - 2(\gamma-1)\left(1-\frac{x}{l}\right) - \frac{2}{5}\left(3+\frac{2x}{l}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)^2}.$$

$f\gamma - y$ ist, siehe vorige Nummer, nichts anderes als die Erhöhung der Schnittlinie über dem Bogenauflager; sie könnte construirt werden, allein es ist einfacher, sie für jedes γ zu rechnen und aufzutragen.

Für jede abstehende Belastung erhält man dann die Widerlagerreaction einfach dadurch, dass man die Belastung pl im Punkte der Schnittlinie über der Mitte der Belastung nach der Richtung der beiden Auflager zerlegt.

Mittelst vier solcher Zerlegungen, und dann durch graphische Zusammensetzung der erhaltenen Seitenkräfte von $\mathfrak{T}_{\beta}$, das so zusammengesetzt ist, wie es in Nr. 144 S. 613 angegeben ist, können graphisch alle $\mathfrak{T}_{\beta}$ zusammengesetzt werden.

Uebrigens kann man sie auch rechnen.

Da Jedermann Tafeln von Quadrat- und Cubikzahlen besitzt, so wurden zur Erleichterung der Rechnung nur die Werthe:

$$d_{-\beta} = \frac{1}{10}(4+\beta)(1-\beta)^4 \text{ und } d_{\beta} = \frac{1}{10}(4-\beta)(1+\beta)^4,$$

berechnet und auf Seite 626 tabellarisch zusammengestellt.

Weiter berechnet man dann:

$$a'_{-\beta} = (1-\beta)^2,$$

$$b'_{-\beta} = \frac{1}{\alpha}[(3\gamma-1)(1-\beta)^2 - (\gamma-1)(1-\beta)^3 - d_{-\beta}],$$

$$c'_{-\beta} = (1-\beta)^2 - \gamma b'_{-\beta},$$

$$a'_{\beta} = (1+\beta)^2,$$

$$b'_{\beta} = \frac{1}{\alpha}[(3\gamma-1)(1+\beta)^2 - (\gamma-1)(1+\beta)^3 - d_{\beta}],$$

$$c'_{\beta} = (1+\beta)^2 - \gamma b'_{\beta}.$$

Die Summe der ausserhalb eines Querschnittes β wirkenden Kräfte für eine von β' bis β'' reichende Belastung ergibt sich aus der Summe der folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}^{+1}_{\beta} &= \\ -\mathfrak{B}^{\beta'}_{-1} &= \\ -\mathfrak{A}^{+1}_{\beta''} &= \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &-4\beta\,\frac{x}{l} + \frac{2}{\alpha}(2\gamma-0{,}4)\frac{y}{f} + 2\left[1+\beta^2 - \frac{\gamma}{\alpha}(2\gamma-0{,}4)\right] \\ &+a'_{\beta'}\frac{x}{l} \qquad\qquad -b'_{\beta'}\frac{y}{f} - c'_{\beta'} \\ &-a'_{-\beta''}\frac{x}{l} \qquad\qquad -a'_{-\beta''}\frac{y}{f} - c'_{-\beta''} \end{aligned}\right\} \frac{1}{4}\,l^2 p.$$

Das Auftragen der Kraft geschieht nun genau wie es in Nr. 145 gezeigt worden ist. (Fortsetzung Seite 627.)

Bogenzahlen

für bewegliche Auflager.

β	d_β	Δ	$-\Delta$	$d_{-\beta}$	β	d_β	Δ	$-\Delta$	$d_{-\beta}$	β	d_β	Δ	$-\Delta$	$d_{-\beta}$
0,	0,4			0,4	35	1,2123			0,0777.	70	2,7562.			0,0038
01	0,4152	152	148	0,3852.	36	1,2453.	330	46	0,0731	71	2,8131.	569	5	0,0033
02	0,4308	156	144	0,3708.	37	1,2788.	335	45	0,0688	72	2,8707.	576	4	0,0029
03	0,4468	160	140	0,3568.	38	1,3129.	341	41	0,0647	73	2,9291.	584	4	0,0025
04	0,4633.	165	137	0,3431	39	1,3476	347	39	0,0608.	74	2,9882	591	3	0,0022.
		168	132				354	38				599	3	
05	0,4801			0,3299.	40	1,3830.			0,0570	75	3,0481			0,0019.
06	0,4974	173	129	0,3170.	41	1.4190.	360	36	0,0534	76	3,1088	607	3	0,0016.
07	0,5151	177	125	0,3045.	42	1,4556.	366	34	0,0500	77	3,1703.	615	3	0,0013
08	0,5333	182	122	0,2923.	43	1,4928	372	32	0,0468.	78	3,2325.	622	2	0,0011
09	0,5519	186	118	0,2805.	44	1,5307	379	31	0,0437,	79	3,2955.	630	2	0,0009
		191	115				386	30				637	1	
10	0,5710.			0,2690	45	1,5693.			0,0407	80	3,3592			0,0008.
11	0,5905	195	111	0,2579.	46	1,6085.	392	28	0,0379	81	3,4238.	646	2	0,0006
12	0,6105	200	108	0,2471.	47	1,6483	398	26	0,0353.	82	3,4891.	653	1	0,0005
13	0,6810.	205	105	0,2366	48	1,6888	405	25	0,0328.	83	3,5552.	661	1	0,0004
14	0,6519	209	101	0,2265.	49	1,7300	413	24	0,0304.	84	3,6221.	669	1	0,0003
		215	99				419	23				677	1	
15	0,6734.			0,2166	50	1,7719.			0,0281	85	3,6898.			0,0002
16	0,6953.	219	95	0,2071	51	1,8144	425	21	0,0260.	86	3,7582	684	0	0,0002.
17	0,7177.	224	92	0,1979	52	1,8576	432	20	0,0240.	87	3,8275.	693	1	0,0001
18	0,7406	229	89	0,1890.	53	1,9015.	439	19	0,0221	88	3,8975.	700	0	0,0001
19	0,7640	234	86	0,1804.	54	1,9461.	446	18	0,0203	89	3,9683	708	0	0,0001.
		240	84				452	16				717	1	
20	0,7880.			0,1720	55	1,9913			0,0187.	90	4,0400.			0,0000
21	0,8124	244	80	0,1640.	56	2,0373	460	16	0,0171.	91	4,1124.	724	0	0,0000
22	0,8374.	250	78	0,1562	57	2,0840.	467	15	0,0156	92	4,1856.	732	0	0,0000
23	0,8629	255	75	0,1487.	58	2,1313	473	13	0,0143.	93	4,2596.	740	0	0,0000
24	0,8889	260	72	0,1415.	59	2,1794	481	13	0,0130.	94	4,3344.	748	0	0,0000
		266	70				488	12				756	0	
25	0,9155			0,1345.	60	2,2282			0,0118.	95	4,4100.			0,0000
26	0,9427.	272	68	0,1277	61	2,2777	495	11	0,0107.	96	4,4864.	764	0	0,0000
27	0,9703	276	64	0,1213.	62	2,3280.	503	11	0,0096	97	4,5636.	772	0	0,0000
28	0,9986.	283	63	0,1150	63	2,3789	509	9	0,0087.	98	4,6416.	780	0	0,0000
29	1,0274.	288	60	0,1090	64	2,4306	517	9	0,0078.	99	4,7204.	788	0	0,0000
		294	58				524	8		1,	4,8000	796	0	0,0000
30	1,0568.			0,1032	65	2,4830			0,0070.				—	
31	1,0867	299	55	0,0977.	66	2,5362.	532	8	0,0062					
32	1,1172	305	53	0,0924.	67	2,5901.	539	7	0,0055					
33	1,1483	311	51	0,0873.	68	2,6447.	546	6	0,0049					
34	1,1800	317	49	0,0824.	69	2,7001.	554	6	0,0043					
35	1,2123	323	47	0,0777.	70	2,7562.	561	5	0,0038					

Zum Zeichnen des Kräfteplanes genügen in der Regel 2, höchstens 3 Dezimalstellen. Will man aber bei genauern Operationen alle vier Stellen benützen, so müssen auch die 2ten Differenzen noch berücksichtigt werden.

Es geschieht dies mittelst der Formel:

$$a_n + \delta = a_n + \delta \Delta a_n - \frac{1}{2} \delta (1 - \delta) \Delta^2 a_n + \ldots$$

Die mit Punkten versehenen Zahlen sind grösser, die ohne Punkte kleiner als die genauen Zahlenwerthe.

Diese Bemerkungen gelten auch für die auf S. 614 und 615 mitgetheilten Bogenzahlen.

Bei Behandlung dieses Bogens, bei dem die Widerlagerreactionen durch feste Punkte gehen müssen, glaubten wir uns etwas kürzer fassen zu dürfen, weil wir aus früher schon angegebenen Gründen, die Annahme einer Parabel als Axe eines versteiften Bogens, nicht mehr für immer zulässig erachten, und die graphischen Methoden von Nr. 140 hier anzuwenden sind.

Fünftes Kapitel.

Der gerade elastische Balken.

148. Der gerade elastische Balken im Allgemeinen.

Bei geraden Balken dient uns die Theorie der Elasticität dazu, die Widerlagerreactionen und damit die äussern Kräfte eingemauerter oder continuirlicher Balken zu bestimmen. Die einfachern Fälle sollen hier allgemein behandelt werden, mit Ausnahme des continuirlichen Balkens, dem im nächsten Band ein besonderer Abschnitt gewidmet werden wird.

Wir nehmen an, der Balken liege horizontal und werde nur von der Belastung und von verticalen Widerlagerreactionen in Anspruch genommen. In diesem Fall werden die $\Delta s = \Delta x$, wenn die x Axe horizontal und die y Axe vertical angenommen wird; unter allen Verhältnissen, selbst wenn alle Auflager nicht in einer geraden Linie liegen, können die horizontalen Formänderungen vernachlässigt werden, so dass die zweite der Fundamentalformeln Nr. 136 S. 572 ausfällt, und nur mehr die beiden folgenden übrig bleiben:

$$\delta = \Sigma \mathfrak{P} \frac{\Delta x}{\varepsilon \mathfrak{J}}; \quad -k = \Sigma (x - x_1) \mathfrak{P} \frac{\Delta x}{\varepsilon \mathfrak{J}}.$$

Man könnte jetzt diese Formeln gerade so behandeln als wie früher die des Bogens behandelt worden sind; die von einer Belastung ΔP und einem über den ganzen Bogen sich erstreckenden Reaction ΔA herrührenden δ und $-k$ ermitteln, und dann nach Feststellung der ungünstigsten Belastung die einzeln ΔA summiren.

Da jedoch im vorliegenden Fall die ΔA immer durch einen festen Punkt gehen und vertical gerichtet sind und demnach weder Umhüllungscurve noch Schnittlinie der Kräfte zu bestimmen ist, so ist es nicht nothwendig vorerst das einzelne ΔP zu behandeln, sondern man kann von vorn herein die von einer totalen Belastung herrührenden Formänderungen sogleich zusammenfassen.

Es ist dies zuerst von Herrn Prof. Mohr geschehen, der das Element der Momentenfläche $\mathfrak{P} \Delta x$ als Kraft auf einer Verticalen und als Poldistanz $\varepsilon \mathfrak{Z}$ aufgetragen, und mit diesem Kräftepolygon ein Seilpolygon construirt hat. Die Seiten dieses Seilpolygons bilden den Winkel δ miteinander und schneiden auf Verticallinien die Formänderung $-k$ ab, sie sind daher identisch mit einer der Belastung entsprechenden elastischen Linie. Wird die Widerlagerreaction willkürlich angenommen, so wird die so erhaltene elastische Linie vielleicht nicht allen gestellten Bedingungen genügen; z. B. nicht durch alle Auflager gehen oder bei der Einmauerung nicht die gegebene Richtung und Lage haben. Nun handelt es sich darum die äussern Kräfte so zu modificiren, dass die Linie den Bedingungen genüge, ist dies geschehen so sind die modificirten Reactionen die wirklichen.

Im Wesentlichen ist dieses Verfahren identisch mit dem in Nr. 132 dargelegten, nur ist es von Herrn Prof. Mohr anders ausgeführt worden, und diese gewiss sinnreichen Methoden wollen wir hier entwickeln.

Dem geraden Balken begegnen wir in zwei Formen, entweder als vollem Balken oder als hohlem Fachwerk. Im ersten Fall bringen wir nach Nr. 115 und 116 $\varepsilon \mathfrak{Z}$ durch Construction auf die Form:

$$\varepsilon \mathfrak{Z} = (\varepsilon\, ab)\, c z''',$$

im zweiten nach Nr. 99 oder 112, auf die Form

$$\varepsilon \mathfrak{Z} = (\varepsilon F)\, h^2.$$

Ist der Querschnitt variabel, so ist im ersten Fall die Dimension z''', im letztern die Kraft εF veränderlich. Aus den in Nr. 133 angegebenen Gründen kann man nur $\frac{1}{n}$ der Kraft $(\varepsilon\, ab)$ oder $(\varepsilon\, F)$ auftragen und erhält in Folge dessen laut Nr. 136 sowohl δ als auch $-k$ im n mal verzerrten Maassstab. In den Formeln wollen wir jedoch dieses n nicht mitschleppen. Dies

vorausgeschickt, können die auszuführenden Operationen durch das folgende Schema für die beiden Fälle ausgedrückt werden:

$$-k = \Sigma \frac{x - x_1}{z'''} \cdot \frac{\Delta x}{c} \cdot \frac{b'}{\varepsilon ab} \Delta P = \Sigma \frac{x - x_1}{\varepsilon F} \cdot \frac{\Delta x}{h} \cdot \frac{b'}{h} \Delta P.$$

Dieses Schema soll bedeuten:

Es werden die in der Verticalen b' wirkenden Kräfte ΔP aufgetragen, und mittelst der Poldistanz εab oder h durch ein Seilpolygon verbunden; es ist das die ganz allgemeine Construction, welche die am Balken wirkenden Momente in der Form $\mathfrak{P} : \varepsilon ab$ oder $: h$ gibt, und welche unter allen Verhältnissen ausgeführt werden muss.

Die durch Verticallinien in Flächenelemente des Inhalts $\Delta x \frac{\mathfrak{P}}{h} = \Delta x \frac{b'}{h} \Delta P = \Delta x \frac{b'}{\varepsilon ab} \Delta P$ zerlegten Momentenflächen werden auf die Basis c oder h reducirt. Damit dieses durch einfaches Abgreifen der Lamellenhöhe geschehen könne, sollen die Δx gleich einem Vielfachen von c, oder Untervielfachen von h angenommen werden.

Die Resultate dieser Verwandlung werden auf einer Verticalen von neuem als Kräftepolygon aufgetragen und mit den, eventuell variabeln Poldistanzen z''' oder εF die vorerst provisorische elastische Linie construirt.

Wie diese Operationen ausgeführt, und wie den provisorischen elastischen Linien die definitiven substituirt werden können, wollen wir in der nächsten Nummer an einigen Beispielen erläutern.

149. Der an einem Ende eingemauerte Balken.

Auf Taf. 17_1 wurden die beliebigen Belastungen ΔP in der Verticalen durch das Widerlager aufgetragen, und die Poldistanz εab vor der Lamelle 7 parallel zur Richtung der Einmauerung angenommen. Mit den Zeichnen des Seilpolygons bei 7 beginnend, erhält man die $\mathfrak{P} : \varepsilon ab$ als Segmente zwischen der äussersten Seite von 7 und der treffenden Seite, sie sind die Höhen der Lamellen, die nur auf die Basis c zu verwandeln sind. Da kein besonderes Profil vorliegt, so wurde für c die doppelte Lamellenbreite $2 \Delta x$ angenommen, also $\frac{1}{2} \mathfrak{P} : \varepsilon ab$ als Resultat der Verwandlung auf der Verticalen durch das freie Ende des Balkens von der verlängerten Poldistanz εab ab aufgetragen, so dass

die erste Polygonseite mit der Richtung der Einmauerung übereinstimmt.

Für z'''_1 wurde die Länge des Balkens, dann abnehmend für je zwei Lamellen zusammen ein z''', also noch z'''_{23} z'''_{45} und z'''_{67} angenommen, wie es in Taf. 17_1 angedeutet ist.

Mit diesem Kräftepolygon wurde die ausgezogene elastische Linie als Polygon gezeichnet. Da die erste Polygonseite mit der Richtung der Einmauerung übereinstimmt, und weiter keine Bedingung zu erfüllen ist, weil das nicht eingemauerte Ende beliebig frei hinaus stehen kann, so ist diese Linie die elastische Linie selbst, verzerrt im Maassstab von $1 : n$. In diesem verzerrten Maassstab kann der Winkel δ, um den sich das Balkenende gedreht hat, sowohl am Kräftepolygon als auch an der elastischen Linie abgelesen werden, da wo es Taf. 17_1 angedeutet ist.

Ist die Belastung des eingemauerten Balkens eine gleichförmige, so wird die Momentencurve der $\frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon\, ab}$ eine Parabel sein; ist dann noch der Querschnitt des Balkens constant, also alle z''' gleich gross, so ist die elastische Linie nichts anderes als ein Seilpolygon, das zur Bestimmung des Schwerpunktes des Parabeldreiecks diente, da aber dieser laut Fig. 162 S. 382 in $\frac{1}{4}$ der Balkenlänge von der Wandfläche ab liegt, so sind alle Formen und Dimensionen bekannt, und wir können die Biegungsresultate direct aus der Figur herauslesen.

Das Moment der gleichförmigen Balkenbelastung in Bezug auf die Wandfläche ist gleich $\frac{1}{2}\, p\, l^2$, wenn man mit p die gleichförmige Belastung pro Längeneinheit und mit l die Länge des Balkens bezeichnet; die grösste Parabelordinate bei der Wand demnach: $\frac{p\, l^2}{2\, (\varepsilon\, ab)}$, in der Zeichnung ist diese Ordinate natürlich n mal grösser. Die Parabelfläche ist gleich $\frac{p\, l^3}{6\, (\varepsilon\, ab)}$; die Länge des Kräftepolygons nach der Reduction auf die Basis c gleich $\frac{p\, l^3}{6\, (\varepsilon\, ab)\, c}$; und demnach der Winkel δ gleich:

$$\delta = \frac{p\, l^3}{6\, (\varepsilon\, ab)\, c\, z'''} = \frac{p\, l^3}{6\, \varepsilon\, \mathfrak{J}}.$$

Da die Parabelfläche am Hebelsarm $\frac{3}{4} l$ wirkt, so ist die äusserste Ordinate des Balkenendes oder die Senkung desselben in Folge der Belastung:

$$-k = \frac{p l^4}{8 \varepsilon \Im}.$$

Schneller gelangt man zu demselben Resultat durch die Integrationen:

$$\delta = \int_0^l \frac{p x^2}{2 \varepsilon \Im} dx = \frac{p l^3}{6 \varepsilon \Im},$$

$$-k = \int_0^l \frac{p x^3}{2 \varepsilon \Im} dx = \frac{p l^4}{8 \varepsilon \Im}.$$

Das negative Zeichen von k rührt daher, dass die Momente nach unsern Annahmen negativ drehen, würde das bei den Zeichen der Momentenflächen berücksichtigt, so würde k positiv werden.

150. Auf zwei Stützen frei aufliegender und überhängender Balken.

Der überhängende Balken Taf. 17_2 sei mit gleichmässig vertheilten Gewichten, deren Summe gleich pl ist, und ausserdem noch durch das Gewicht P an seinem Endpunkt belastet; mit diesen Belastungen und der Poldistanz $\varepsilon\ ab$ wurde das Seilpolygon gezeichnet, es ist eine in gleichem Sinn gekrümmte parabelartige Curve, welche an ihrem Ende wegen der dort concentrirten Belastung P eine Ecke mit der letzten Polygonseite bildet. Die Schlusslinie des Polygons verbindet den Schnitt dieser letzten Polygonseite mit der Verticalen durch das rechtseitige Widerlager, mit dem Schnitt der Parabel mit der Verticalen des linkseitigen. Die Momentenfläche wird gebildet: durch die Seilcurve, die letzte Polygonseite und die Schlusslinie, und besteht aus einer positiven schraffirten, und einer negativen punktirten Momentenfläche. Innerhalb der erstern muss der Balken nach unten, innerhalb der letztern nach oben gekrümmt sein; die beiden in entgegengesetztem Sinn gekrümmten Balkenstücke sind durch den Inflektionspunkt von einander getrennt, der demnach auf der Verticalen durch den Schnitt der Seilcurve mit der Schlusslinie liegt.

Um die elastische Linie dieses Balkens zu zeichnen, wurde deren Momentenfläche der Uebersichtlichkeit wegen in nur 3 Partialflächen getheilt, nämlich in die grosse positive Fläche 1 und in zwei negative 2 und 3, welche durch die Verticale des Auflagers getrennt werden. An dieser Stelle muss eine Trennung stattfinden, weil die Polygonseite zwischen diesen beiden Seiten durch das Auflager geführt werden soll.

Die Momentenflächen wurden auf die Basis c reducirt, mit Berücksichtigung des Sinnes auf einer Verticalen rechts die $\Delta\,\mathfrak{P} : \varepsilon\, ab$ aufgetragen und mit der in beliebiger Richtung angenommenen Poldistanz z'''_1 eine erste (Taf. 17_2) punktirte elastische Linie vom linksseitigen Widerlager ausgehend gezeichnet. Sie geht nicht durch das rechtsseitige Widerlager. Denken wir uns die richtige elastische Linie ebenfalls eingezeichnet, so werden die beiden Linien offenbar die Verticale durch das linksseitige Widerlager entsprechend gemein haben, denn zwei entsprechende Seiten der beiden Polygone schneiden diese Verticale in einer Entfernung vom Auflager, welche dem Moment der Flächen zwischen diesem Auflager und den beiden Polygonseiten gleich ist. Da nun diese Momente von der Richtung der Distanz z''' unabhängig sind, so sind sie für beide Polygone gleich gross. Die entsprechenden Polygonseiten können aber nur dann vom Auflager ab gleiche Strecken ausschneiden, wenn sie dieses in demselben Punkte schneiden. Da das eben Gesagte von je zwei entsprechenden Polygonseiten gilt, so haben die zwei Polygone die Verticallinie des linksseitigen Auflagers entsprechend gemein.

Aus dem eben Gesagten folgt auch noch, dass beide Polygone, überhaupt alle Polygone, welche mit der gleichen Poldistanz z''' construirt sind, congruente Strecken auf allen Verticallinien ausschneiden; dies kann aber nur dann stattfinden, wenn je zwei entsprechende Punkte derselben Verticallinie gleich weit von einander abstehen.

Verlängern wir demnach die Polygonseite 2 3 des punktirten Polygons, die durch das rechtsseitige Auflager hätte gehen sollen, bis zur Verticalen A, so wird der Schnitt auch ein Punkt der Seite 2 3 des richtigen Polygons sein. Die Verbindung dieses Schnittpunktes mit dem rechtsseitigen Auflager ist daher die Polygonseite 2 3 der richtigen elastischen Linie, welche im Auflager von ihr berührt wird.

Eine Parallele zu ihr durch den Punkt 2 3 des Kräftepolygons giebt die wahre Lage der Poldistanz, mit der nun die wirkliche elastische Linie gezeichnet werden könnte. Allein es ist nicht einmal nothwendig, auf dieses zurückzugreifen; die letzte Seite jenseits 3 wurde auch durch den Schnitt der äussersten Seite des punktirten Polygons mit der linksseitigen Verticalen geführt; den Eckpunkt 1 erhielt man dadurch, dass man die Segmente s einander gleich machte; diese erste Polygonseite ist auch dadurch bestimmt, dass ihr Schnitt mit der Seite 2 3 auf der gleichen Verticalen als wie der entsprechende Schnitt des punktirten Polygons liegt.

Hiermit ist die wirkliche elastische Linie dieses Balkens vollständig bestimmt.

151. An einem Ende eingemauerter, am andern frei aufliegender und überhängender Balken.

Vergleichen wir den hier bezeichneten Balken (Taf. 17_3) mit dem vorigen, so sehen wir, dass ausser den Kräften A und B noch ein Moment bei A angebracht werden muss, das den Balken negativ herumdreht, bis das Ende A in die Richtung der Einmauerung trifft. Wir nehmen dasselbe zuerst willkürlich gleich $\mathfrak{P}'_a$, untersuchen seine Wirkung auf den Balken und ändern es nachher so, dass die elastische Linie den gegebenen Bedingungen genügt. Wir zeichnen also zunächst mit dem Kräftepolygon der ΔP ganz wie in der vorigen Nummer das erste Seilpolygon, tragen dann (siehe Fig. 148 S. 332) das auf die erste Poldistanz $\varepsilon\, a\, b$ (oder h) reducirte Moment, also $\mathfrak{P}' : \varepsilon\, a\, b$ oder $: h$ auf; die Verbindungslinie dessen untern Endes, mit dem Schnitt der letzten Polygonseite und der Verticalen B, ist die Schlusslinie.

Gerade so wie die definitive Schlusslinie durch $\mathfrak{P} : \varepsilon\, a\, b$ begrenzt sie mit dem Seilpolygon zuerst eine negative, für $\mathfrak{P}_a$ punktirte Momentenfläche 1, innerhalb deren der Balken negativ nach unten gekrümmt ist; dann eine positive schraffirte 2, innerhalb der der Balken nach oben gekrümmt ist, und eine untere punktirte, innerhalb der der Balken wieder nach oben gekrümmt ist und die durch die Verticale B in zwei Partialflächen 3 und 4 getheilt wurde, weil die durch B gehende Seilpolygonseite ein bestim-

mendes Element ist. Die aufeinander folgenden Strecken, innerhalb deren der Balken in verschiedener Weise in Anspruch genommen ist, sind durch zwei Inflectionspunkte von einander getrennt, sie liegen auf den Verticalen der Nullmomentenpunkte, in welchen das Seilpolygon von der Schlusslinie geschnitten wird.

Würde man die Momentenflächen in der Reihenfolge, in der sie hier aufgezählt worden sind, auftragen, so würde man eine beliebige elastische Linie erhalten, und wenn diese nicht durch das Auflager B ginge, so hätte man bei Aenderung von $\mathfrak{P}'$ an den drei ersten Momentenflächen zu ändern, und zwar hätte man es mit Aenderungen zu thun, die der Aenderung der $\mathfrak{P}'$ nicht mehr proportional wären, weil sie von dem unregelmässigen Seilpolygon begrenzt sind. Man kann nun diese Aenderung auf eine einzige beschränken und erhält eine der Aenderung von $\mathfrak{P}'$ proportionale Aenderung, wenn man als erste negative Momentenfläche das ganze Dreieck annimmt, welches aus B (Taf. 17_3) $\mathfrak{P}' : \varepsilon\, a\, b$ projicirt, und als zweite die ganze Parabelfläche, welche $A\,B$ zur Sehne hat, d. h. die, die man erhält, wenn man den positiven und den negativen Momentenflächen die schwach punktirte Fläche unter $A\,B$ beiderseits beifügt. Geht man so vor, so beschränkt sich die Aenderung auf das Dreieck mit der Basis $\mathfrak{P}' : \varepsilon\, a\, b$ allein, der Schwerpunkt der Fläche bleibt immer in derselben Verticalen und die Aenderung ist dieser Basis proportional. Die so vergrösserten Momentenflächen $1'2'3'$ wurden als Flächenpolygon aufgetragen, um mit der hier constant angenommenen Poldistanz $\varepsilon\, a\, b$ von O_1 aus eine erste gestrichte elastische Linie zu zeichnen. Sie geht nicht durch das gegebene Auflager B'; denken wir uns die richtige elastische Linie gezeichnet, dann werden die beiden elastischen Linien die Verticale $1'$ entsprechend gemein haben. Aus den in der vorigen Nummer entwickelten Gründen schneiden die Polygone, welche die gleichen Momentenflächen $2'\ 3'$, mit Ausschluss des variabeln $1' = \mathfrak{P}' : \varepsilon\, a\, b$, mit einander verbinden, congruente Segmente auf allen Verticallinien aus. Da nun die zwei congruenten Punktreihen in der Verticalen $1'$ auch noch den Schnitt dieser Verticalen mit der Richtungslinie der Einmauerung gemein haben, so fallen sie ganz zusammen. Man erhält daher die richtige elastische Linie, wenn man den Schnitt der Seilpolygonseite $3'\ 4'$ und der Verticalen $1'$ mit dem Auflager B' verbindet, wodurch auch die vorhergehenden Polygonseiten gegeben sind.

Das $\mathfrak{P}'$, welches diesem Polygon entspricht, könnte man nun dadurch erhalten, dass man die richtige Lage des Poles zum Träger der Momentenflächen einzeichnet, dann schneidet eine Parallele zur ersten Polygonseite die richtige Dreiecksfläche $\frac{1}{2} l \mathfrak{P} : \varepsilon a b c$, woraus dann das richtige $\mathfrak{P}$ rückwärts abgeleitet werden kann. Viel einfacher und schneller gelangt man jedoch dadurch direkt zur verticalen Höhe $\mathfrak{P} : \varepsilon a b$, dass man eine Verticallinie zieht, auf der die Seiten des ersten elastischen Polygons vor und nach $\mathfrak{P}'$ die Länge $\mathfrak{P}' : \varepsilon a b$ ausschneiden, dann schneiden die entsprechenden Seiten des richtigen Polygons auf derselben Verticalen die Länge $\mathfrak{P} : \varepsilon a b$ aus. Denn da die Segmente, welche die der Verticallinie $\mathfrak{P}' : \varepsilon a b$ sich schneidenden Seiten auf irgend welchen Polygonseiten ausschneiden, im vorliegenden Falle den Momentenflächen, diese aber der Basis $\mathfrak{P}' : \varepsilon a b$ der Dreiecksfläche proportional sind, so müssen beide Ausschnitte $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P} : \varepsilon a b$ gleich sein, wenn einer es ist.

Dieses Verhältniss besteht auch dann noch fort, wenn die z''' nicht mehr constant, wie sie Taf. 17_3 angenommen wurden, sondern variabel sind. Das Verfahren ist daher ein allgemeines. Sind also beide Polygone gezeichnet, so fährt man mit der Zirkelöffnung $\mathfrak{P}' : \varepsilon a b$ zwischen die beiden Polygonseiten, zieht die Verticallinie und greift auf ihr direct $\mathfrak{P} : \varepsilon a b$ ab, das, auf der Verticalen A aufgetragen, die richtigen Momente giebt. Hiermit ist in der Regel der Zweck der Construction erreicht.

Der Uebersicht wegen wurde aber (Taf. 17_3) noch die wirkliche elastische Linie mit den Momentenflächen 1 2 3 4 gezeichnet.

152. An beiden Enden eingemauerter Balken.

Die Construction der elastischen Linie des an beiden Enden eingemauerten Balkens und der an ihm wirkenden Momente unterscheidet sich nur wenig von den in der vorigen Nummer erläuterten Constructionen. Um die Enden des frei aufliegenden Balkens in die Richtung der Einmauerung zu bringen, müssen wir (Taf. 17_4) auf beiden Seiten Momente $\mathfrak{P}$ bei A und $\mathfrak{P}_1$ bei B anbringen, von denen das erste im negativen, das zweite im positiven Sinne herum-

dreht, und die so aufzutragen sind, wie es Fig. 149 S. 332 zeigt. Die Momentenflächen werden aus zwei äussern negativen 1 und 3 (Taf. 17_4) punktirten und einer dazwischen liegenden positiven, schraffirten 2 bestehen. Aus den in der vorigen Nummer schon entwickelten Gründen ergänzen wir mit der schwach punktirten Fläche das partielle Parabelsegment 2 zum ganzen Segment und die beiden negativen Momentenflächen zum Trapez; bei Aenderungen der Momente $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ ändert sich nur dieses; wir theilen es in zwei Dreiecke 1′ und 3′, welche $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}'_1 : \varepsilon\, a\, b$ zur Basis haben.

Unter den Momentenflächen wurde mit den beiden willkürlich angenommenen Momenten $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}'_1$ eine erste provisorische elastische Linie gezeichnet. Sind die z''' constant, wie es in der Figur angenommen wurde, so schneiden die äussersten Polygonseiten der $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ die Polygonseiten zwischen diesen und den Momentenflächen des Parabelsegmentes im $\frac{1}{3}$ der Spannweite; weil die auszuführende Construction, wie schon in der vorigen Nummer bemerkt wurde, identisch ist mit der Schwerpunktsbestimmung der Momentenflächen und der Schwerpunkt des Dreiecks im $\frac{1}{3}$ seiner Höhe liegt. In diesem Falle also können die zwei Dreiecksflächen im Ganzen als auf der Verticalen $\frac{1}{3}\, l$ wirkend angenommen werden; bei variabeln z''' aber müssen die beiden in der Figur punktirten Polygone eingezeichnet werden. Nachdem diese erste provisorische elastische Linie gezeichnet ist, werden noch die beiderseitigen Verticalen bestimmt, auf welchen die Seiten vor und nach den Dreiecksflächen die Momente $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}' : \varepsilon\, a\, b$ ausschneiden. In Folge besonderer Wahl der Basen geht auf Taf. 17_4 eine der Verticalen durch den Stützpunkt B.

Unter das provisorische Polygon der elastischen Linie wurde das definitive gezeichnet. Die erste Seilpolygonseite ist die Richtung der Einmauerung $A\,C$, der Punkt C liegt in der Verticalen des Schnittpunktes der beiden äussersten Seiten der Dreiecksfläche $\mathfrak{P}' : \varepsilon\, a\, b$, im $\frac{1}{3}\, l$, wenn die z''' constant sind; ebenso ist $B\,D$ die letzte Polygonseite, und von D gilt, was eben von C gesagt wurde. Bei dem Auftragen dieser Richtungen $A\,C$ und $B\,D$ ist zu be-

achten, dass in Folge der n maligen Verzerrung der Höhen auch die Tangenten der Winkel, welche sie mit der Horizontalen bilden, und die Ordinatendifferenzen der Punkte A und B ebenfalls n mal grösser als in Wirklichkeit aufzutragen sind. Ferner wissen wir, dass wenn die Belastung, d. h. die Momentenfläche nicht geändert wird, die äussersten Seiten derselben auf jeder Vertikallinie ein bestimmtes Segment ausschneiden, das sich nicht ändert, wenn das Polygon dadurch verschoben wird, dass der Pol in einer Verticallinie auf und abgeschoben wird. Tragen wir daher von C und D abwärts die Segmente s und s' auf, welche die Seiten ausserhalb der Fläche $2'$ auf der Verticalen durch C und D ausschneiden, so müssen die entsprechenden Seiten des definitiven Polygons auch durch die Endpunkte dieser Segmente gehen und können daher eingezeichnet werden, was zu geschehen hat.

Die durch C und D gehenden äussersten Seiten der Dreiecksflächen schneiden auf der Verticalen von $\mathfrak{P}' : \varepsilon\, a\, b$ das definitive Moment $\mathfrak{P} : \varepsilon\, a\, b$ aus. Es wurde bei den Momentenflächen in den Verticalen durch A und B aufgetragen und dadurch alle am Balken wirkenden Momente definitiv bestimmt. Mit den so bestimmten Momentenflächen 1 2 3 wurde schliesslich die definitive elastische Linie ganz unten am Blatt gezeichnet.

In der ersten provisorischen elastischen Linie hat das Zeichnen der Polygone für die beiden Dreiecksflächen keinen anderen Zweck, als den: die Lage der Verticallinien zu bestimmen, auf denen die Segmente s aufzutragen sind und auf denen die $\mathfrak{P} : \varepsilon\, a\, b$ abgegriffen werden können. Wenn die s''' variabel sind, so ist dieses Zeichnen unvermeidlich; sind sie aber constant, so liegen C und D, wie wir schon gesehen haben, in dem $\frac{1}{3}$ der Spannweite, und durch passende Wahl der Basen kann man bewirken, dass die äussersten Polygonseiten der Dreiecke auf den Verticalen A und B die definitiven Momente ausschneiden. Macht man nämlich die letzte Poldistanz von der Verticalen der aufgetragenen Momentenflächen gleich $\frac{1}{3} l$, so werden die äussersten in C und D sich kreuzenden Seiten der Dreiecksflächen auf der Verticalen durch A und C die gleichen Längen ausschneiden, als wie die parallelen Polstrahlen auf der Verticalen der Momentenflächen. Hat man dann vorher

zur Verwandlung der Momentenflächen die Basis $\frac{1}{2}\,l$ gewählt, so wird die aufgetragene Momentenfläche gleich dem Moment $\mathfrak{P} : \varepsilon\, a\, b$ sein, weil der Inhalt der Dreiecksfläche gleich $\frac{1}{2}\,l\,\mathfrak{P} : \varepsilon\, a\, b$ ist. Also:

Wählt man die Länge $\frac{1}{2}\,l$ zur Verwandlungsbasis der Momentenflächen und $\frac{1}{3}\,l$ zur Poldistanz für das Zeichnen der elastischen Linie, so schneiden die äussern Seiten der Momentendreiecke die Momente bei den Stützpunkten selbst auf der Verticalen derselben aus.

Bei constantem Balkenquerschnitt hat man sich, wenn diese Basen angenommen werden, um die zu bestimmenden Momentenflächen der Stützpunkte bei dem Zeichnen der ersten provisorischen elastischen Linie gar nicht zu kümmern: man beschränkt sich auf die des vollen, dem nicht eingemauerten Balken entsprechenden Polygons; und wenn die Segmente $s\,s'$ ermittelt sind, trägt man sie bei C und D auf, verbindet ihre Endpunkte kreuzweise, und die so erhaltenen Linien schneiden auf den Verticalen die Momente der Stützpunkte aus.

Die hier beschriebenen Constructionen gelten für jede beliebige Belastung, sie können bei gleichförmiger Belastung noch weiter vereinfacht werden. Bei solcher ist das erste Seilpolygon der Kräfte eine Parabel. Es sei ihr Pfeil, den man durch Construction erhalten hat, gleich f. Dann ist die Momenten- oder die Parabelfläche gleich $\frac{2}{3}\,f\,l$. Auf der Verticalen der Momentenfläche nimmt sie, verwandelt auf die Basis $\frac{1}{2}\,l$, die Länge $\frac{4}{3}\,f$ ein. Das in der Mitte der Oeffnung am Hebelsarm $\frac{1}{2}\,l$ wirkende Moment dieser die Parabelfläche darstellenden Linie in Bezug auf A oder B, reducirt auf die Poldistanz $\frac{1}{3}\,l$, ist gleich $\frac{1}{2}\,l \,.\, \frac{4}{3}\,f : \frac{1}{3}\,l = 2\,f$.

Ist also die Momentenfläche eine volle Parabel, so beschränkt sich die provisorische elastische Linie auf die zwei sich kreuzen-

den, stark ausgezogenen Linien, welche auf den Verticalen A und B die Länge $2f$ ausschneiden.

Auf den Verticallinien C und D beträgt der Ausschnitt $\frac{2}{3}f$, allein dieses Verhältniss ist selten anwendbar, weil bei continuirlichen Balken, wo diese Methoden vorzugsweise verwendet werden, die Verticalen der festen Punkte meistens nicht im $\frac{1}{3}$ der Spannweite liegen.

Will man f durch die Belastung selbst ausdrücken, so hat man, wenn die erste Poldistanz, mit der das Seilpolygon der Belastungen gezeichnet wurde mit H, und die Belastung pro Längeneinheit mit p bezeichnet wird:

$$Hf = \frac{1}{8} p l^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit den weiter verwendeten Basen $\frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{3} l = \frac{1}{6} l^2$, so sieht man, dass die Länge $2f$ des Ausschnittes der äussersten Polygonseiten der Belastung auf den Verticalen A und B das höhere Moment:

$$\frac{1}{6} H l^2 \cdot 2f = \frac{1}{24} p l^2 \text{ darstellt.}$$

In der Praxis kommen in der Regel nur an- oder abstehende Belastungen, d. h. solche vor, die nur aus zwei verschieden belasteten Strecken bestehen. Will man sich nun auf die Annahme eines constanten Querschnittes und gleichförmiger Belastungen beschränken, so ist es zweckmässig, ein für allemal diese höheren Momente in Bezug auf die Verticallinien A, B zu berechnen, um darnach die Segmente, welche die beiden äussersten Seiten der provisorischen elastischen Linie dort ausschneiden, direct für solche Belastungen auftragen zu können.

Die Belastung p pro Flächeneinheit erstrecke sich (siehe Fig. 210) auf die von A ab gemessene Strecke βl und wird demnach gleich $\beta p l$ sein.

Stellt nun diese Figur das mit irgend einer Poldistanz construirte Seilpolygon der Belastung dar, so haben wir das Moment

der Momentenfläche, die innerhalb βl durch eine Parabel und innerhalb der übrigen Balkenstrecke durch eine Tangente an diese begrenzt ist, in Bezug auf die Verticalen A und B auszudrücken.

Wir erhalten:

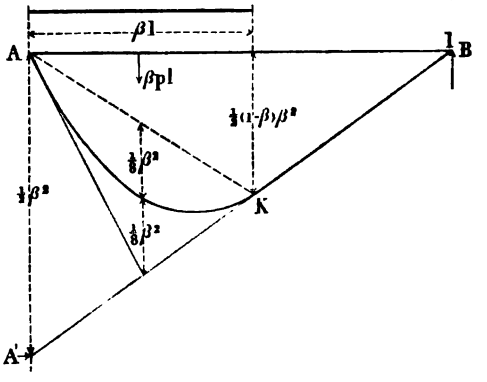
die Reaction des Stützpunktes B gleich $\frac{1}{2}\beta \cdot \beta lp = \frac{1}{2}\beta^2 \cdot lp$,

das Belastungsmoment bei βl gleich $(1-\beta)l \cdot \frac{1}{2}\beta^2 lp$

$$= \frac{1}{2}\beta^2(1-\beta) \cdot l^2 p.$$

Wird dieses $\frac{1}{2}\beta^2(1-\beta)\,l^2 p$ in irgend einem Maassstabe als Ordinate des Seilpolygons aufgetragen und der Endpunkt mit

Fig. 210.



B verbunden, so ist diese Verbindungslinie eine Seite des Seilpolygons und berührt in k (Fig. 210) die Parabel.

Auf der Verticalen A schneidet diese Verbindungslinie

aus: die Länge $A\,A'$ gleich . . . . . $\frac{1}{2}\beta^2 \cdot l^2 p$,

der Pfeil der Parabel, welche das Segment der Verticalen $\frac{1}{2}\beta\,l$ zwischen der Sehne AK und $A'K$ halbirt, ist gleich . . . . . $\frac{1}{8}\beta^2 \cdot l^2 p$.

Hieraus ergiebt sich der Inhalt des Parabelsegments

gleich $F_1 = \frac{2}{3}\beta l \cdot \frac{1}{8}\beta^2 l^2 p$ gleich . . . . . $\frac{1}{12}\beta^3 \cdot l^3 p$,

der Inhalt der Dreiecksfläche F_2 gleich $\frac{1}{4}\beta^2 (1-\beta) \cdot l^3 p$,

der Inhalt der ganzen Momentenfläche $F = \frac{1}{12}\beta^2 (3-2\beta) \cdot l^3 p$.

Die Momente dieser Flächen in Bezug auf A sind gleich:

Für die Parabelfläche $M'_a = \frac{1}{2} \cdot \beta l \cdot F_1 = \frac{1}{24}\beta^4 \cdot l^4 p$,

„ „ Dreiecksfläche $M''_a = \frac{1}{3}(1+\beta) l F_2 = \frac{1}{12}\beta^2 (1-\beta^2) \cdot l^4 p$,

das ganze Moment in Bezug auf $A = M_a = \frac{1}{24}\beta^2 (2-\beta^2) \cdot l^4 p$,

das ganze Moment in Bezug auf $B = M_b$

$= l F - M_a =$ . . . . . $\frac{1}{24}\beta^2 (2-\beta)^2 \cdot l^4 p$.

Für $\beta = 1$ geben M_a und M_b, wie es sein soll, $\frac{1}{24} l^4 p$.

Die äusseren Seiten des Polygons einer elastischen Linie schneiden also bei einer bis βl reichenden Partialbelastung auf der Verticalen des anstehenden Stützpunktes $\beta^2 (2-\beta^2)$ und auf der des abstehenden $\beta^2 (2-\beta)^2$ der Länge $2f = \frac{1}{24} p l^4$ aus, welche die der Totalbelastung entsprechenden Seiten ausschneiden würden.

Da die Coefficienten $\beta^2 (2-\beta^2)$ und $\beta^2 (2-\beta)^2$ sehr viel gebraucht werden, so haben wir sie hier für die Werthe $\beta = \frac{n}{10}$ berechnet und in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt:

Verhältnisszahlen der Segmente, welche die äussersten Seilpolygonseiten einer bis β reichenden an- oder abstehenden Belastung auf den Verticalen der Stützpunkte ausschneiden.

erhalten. Die elastischen Linien von Taf. 17 geben also alle Ordinaten n mal vergrössert an, wobei:

$$n = \frac{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}{H\,l^2} = \frac{6\,(\varepsilon\,a\,b)}{H} \cdot \frac{c\,z'''}{l^2} = \frac{6\,.\,\varepsilon\,F}{H} \cdot \frac{h^2}{l^2},$$

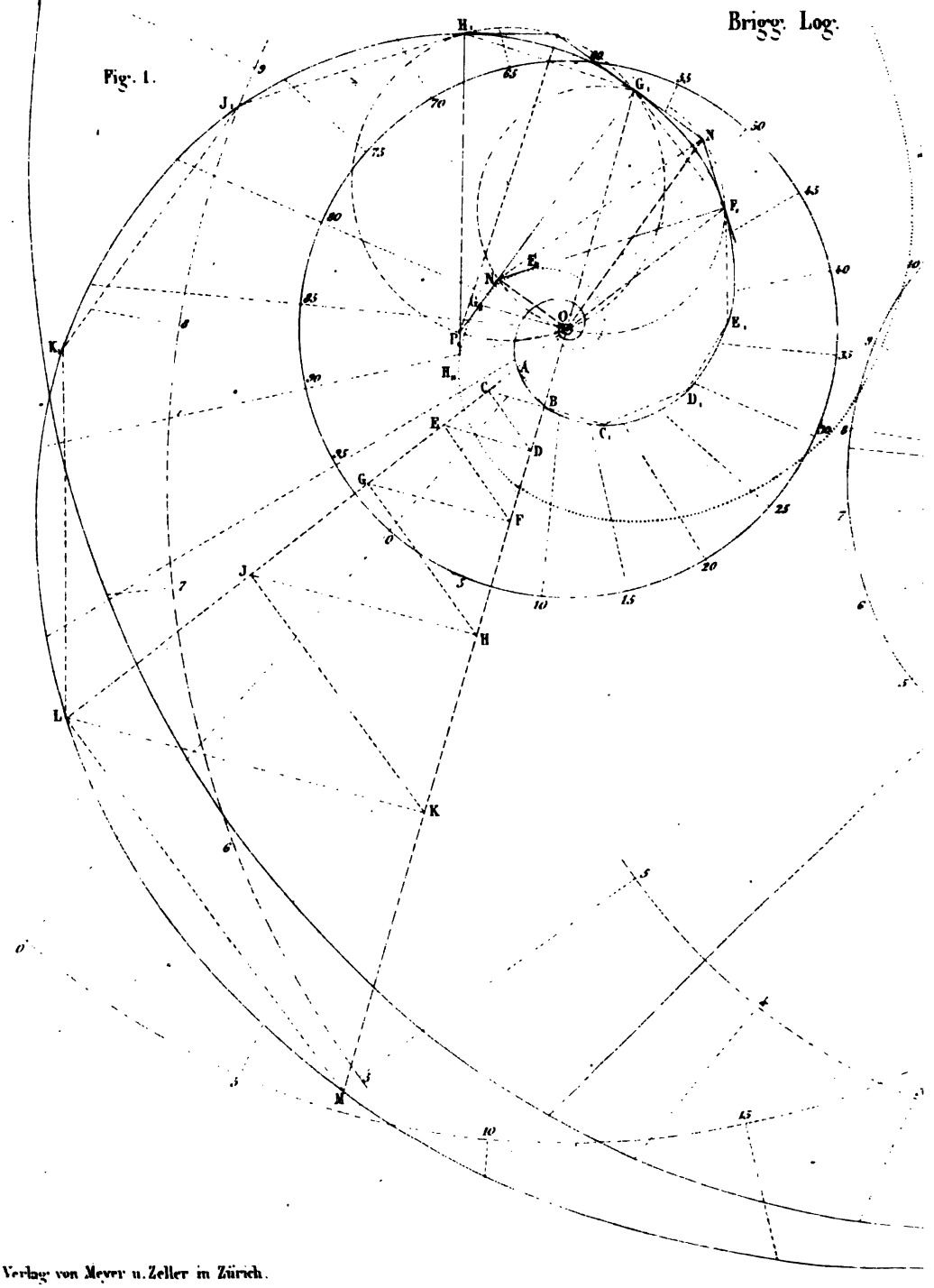
ist.

Alle Drehungen der Seilpolygonseiten oder der Strahlen der Kräftepolygone schneiden auf allen Verticallinien n mal grössere Segmente aus als in Wirklichkeit. Es ist dieses n dasselbe n, von dem schon in Nr. 135 S. 568 die Rede gewesen ist.

Leipzig, Walter Wigand's Buchdruckerei.

Briggs. Log.

Fig. 1.

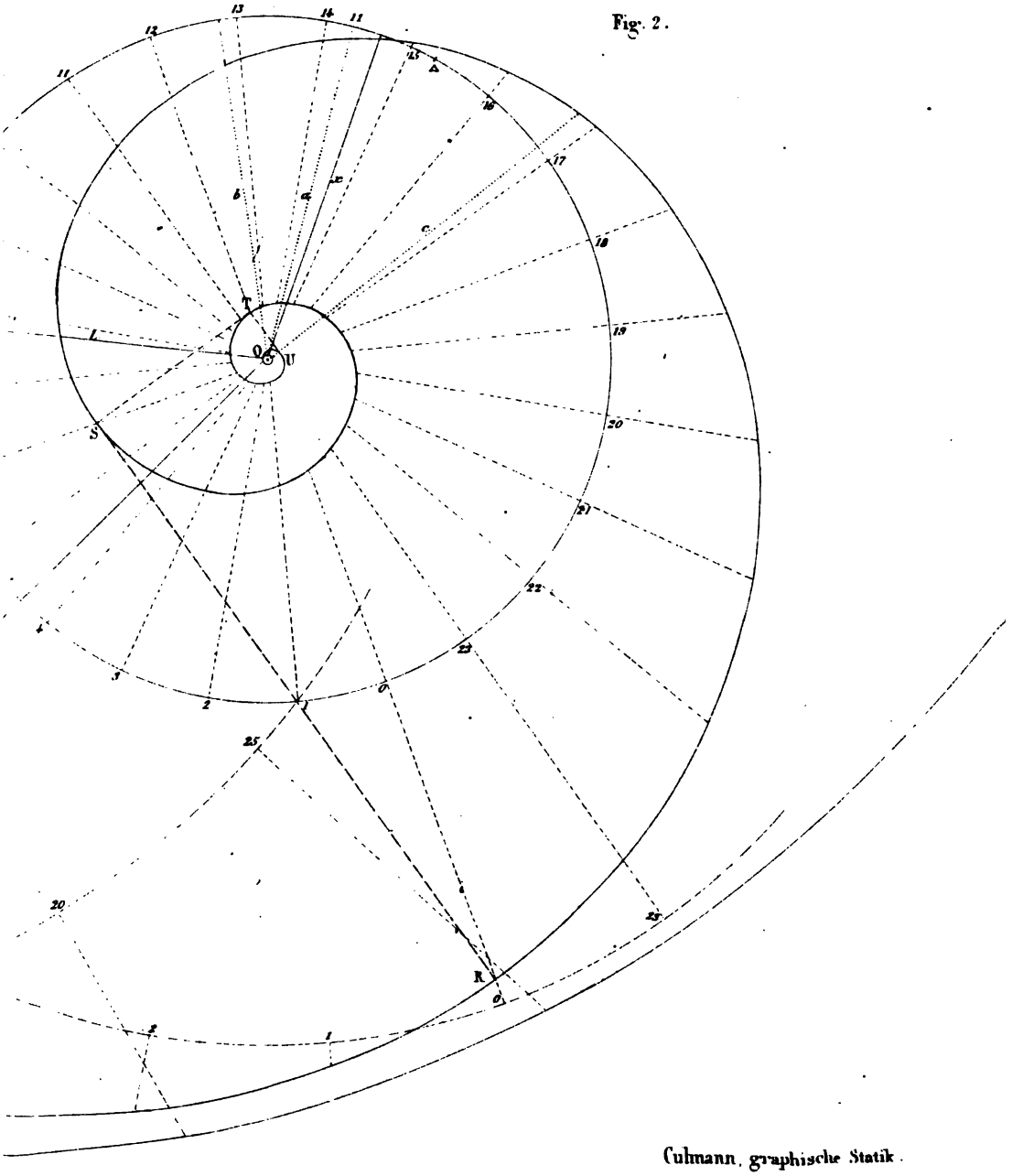


Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, R.

Logarithmische Selbstevolute.

Fig. 2.

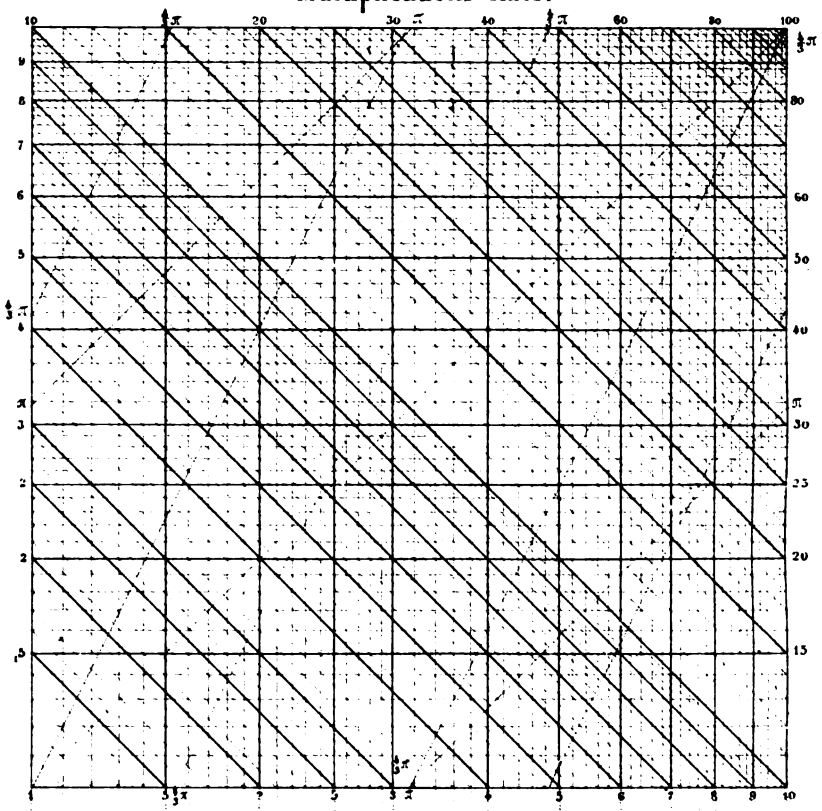


Culmann, graphische Statik.

degger u. Comp. in Winterthur.

Fig. 1.

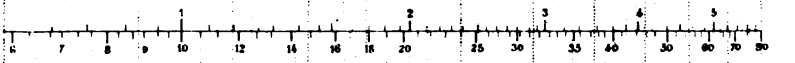
Multiplications-Tafel.



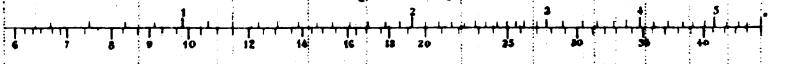
Logarithmische Maßstäbe

für

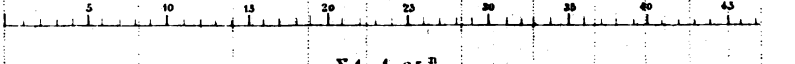
Sin und Cos.



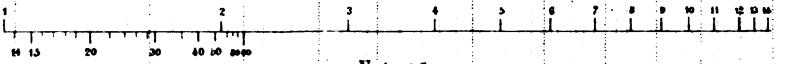
Tang und Cotg.



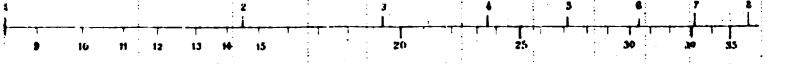
$1{,}05^n$



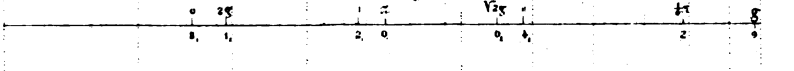
$\Sigma\, 1 : 1{,}05^n$



$\Sigma\, 1{,}05.$



Verschiedene Cœfficienten.



on Mayer u. Zeller in Zürich

Lith Anst v. Wurste

Fig. 2.

Tafel der Producte a^2b u. $\sqrt{a^2b}$.

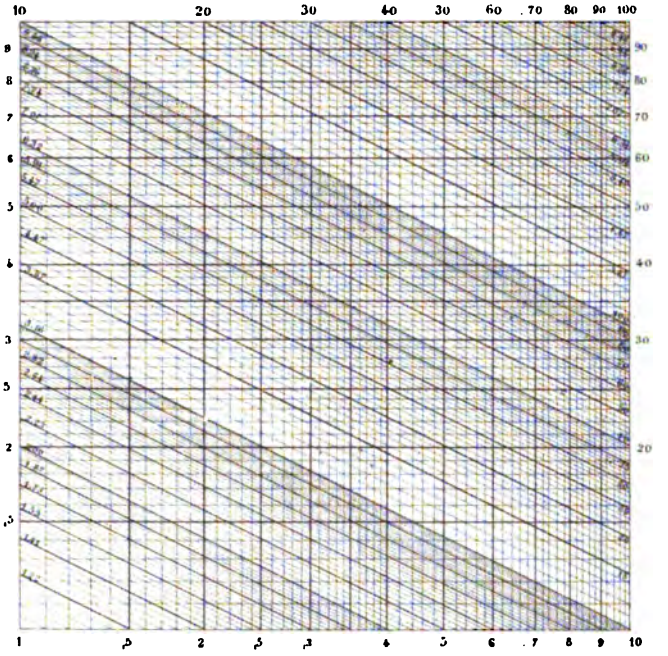
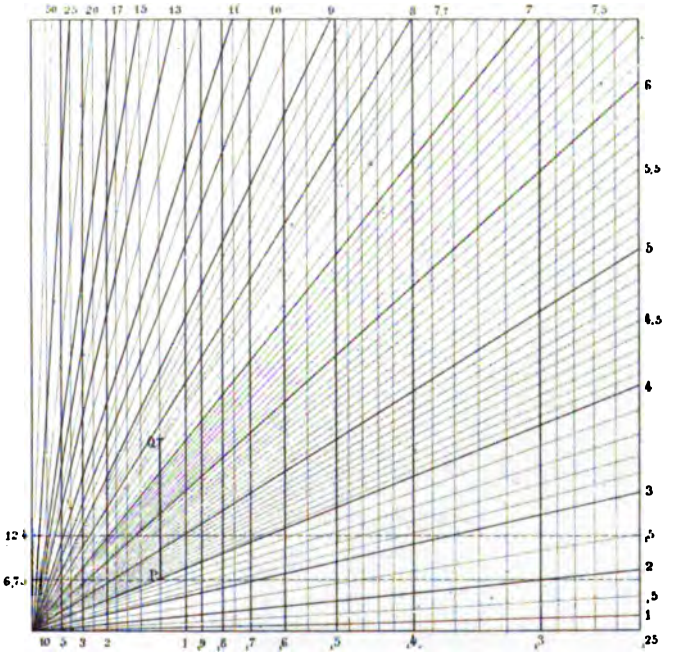


Fig. 3.

Flächentafel.



Summationspolygon.

Fig. 1.

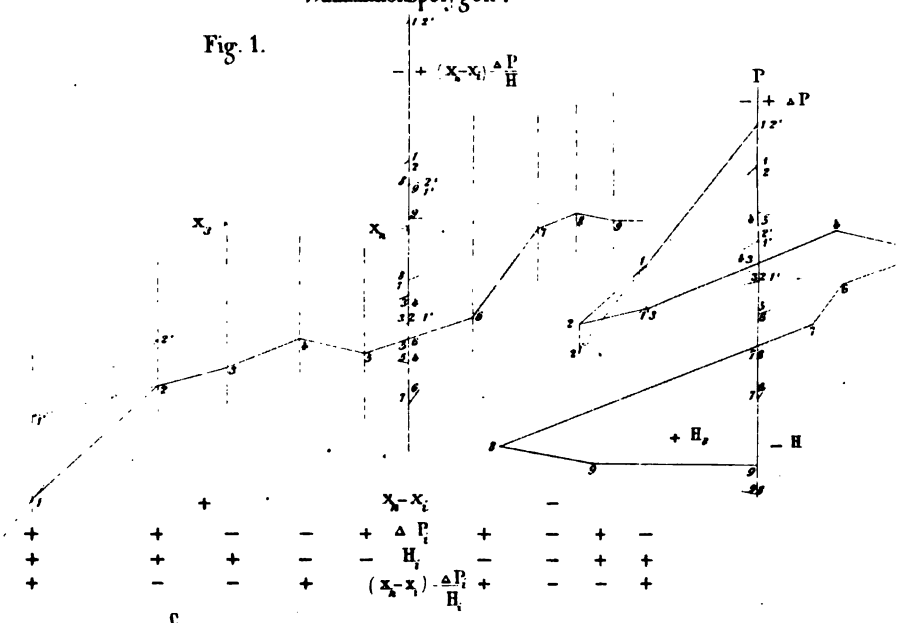


Fig. 2.

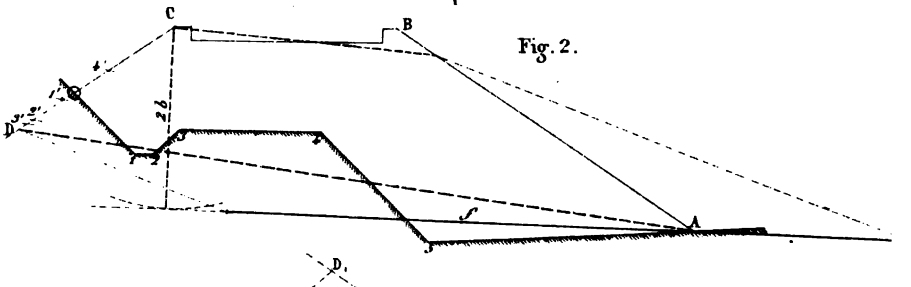
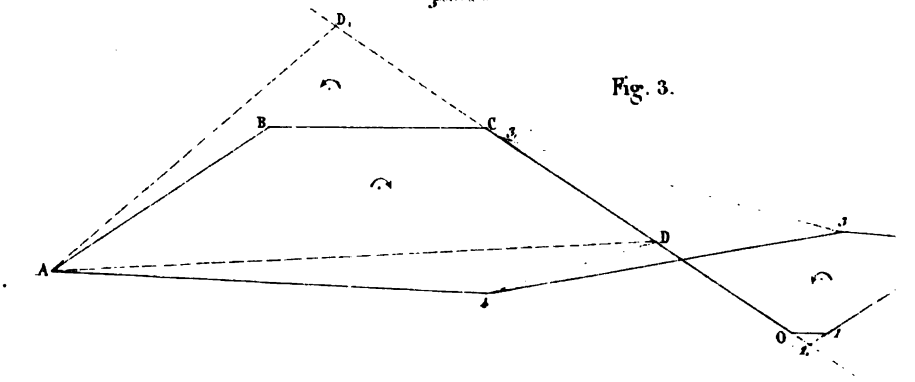


Fig. 3.



Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wur

Verwandlung von Bahnprofilen.

Fig. 4.

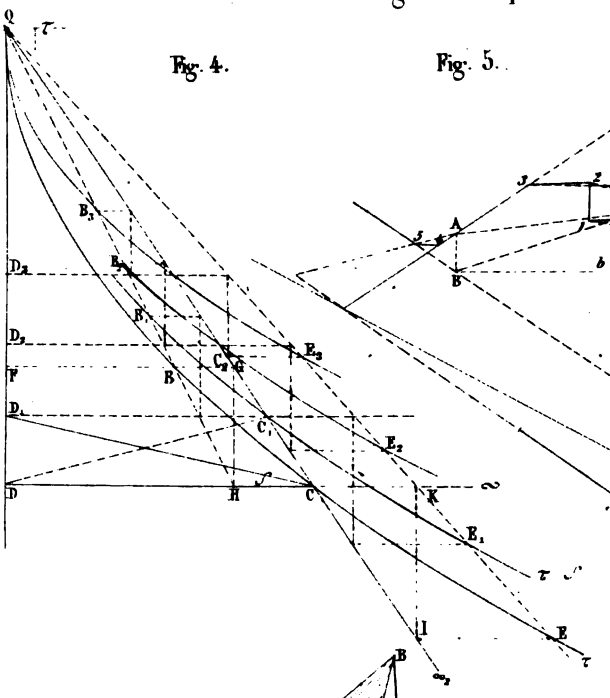
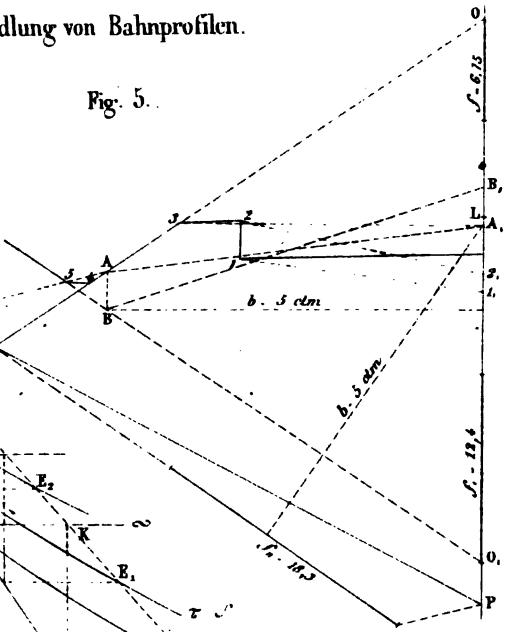


Fig. 5.



Verwandlung von Gewölbebogen.

Fig. 6.

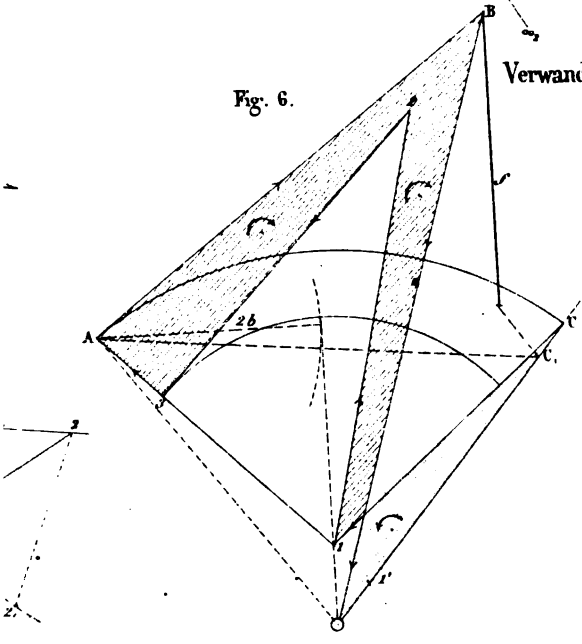
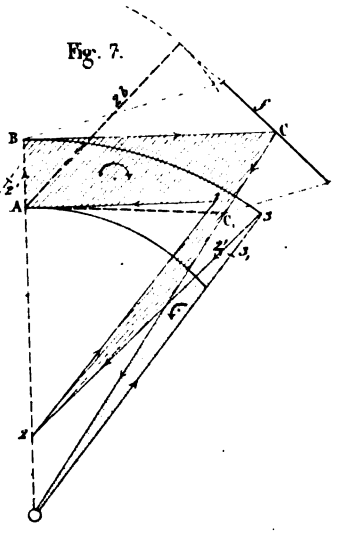


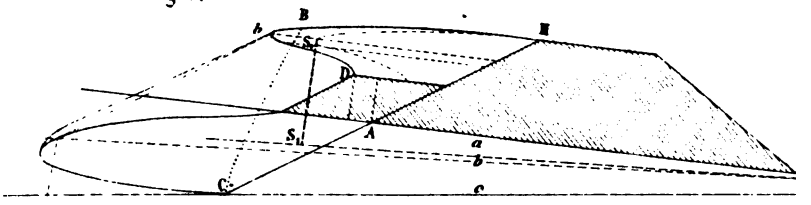
Fig. 7.



ster, Randegger u. Comp. in Winterthur

INHALT VON BAHNKÖRPERN

Fig. 3.



Ein Wegübergang

Fig. 2.

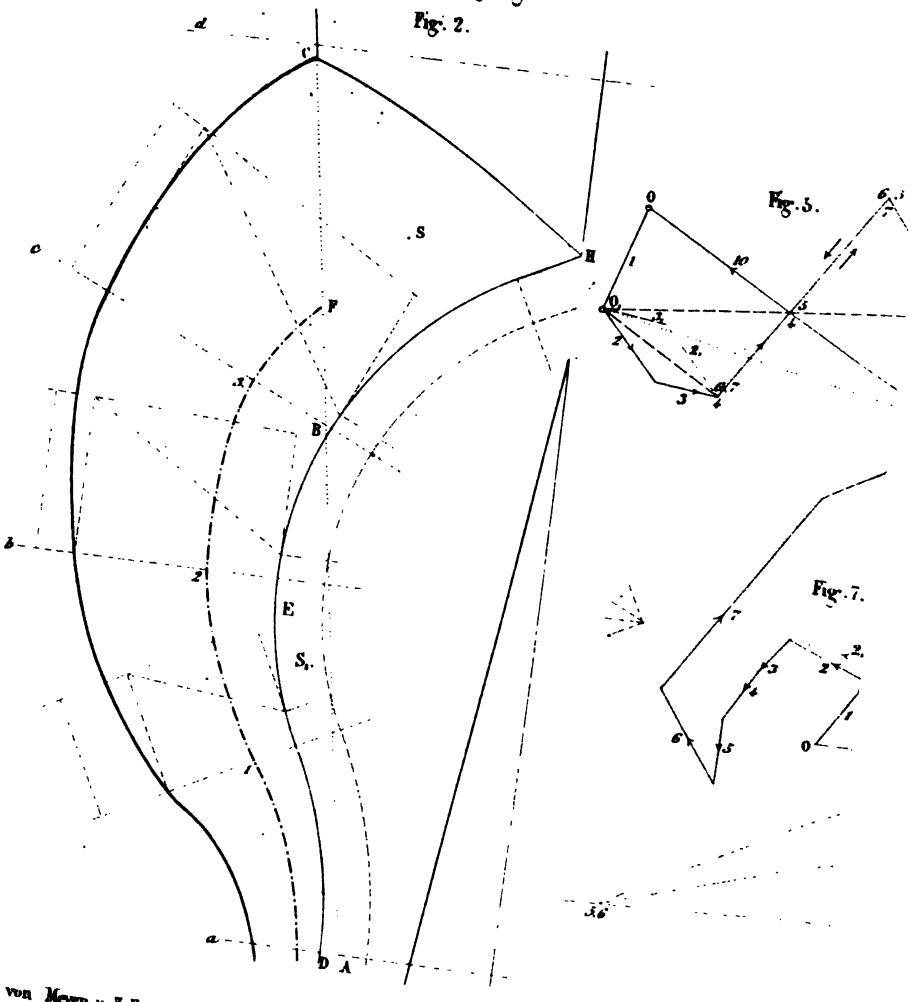


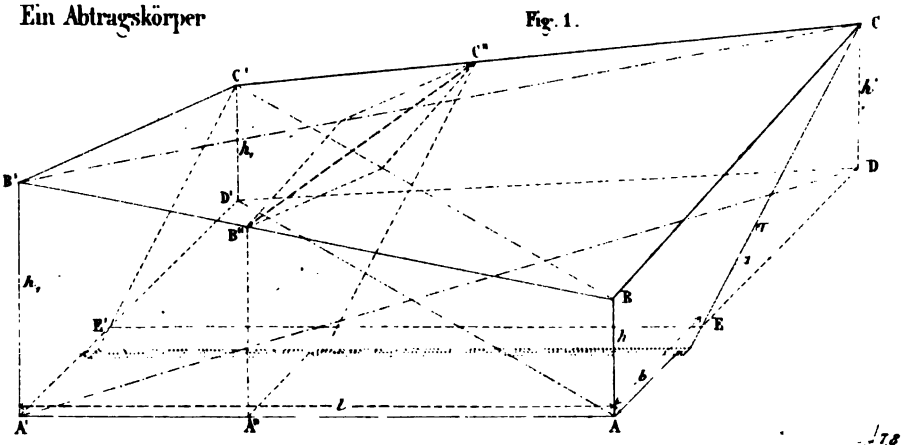
Fig. 5.

Fig. 7.

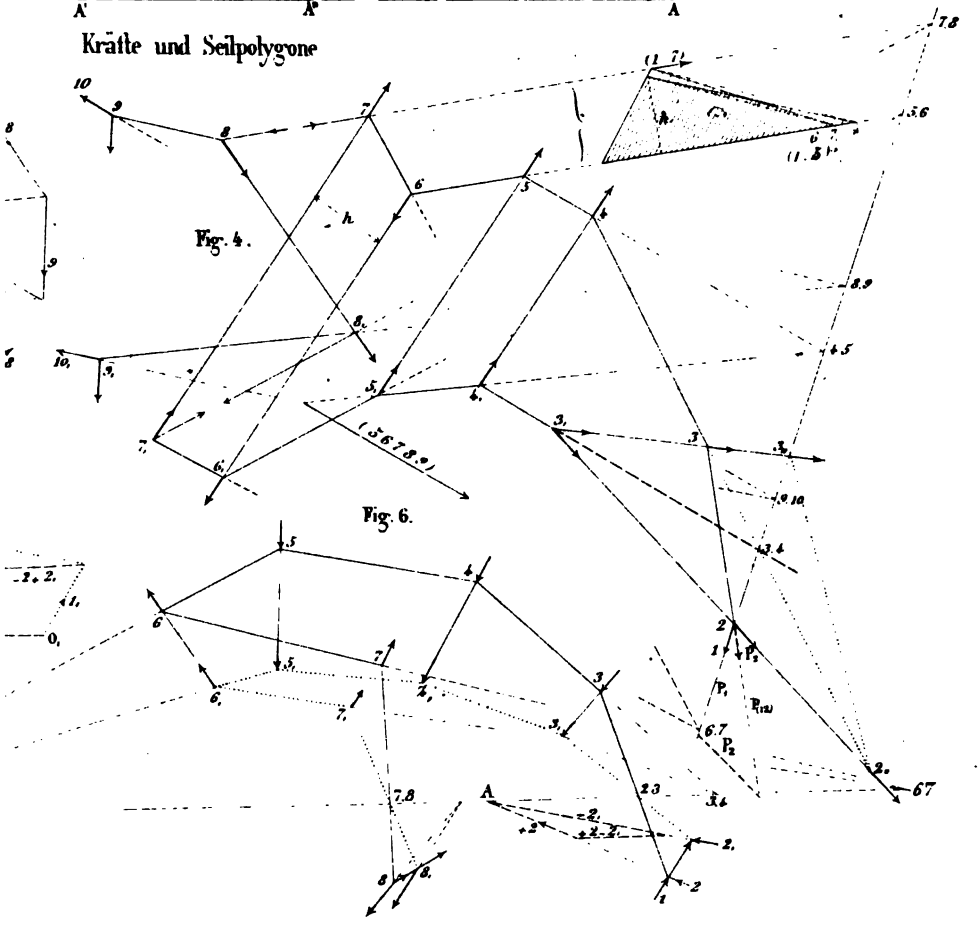
Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Ein Abtragskörper

Fig. 1.



Kräfte und Seilpolygone



ler, Randegger u. Comp. in Winterthur.

Fig. 1.

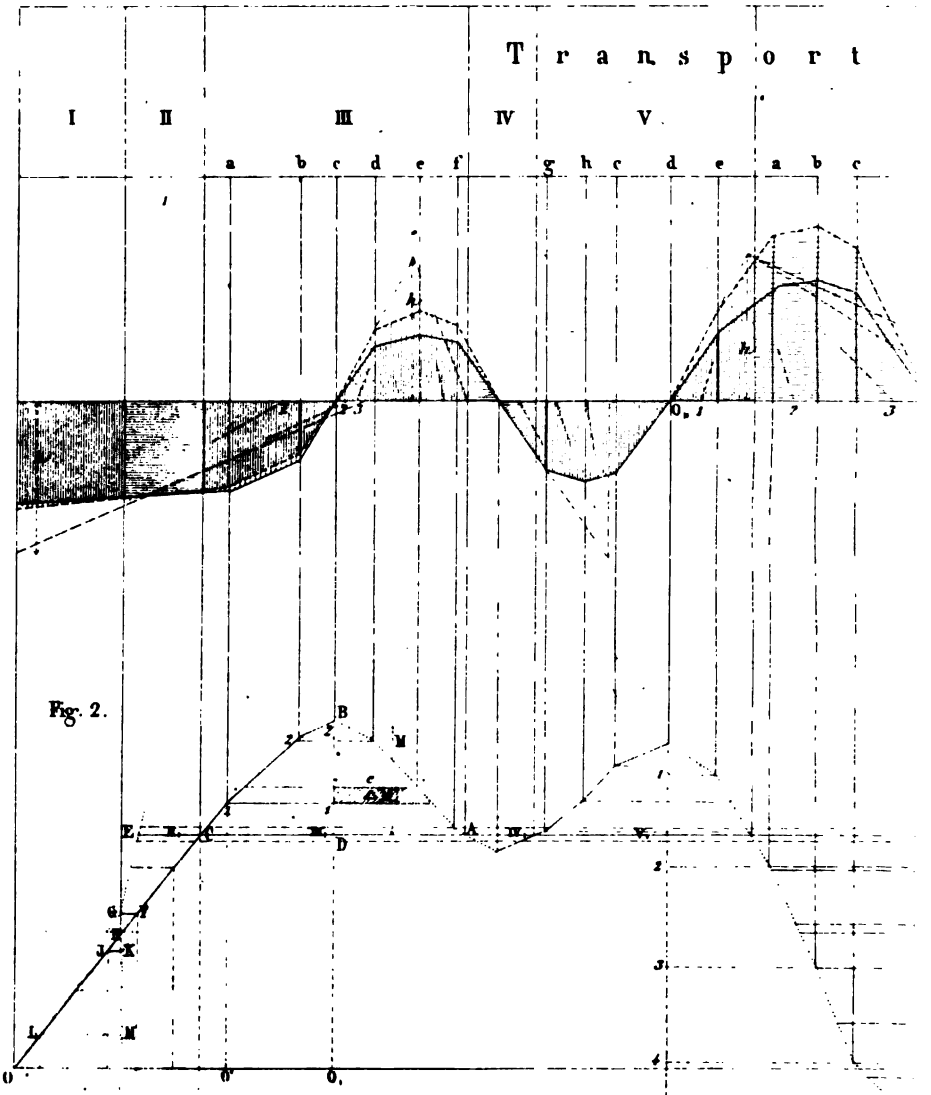


Fig. 2.

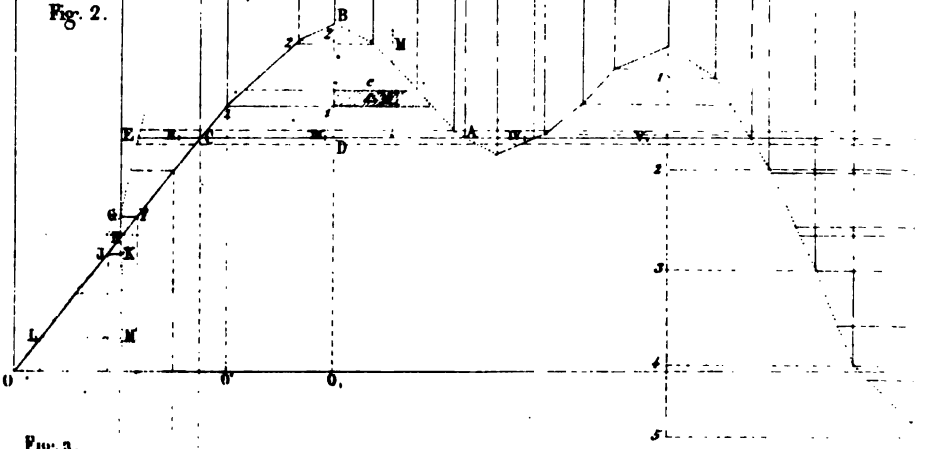
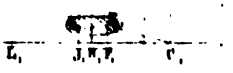
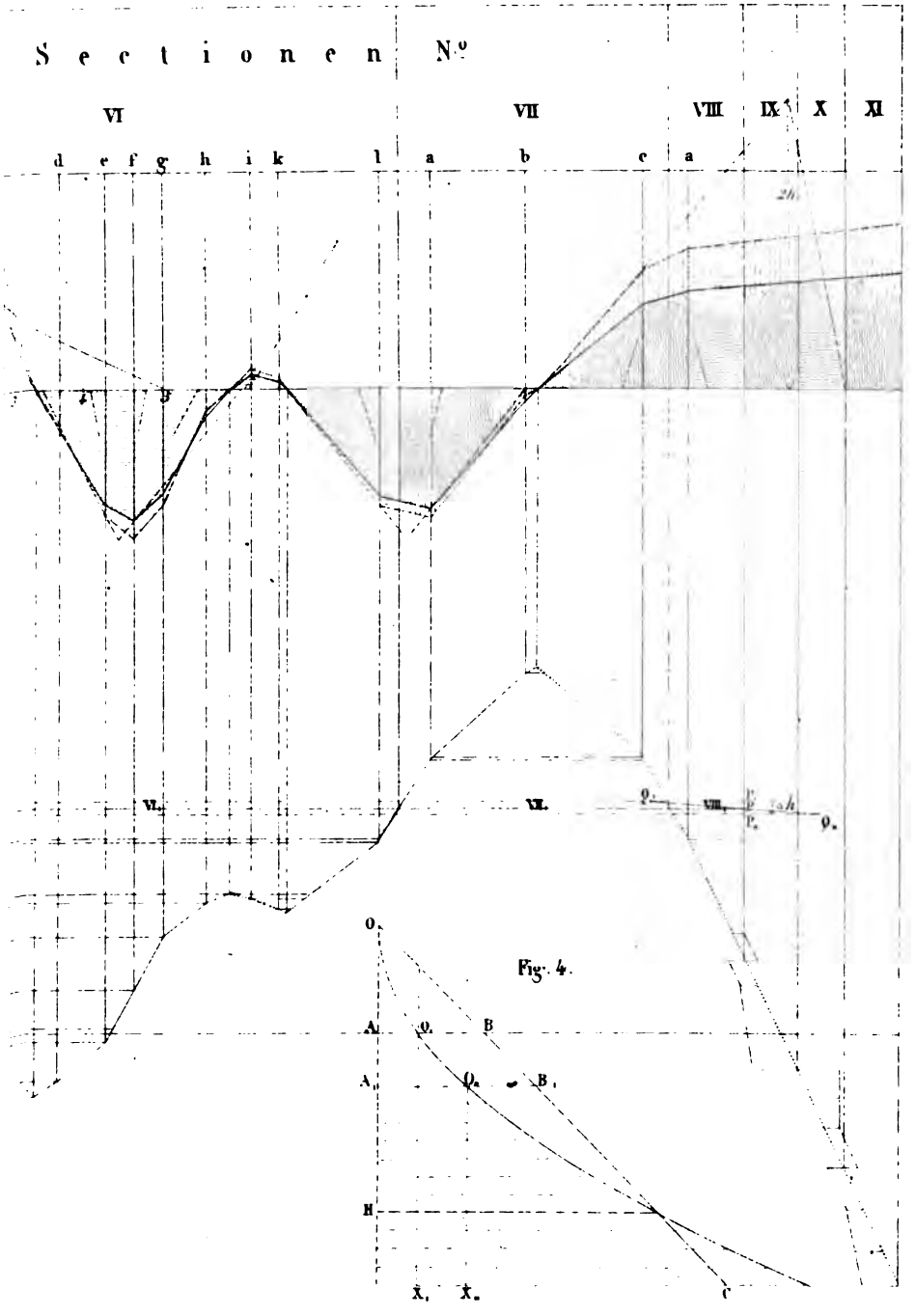


Fig. 3.



Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

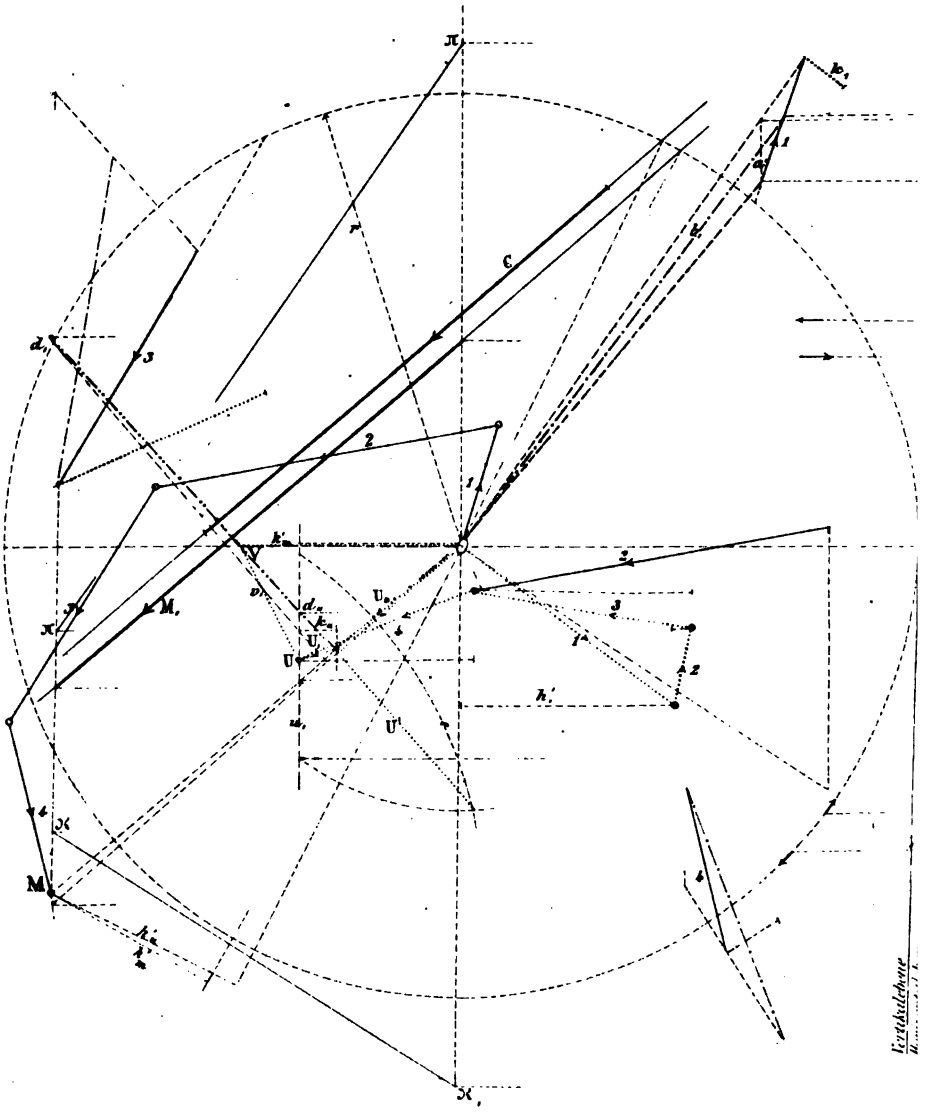
Lith. Anstalt v. Wurster, Rand



egger u. Comp. in Winterthur.

ZUSAMMENSETZUNG

Bestimmung conjugirter Punkt

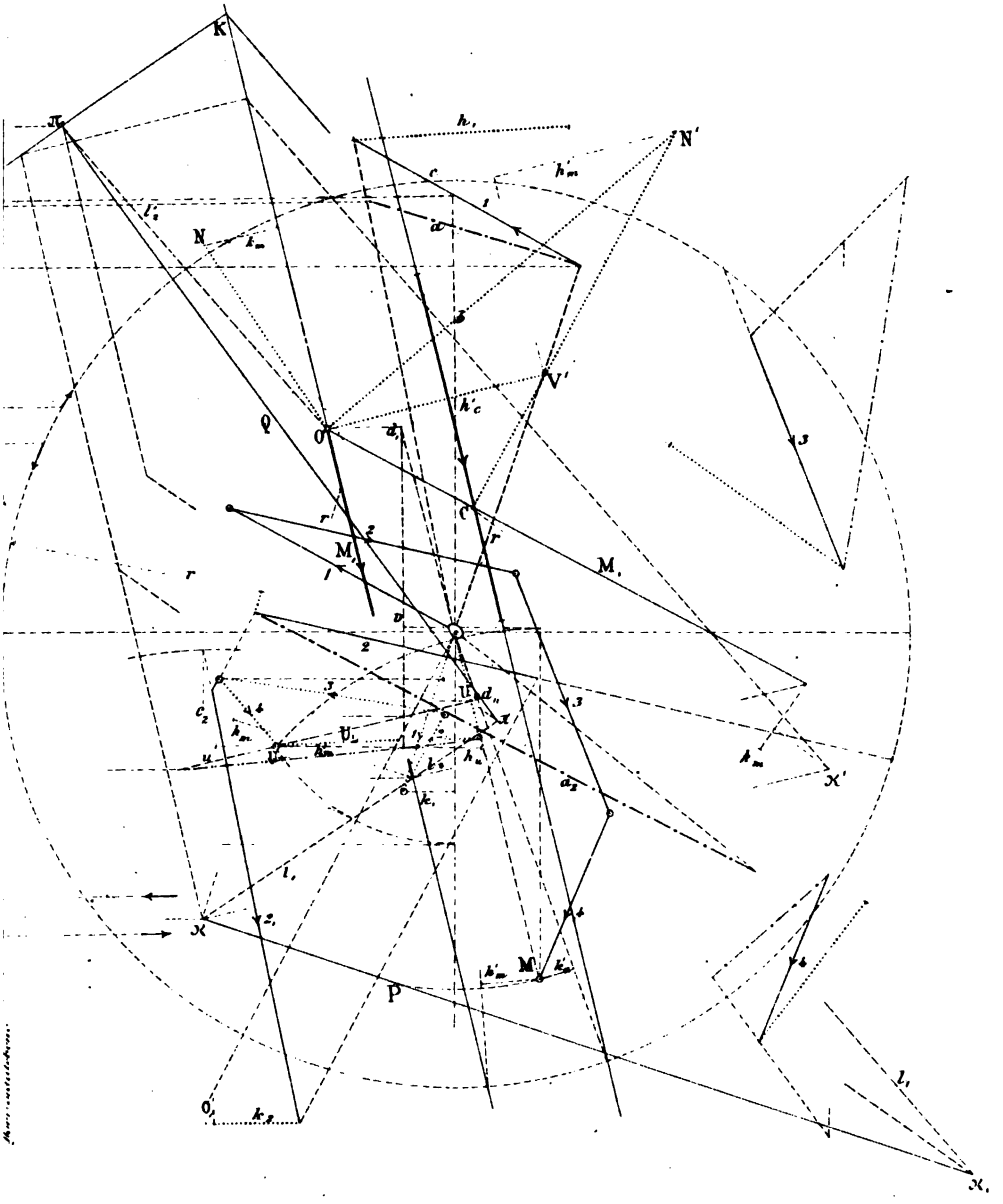


Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurster, Rand

DER KRÄFTE IM RAUM.

, Ebenen, Linien und der Centralaxe



...ygger u. Comp. in Winterthur.

PROJECTIVISCHE VERWANTSCHAFT

Fig. 1.

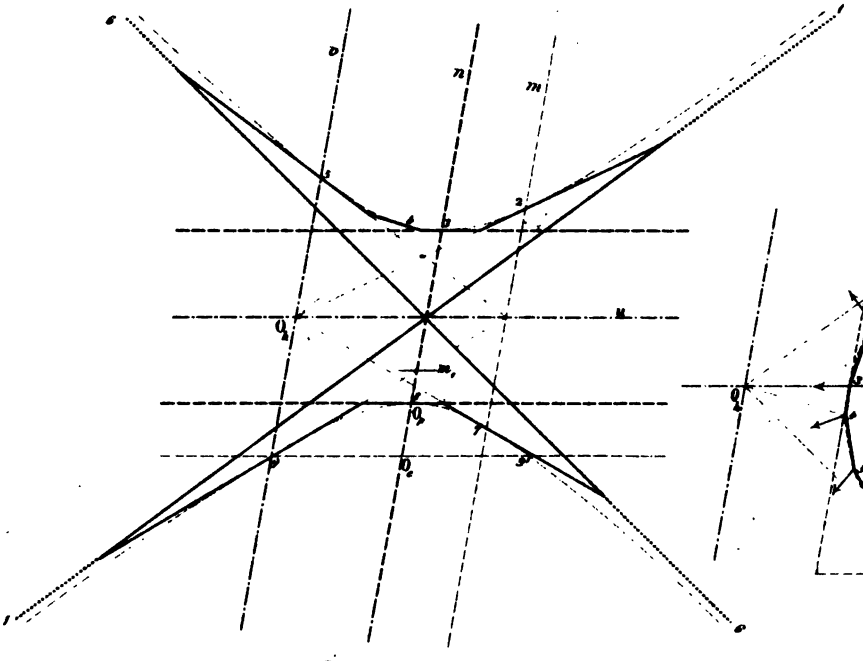


Fig. 2.

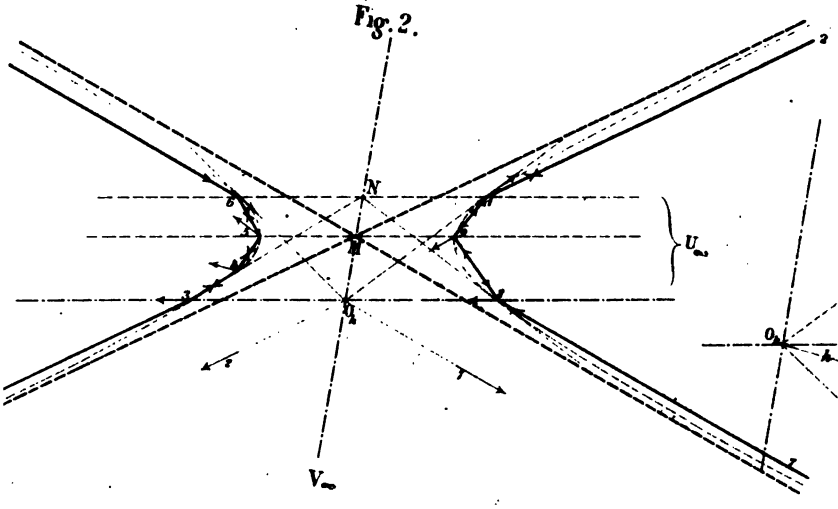


Fig. 3.

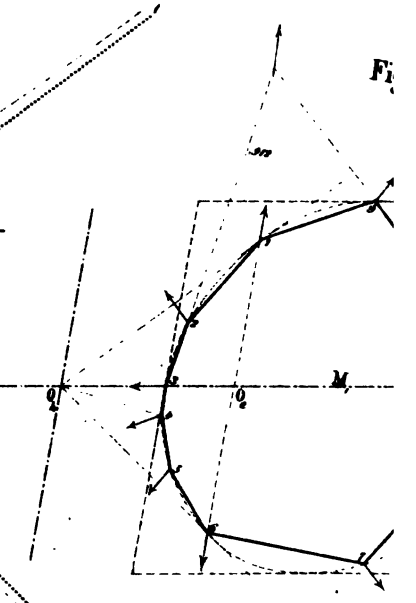
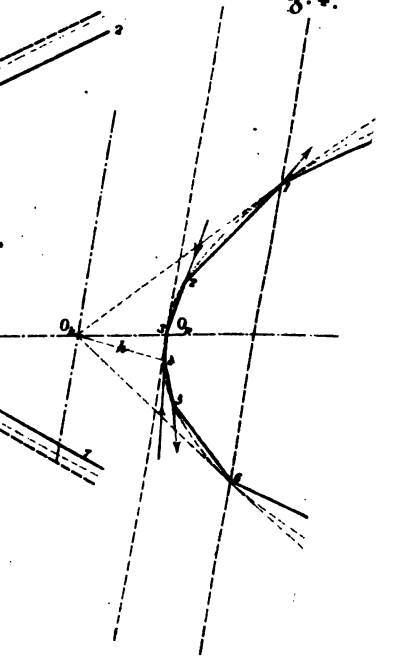


Fig. 4.



Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster

Fig. 5.

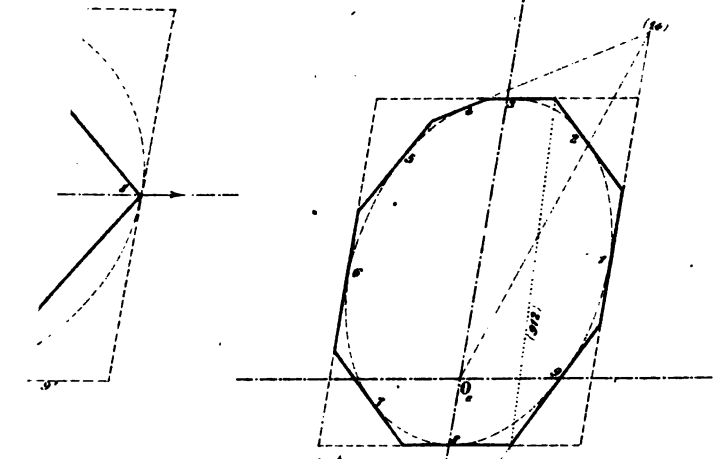
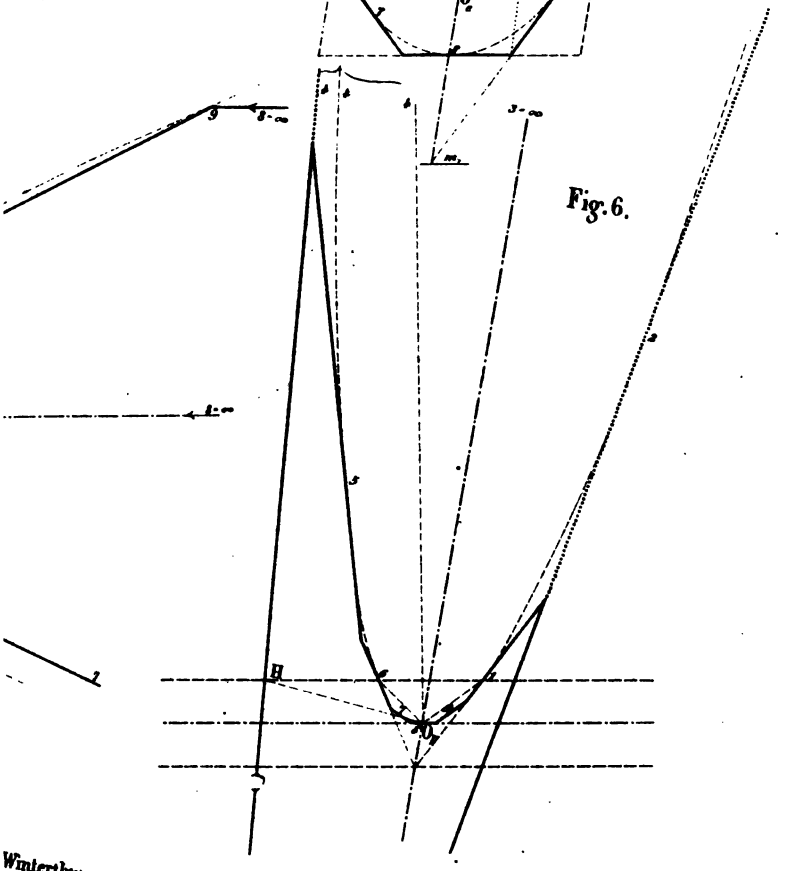


Fig. 6.



Belastungscurven eines ellip

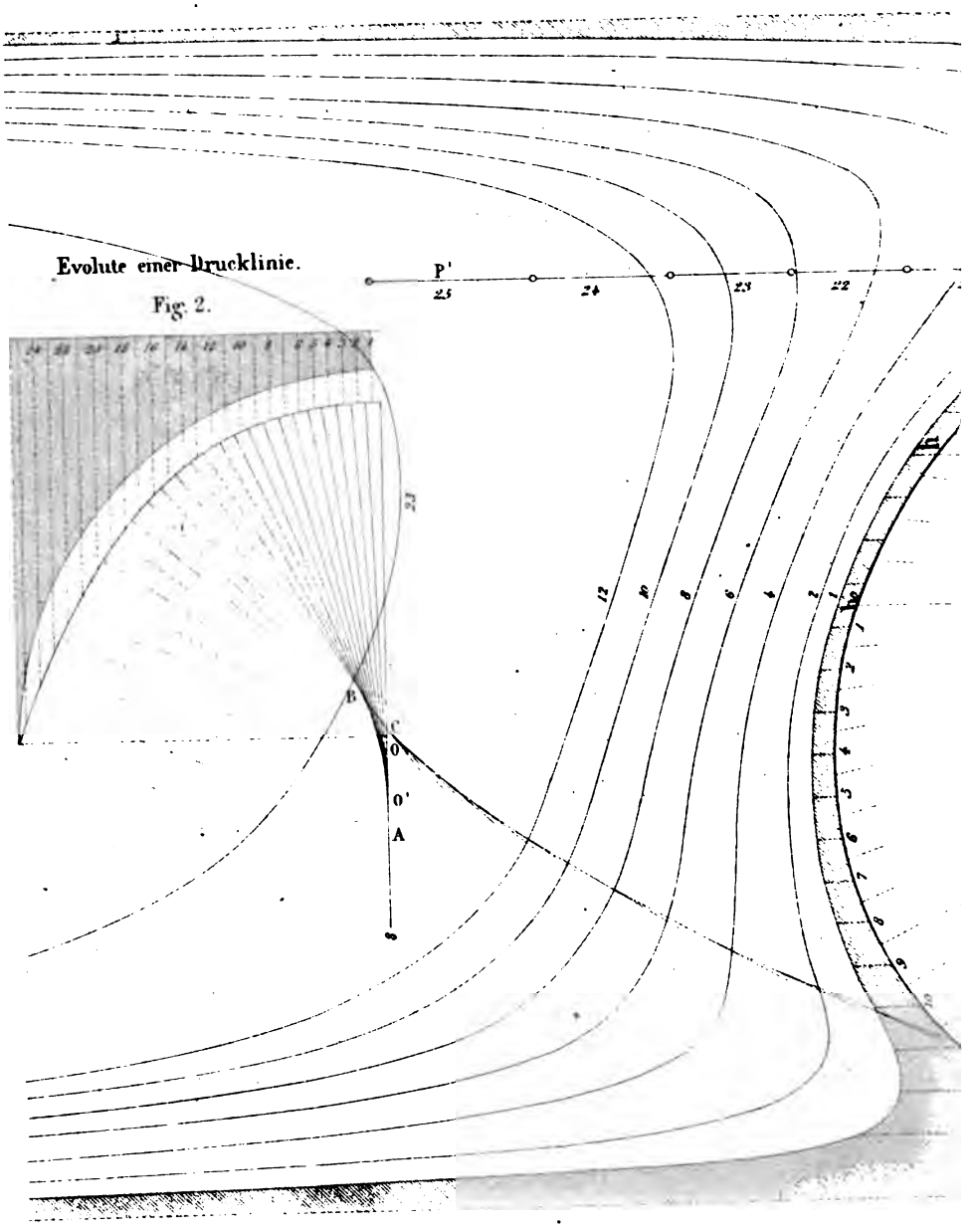
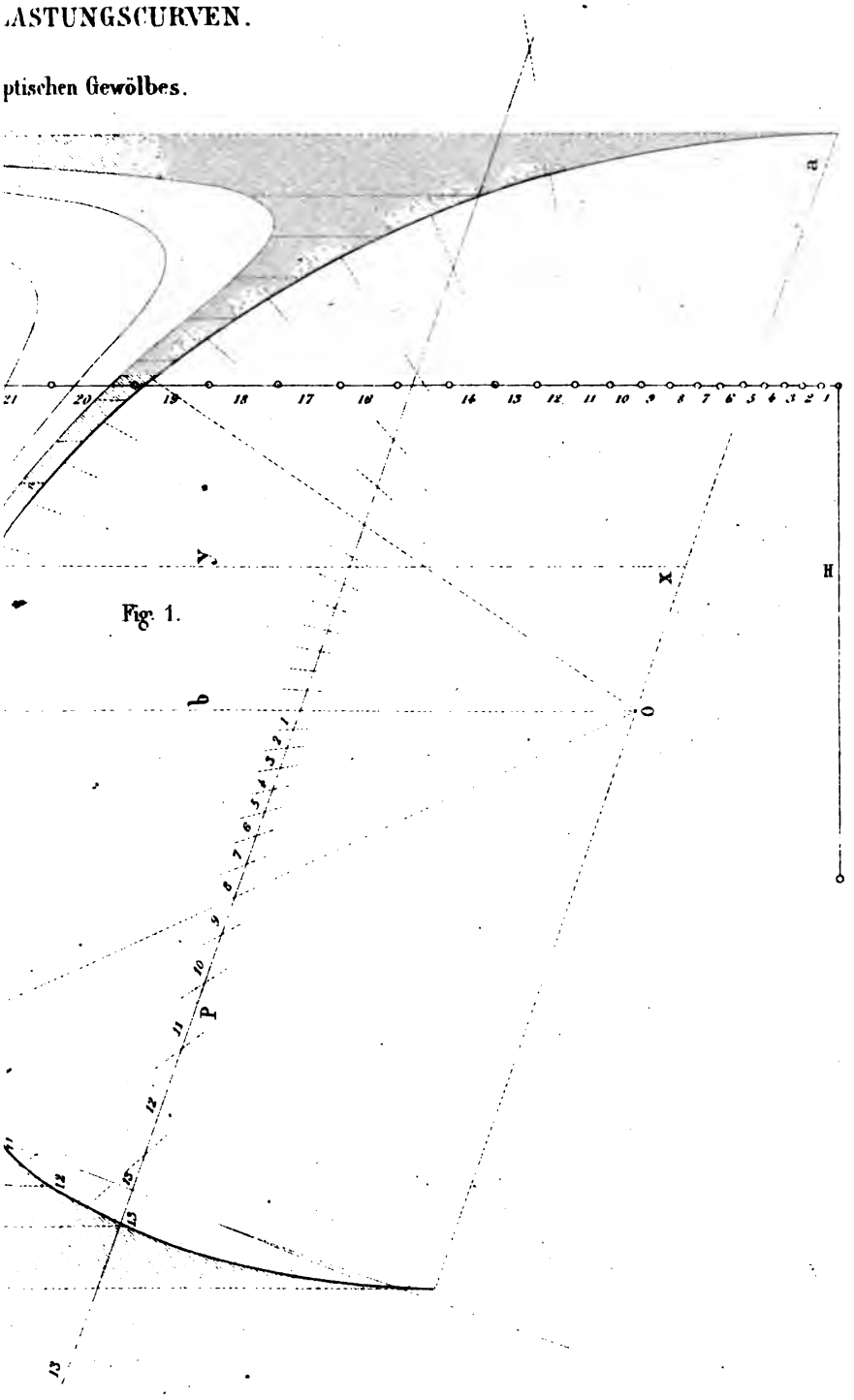


Fig. 2.

r. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Rand

ptischen Gewölbes.

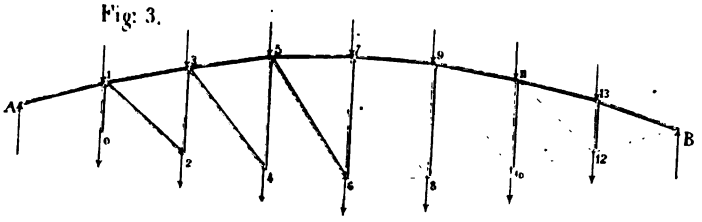


ggeer & C° in Winterthur.

Fachwe

Paulische Träger.

Fig. 3.



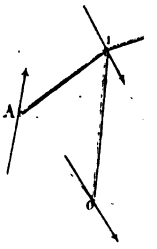


Fig. 4.

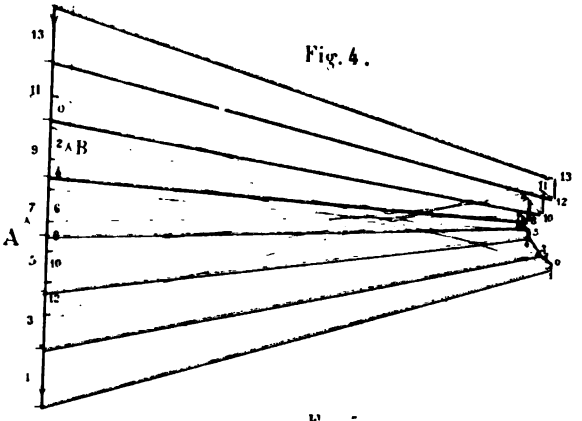


Fig. 2.

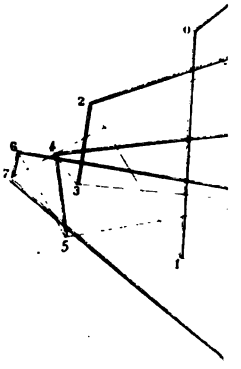
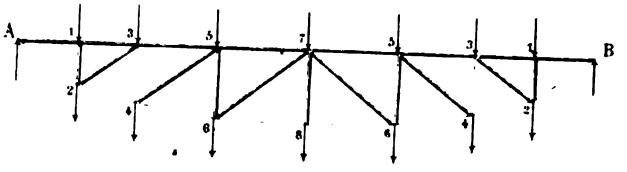


Fig. 5.

Hängwerk.



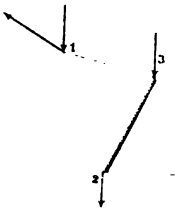
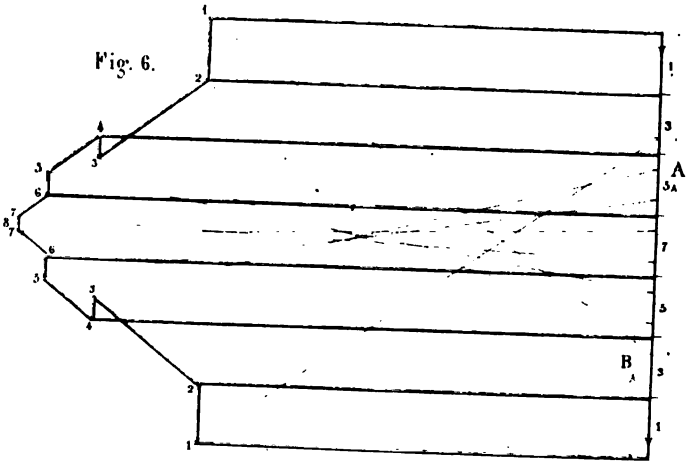
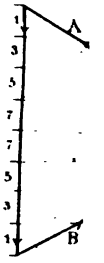


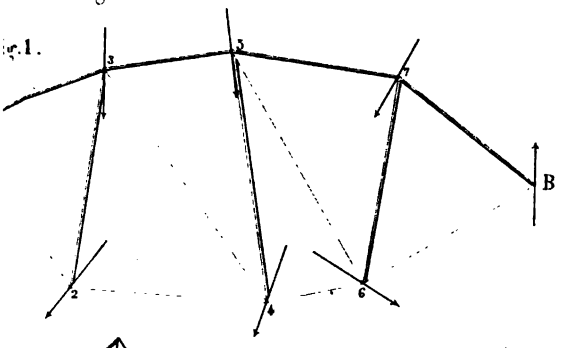
Fig. 6.





rk im Allgemeinen.

g. 1.



2.

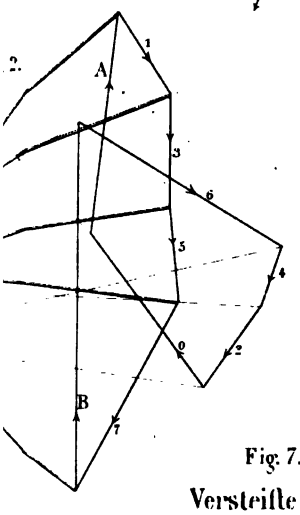


Fig. 7.

Versteifte Kette.

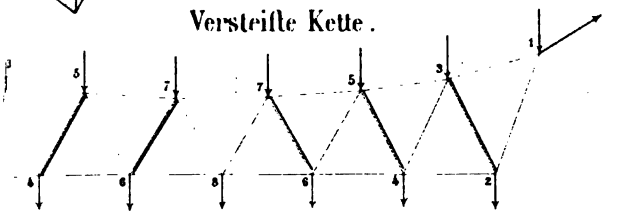
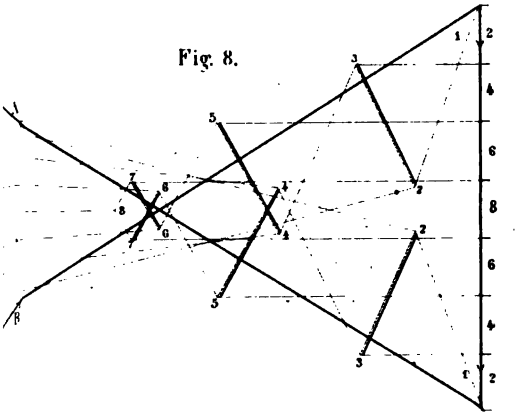


Fig. 8.



Kranoid.

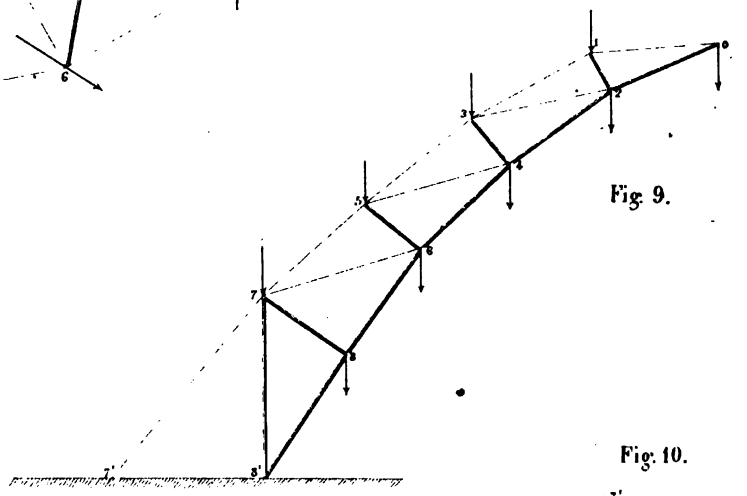
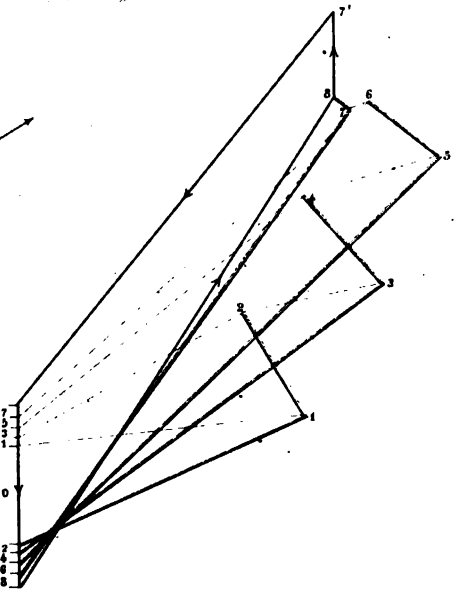


Fig. 9.

Fig. 10.



BELASTUNG DURCH

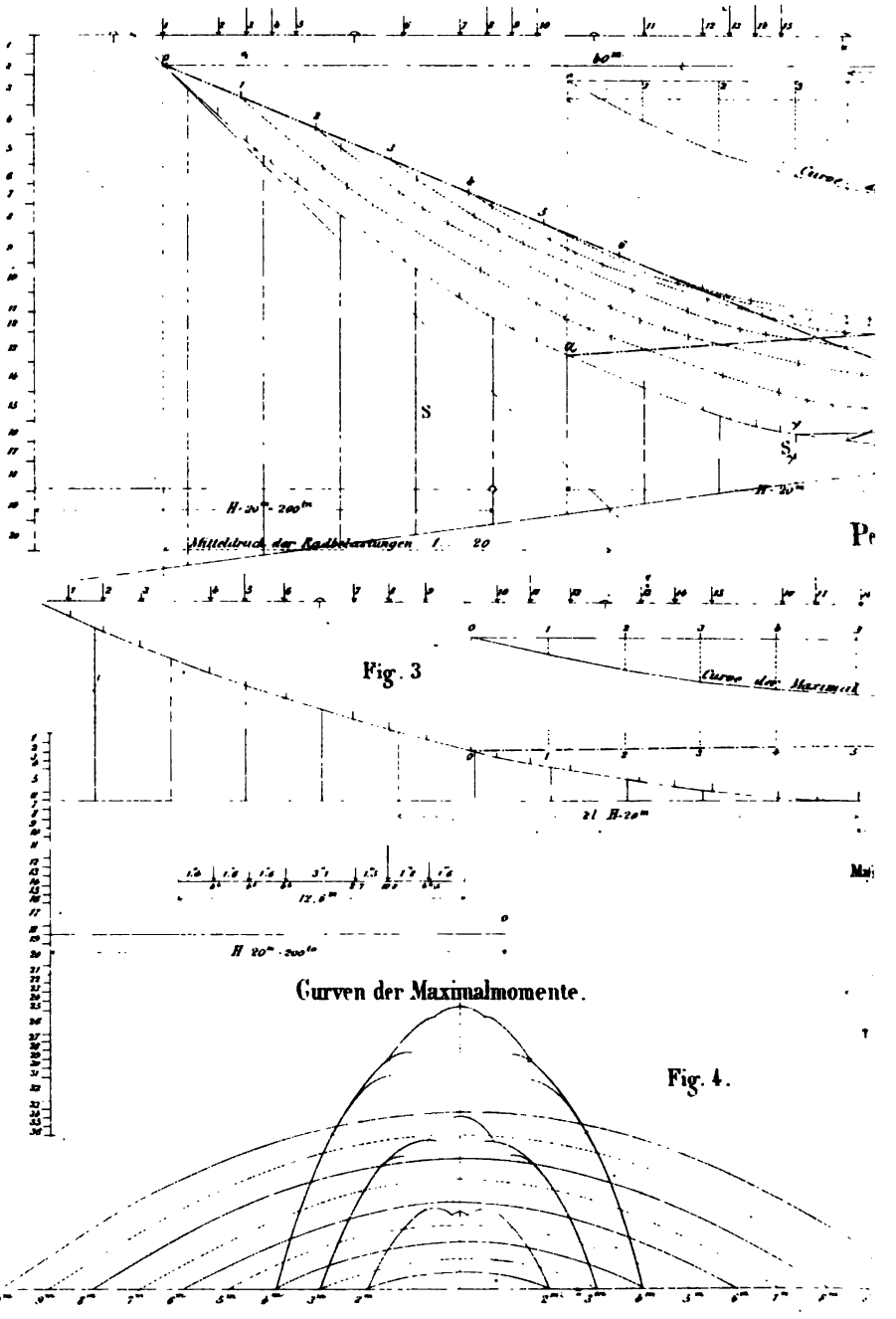
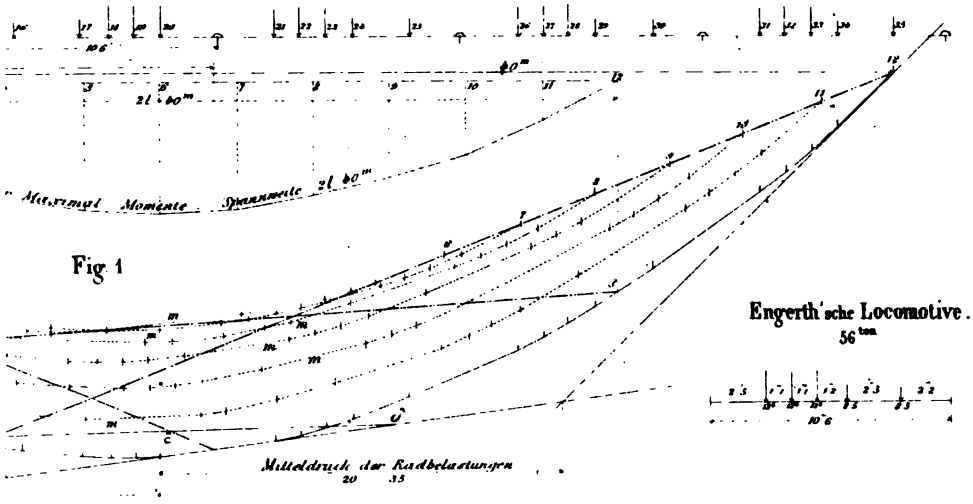


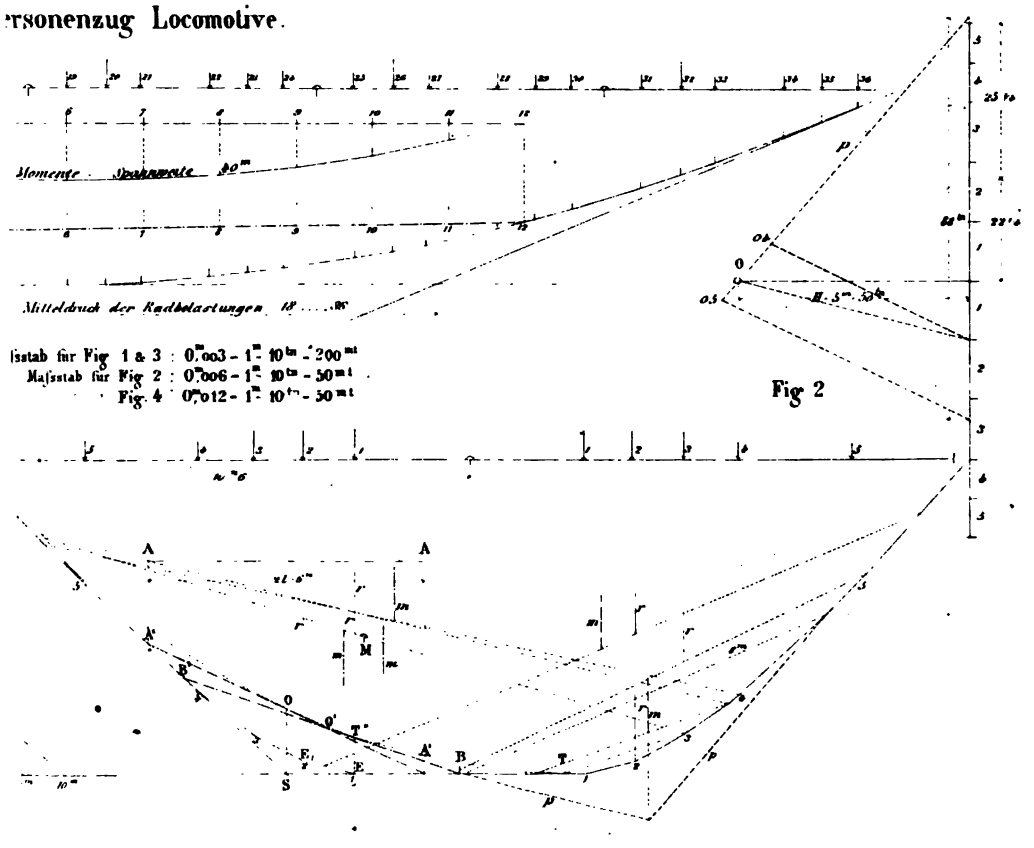
Fig. 3

Fig. 4.

Meyer u Zeller in Zürich · Lith Anst v Wurster



ersonenzug Locomotive.



Maßstab für Fig 1 & 3 : 0,003 - 1 = 10 ton - 200 mt
Maßstab für Fig 2 : 0,006 - 1 = 10 ton - 50 mt
Fig. 4 : 0,012 - 1 = 10 ton - 50 mt

Randegger & C.ie Winterthur Cuhmann, graphisc

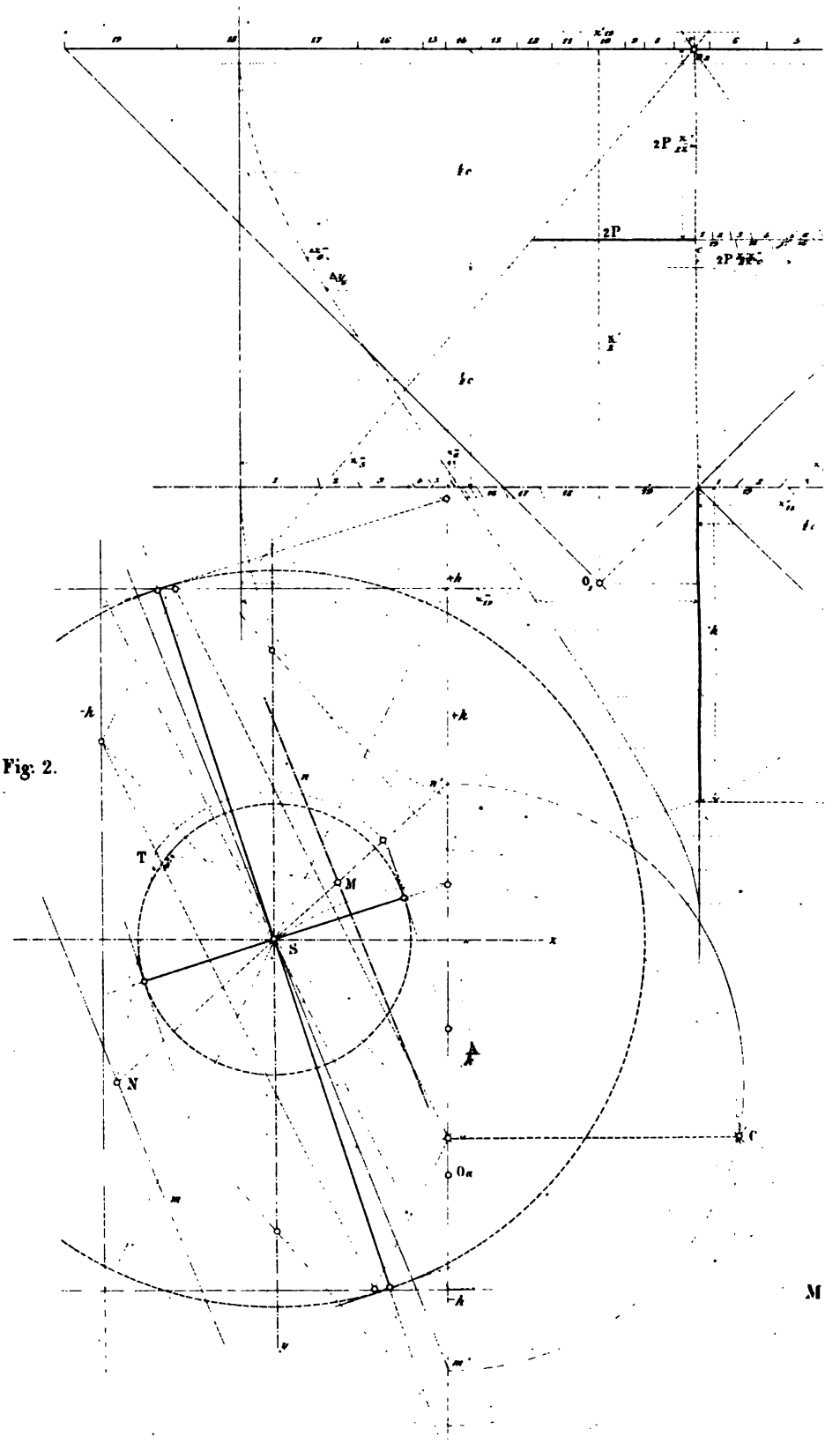


Fig. 2.

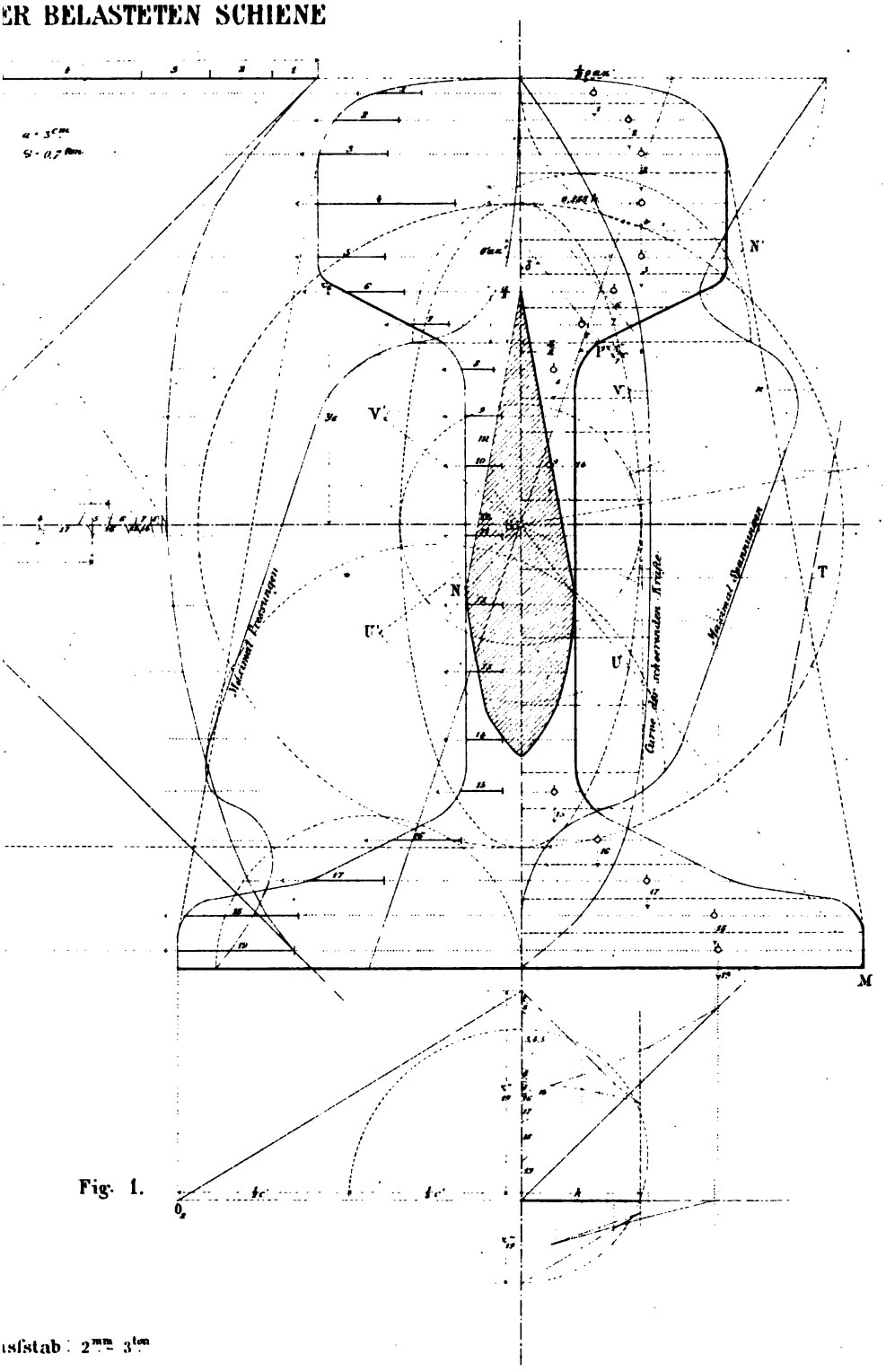
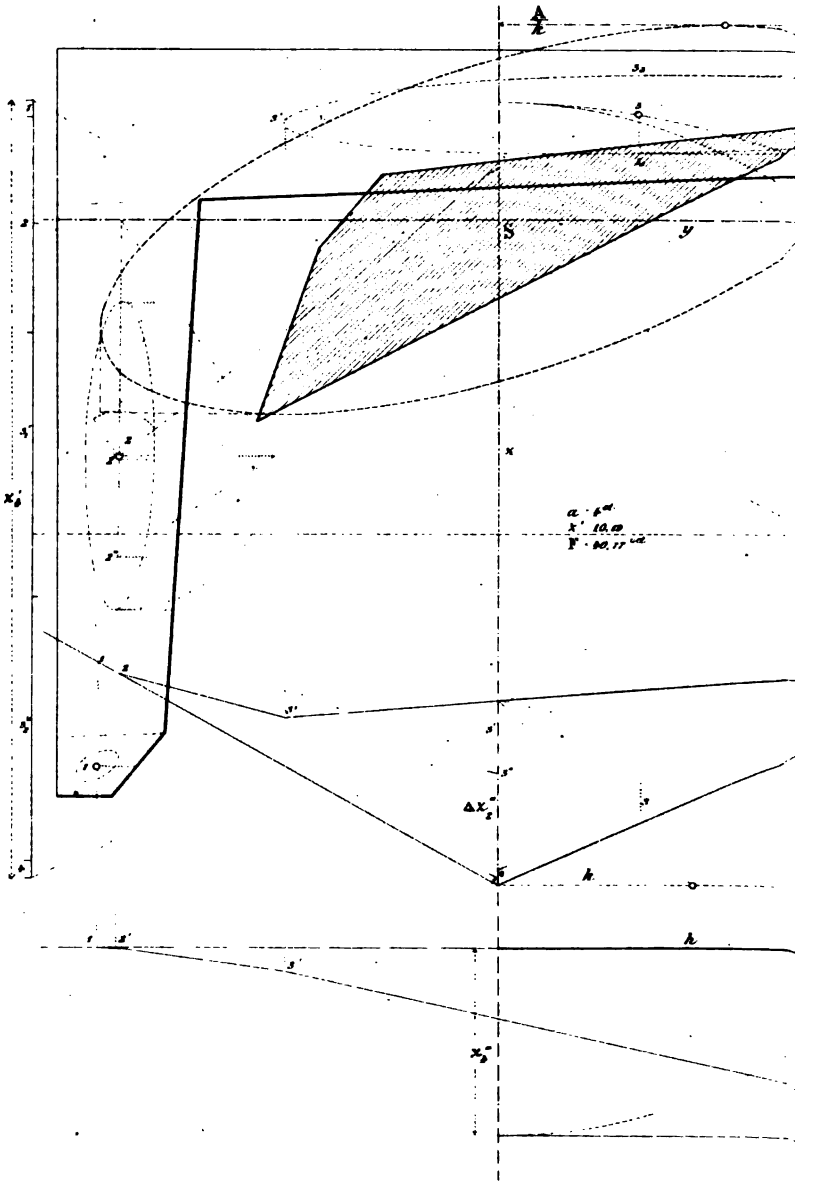


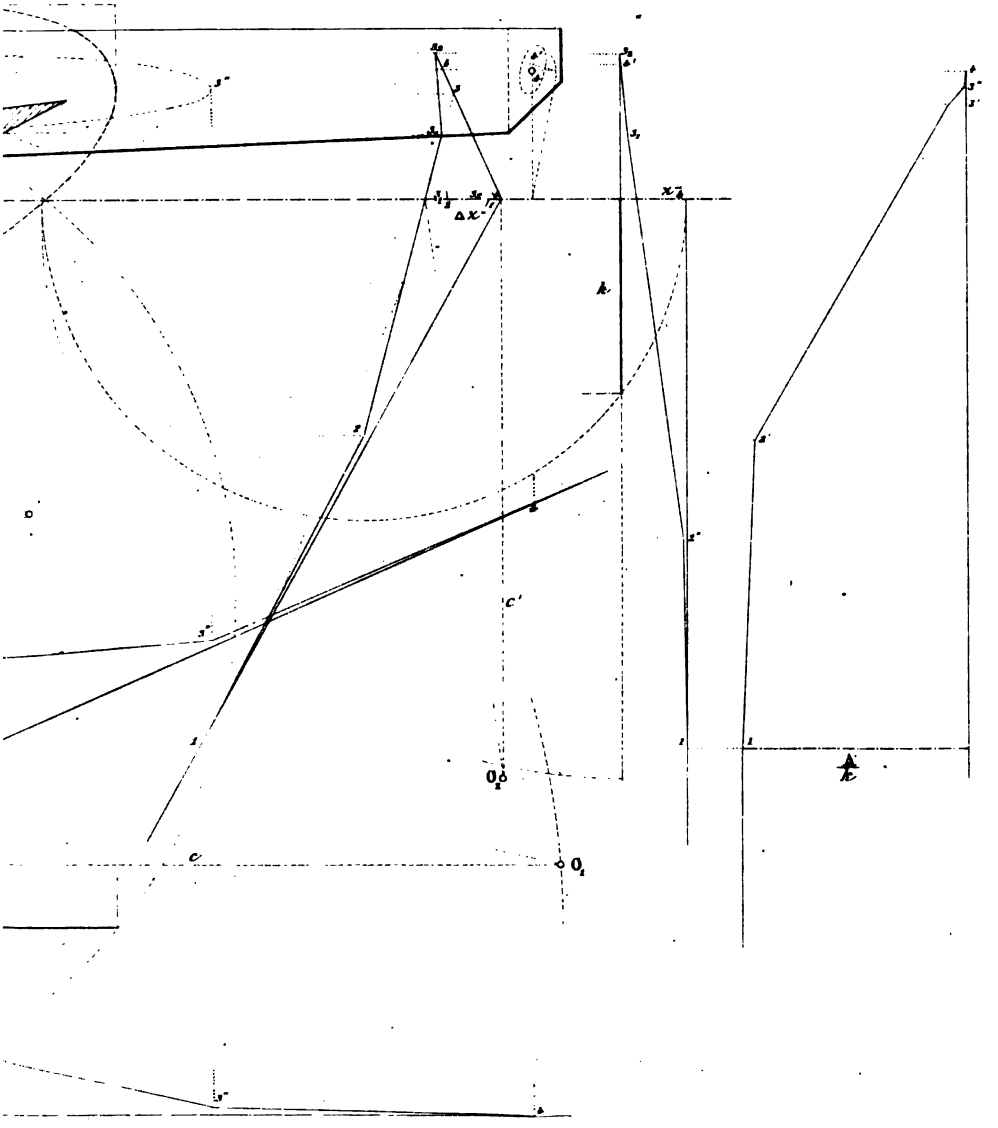
Fig. 1.

ıssstab : 2mm 3ton



Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

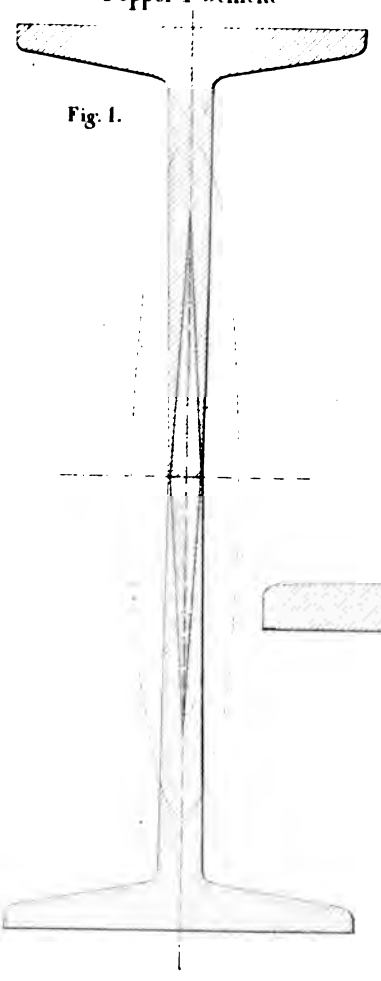
Lith. Anst. v. Wurs



rster, Randegger & C° in Winterthur.

Doppel T Schiene

Fig. 1.



T Eisen

Fig. 2.

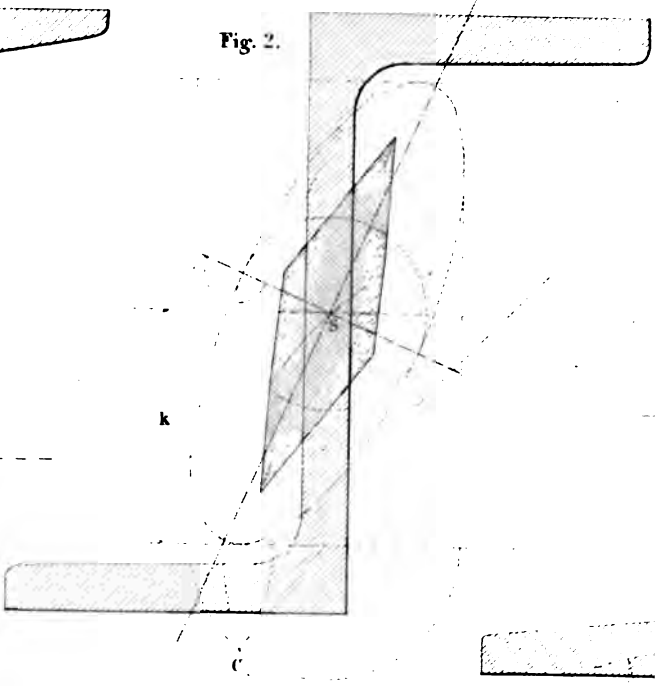
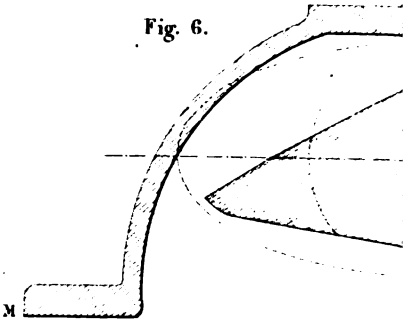
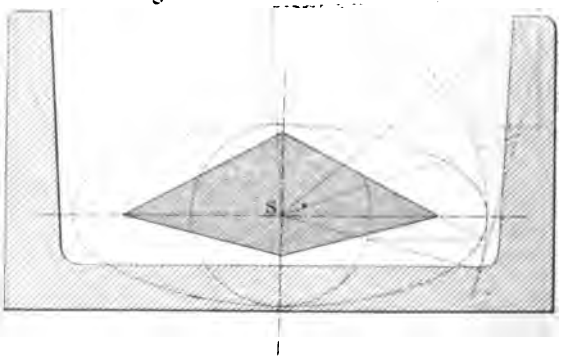


Fig. 6.



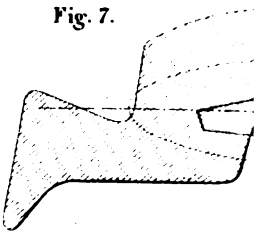
U Eisen

Fig. 5.



American

Fig. 7.



er u. Zeller in Zürich.

Lith. Anst. v. Wurster, Rande

Eisen mit verstärktem Kopf

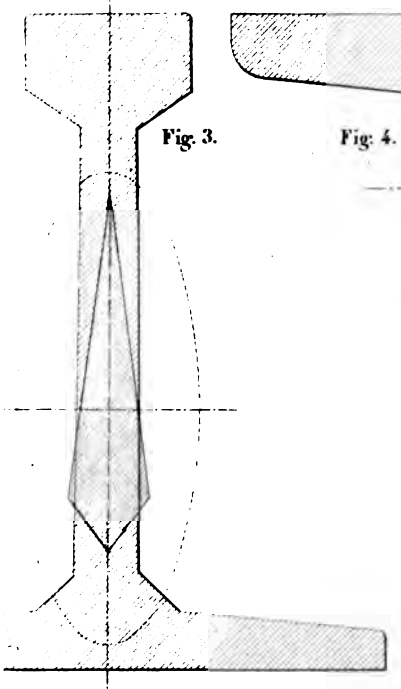


Fig. 3.

T Eisen

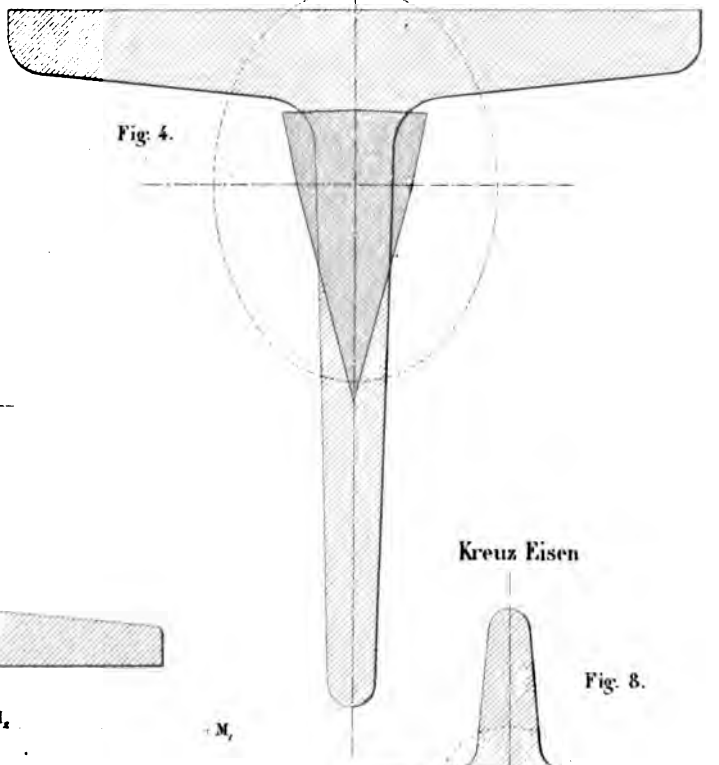


Fig. 4.

Kreuz Eisen

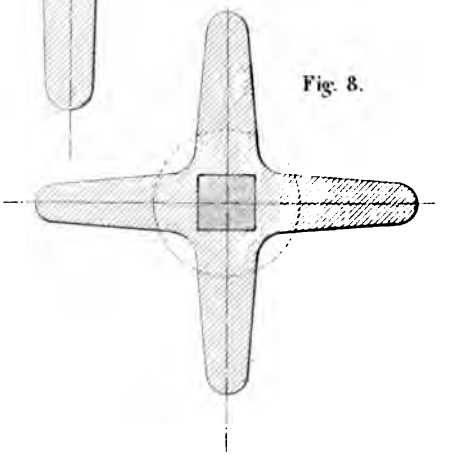
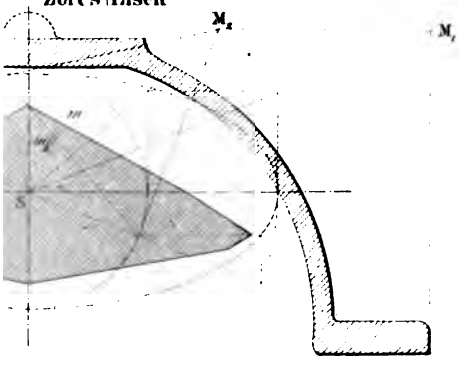


Fig. 8.

Zores Eisen



sche Flachschiene

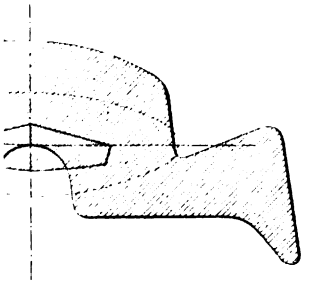
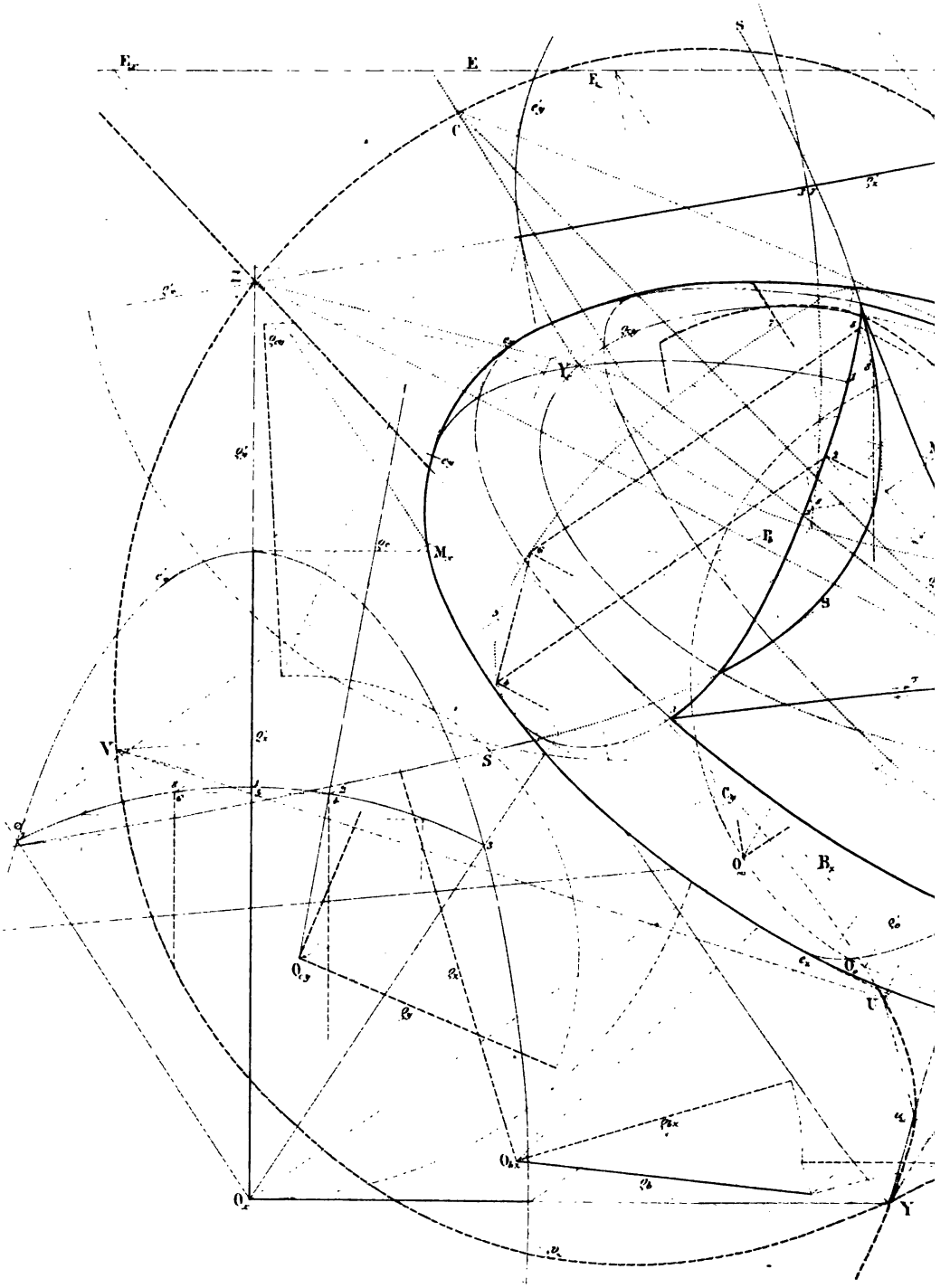


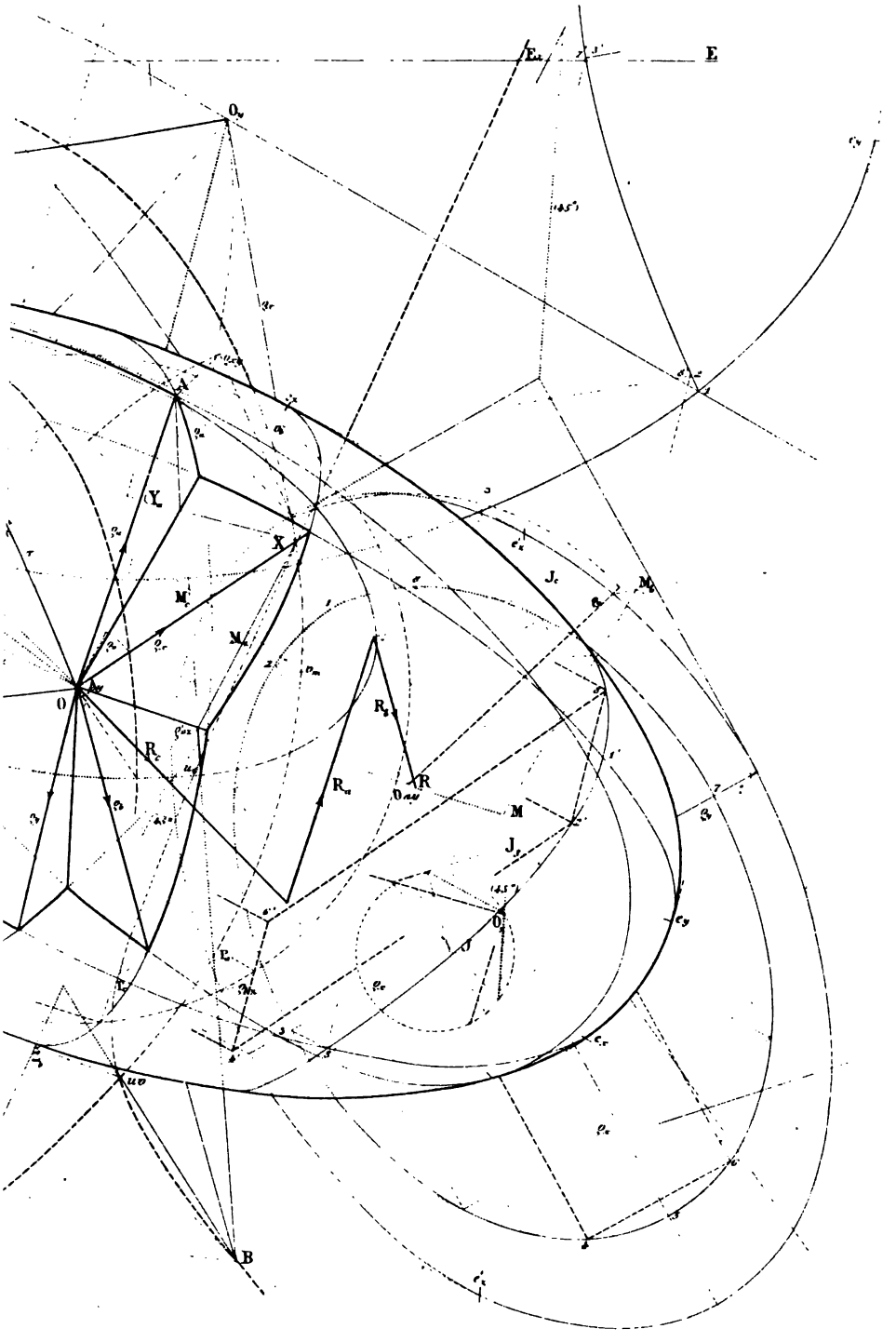
Fig.	F	k	k²F	k²F:e	k²:e√k	μ
1	10,07	4,62	196,73	33,28	1,061	2,08
2	9,77	3,05	90,55	23,15	,758	1,52
3	13,28	3,10	127,63	26,49	,806	1,28
4	13,70	2,57	105,69	15,25	,265	,95
5	8,70	2,73	64,84	18,26	,712	1,63
6	4,70	1,55	11,29	5,32	,522	1,08
7	10,60	0,66	4,55	2,86	,085	,10
8	6,10	0,97	3,74	2 28	,151	,30

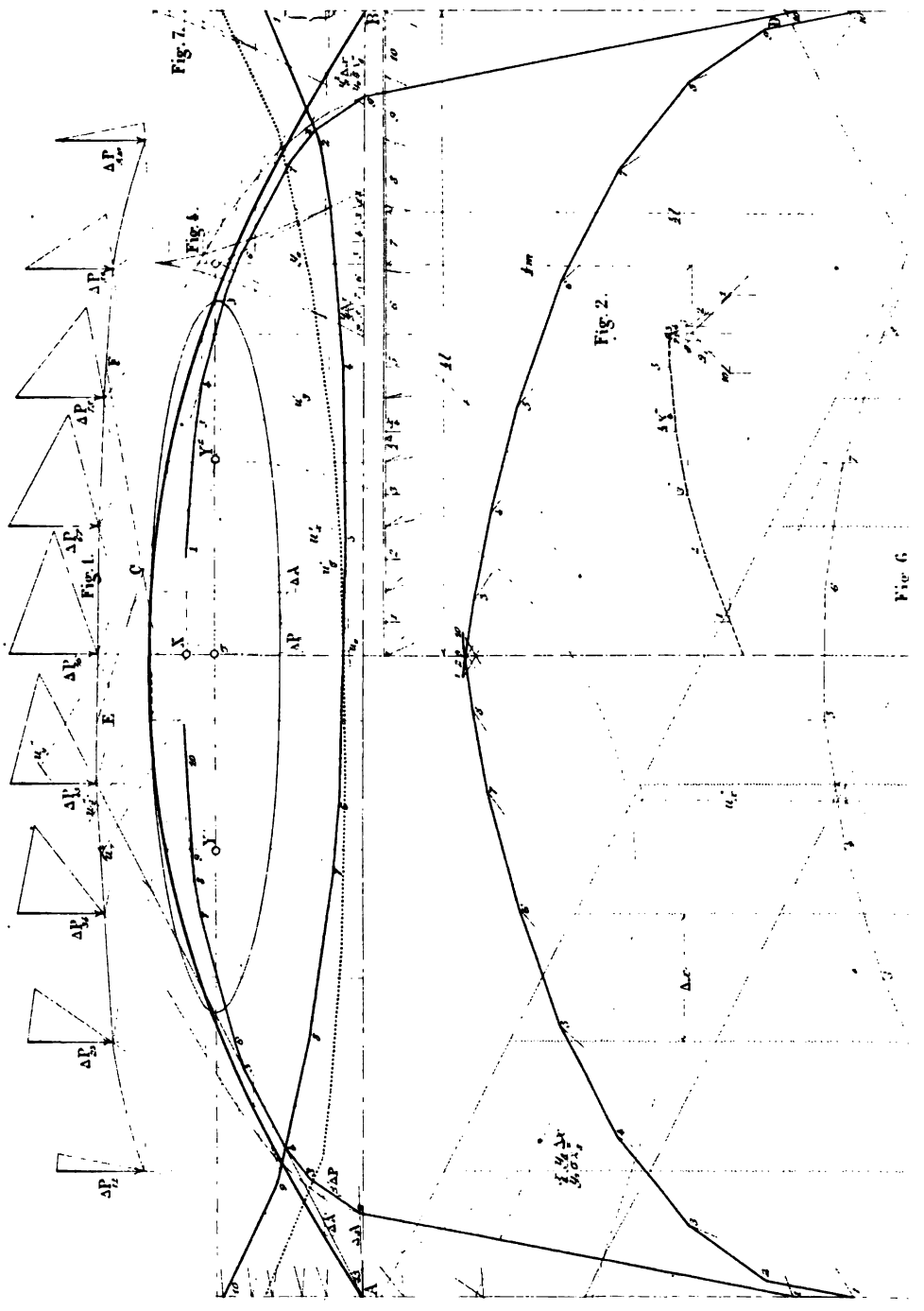


ig von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt

PROPORTIONALER KRÆFTE.

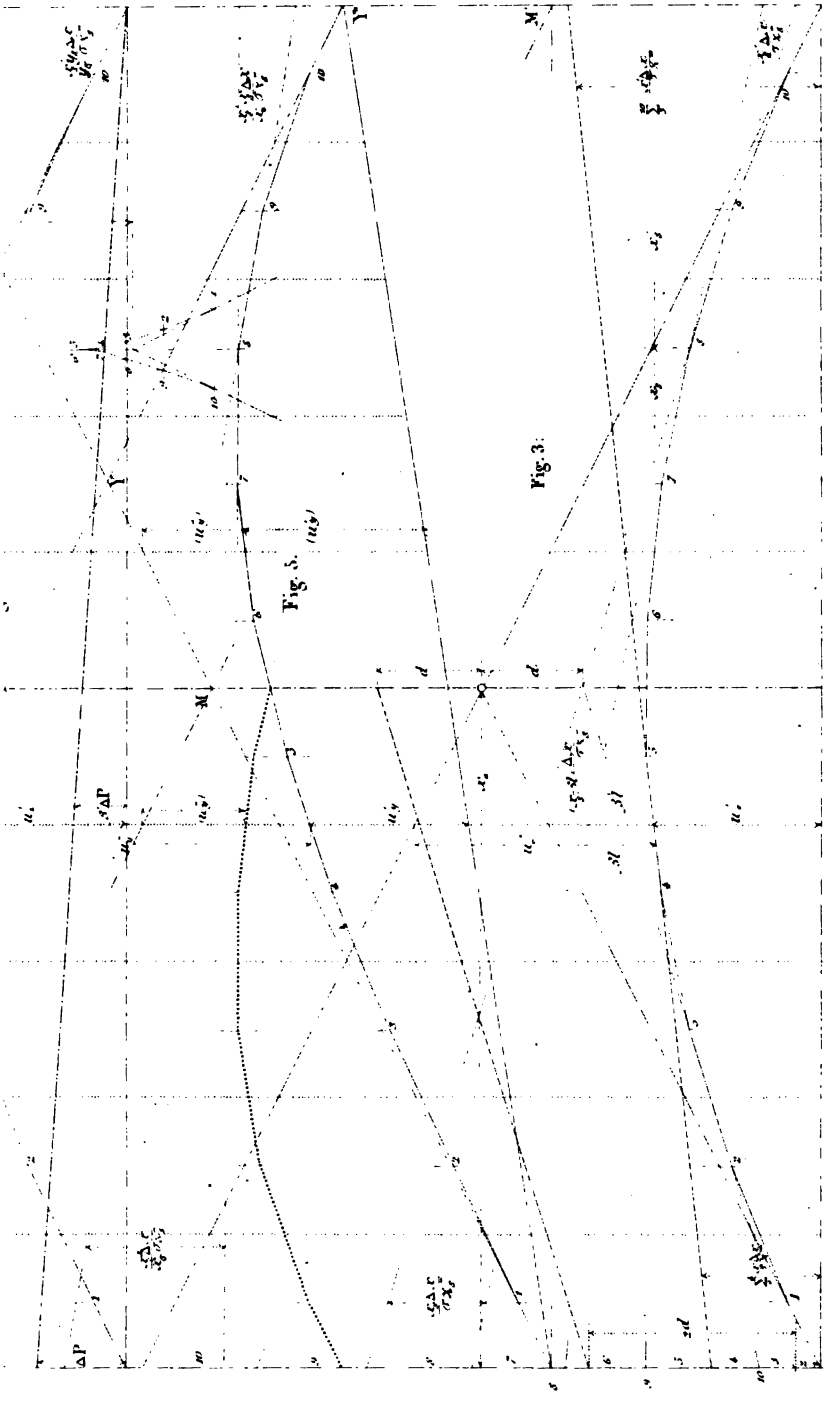




Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Ran

ÄNDERLICHEM QUERSCHNITT.



degger u. Comp. in Winterthur.

Fig. 1.

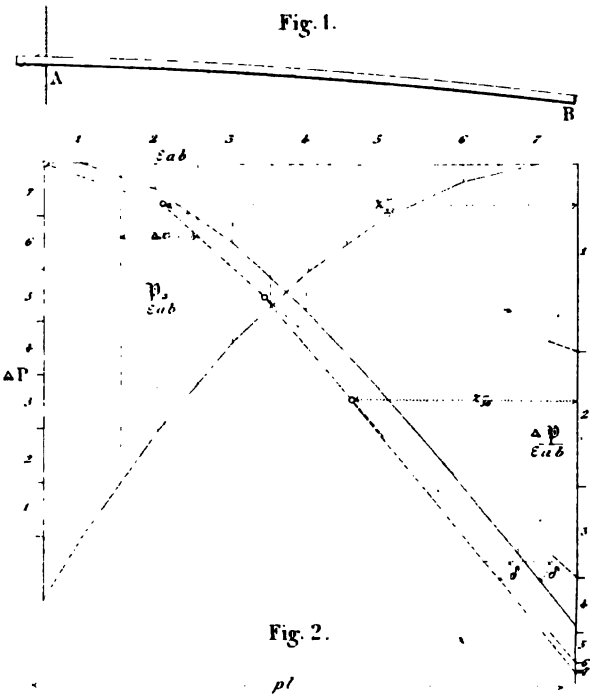
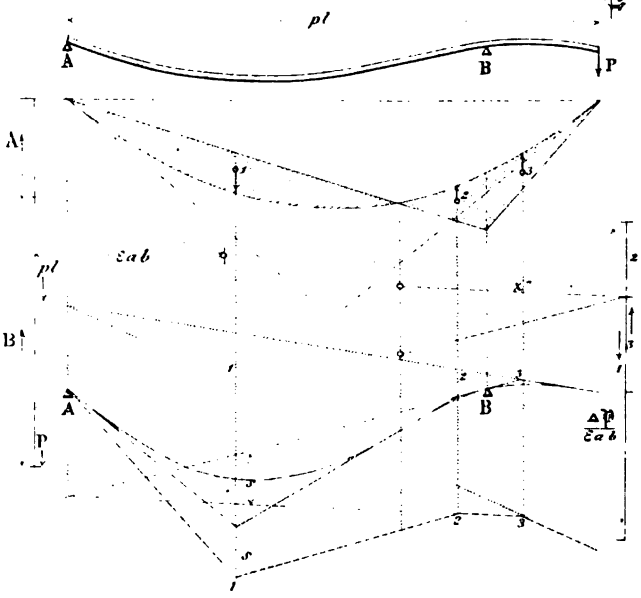
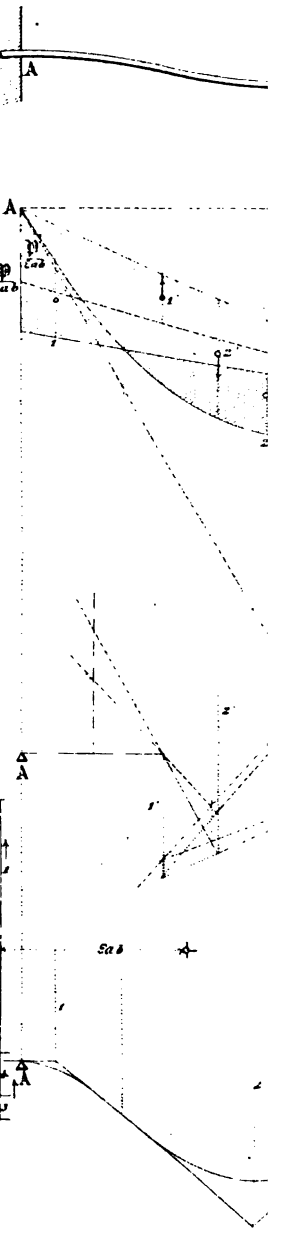


Fig. 2.





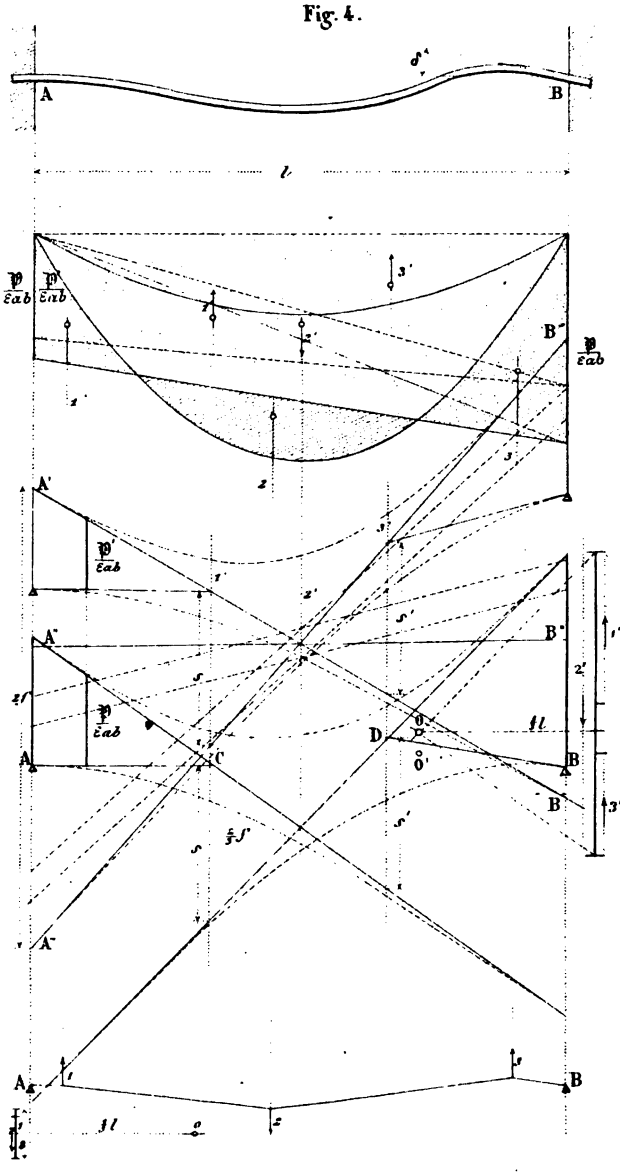
Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich

Lith. Anstalt v. Wurster, R

CHE LINIE GERADER BALKEN.

Fig. 3.

Fig. 4.



Landegger u. Comp. in Winterthur.

Culmann, graphische St